СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

П. Ф. ФИЛЬЧАКОВ

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

«НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ — 1974

517(083)
Ф57

УДК 510; 518

В справочнике излагаются основные вопросы аналитической геометрии на плоскости, дифференциального и интегрального исчисления, теории степенных рядов и их приложения к решению нелинейных и линейных дифференциальных уравнений, а также теории функций комплексного переменного.

Весь материал иллюстрируется большим количеством рисунков и графиков, а также многочисленными примерами, доведенными до числовых решений. Кроме того, в каждом из основных разделов приведены краткие исторические сведения.

Справочник рассчитан на студентов, преподавателей, инженеров и аспирантов, а также на лиц, желающих самообразованием пополнить свои знания по высшей математике.

Редакция справочной литературы
Зав. редакцией *Ю. Г. Абанина*

Ф $\frac{202\,03-123}{М\ 221\ (04)-74}$ 191—74

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

Часть первая

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава I. Уравнение прямой 6
§ 1. Основные понятия. Метод координат 6
§ 2. Задачи, связанные с точкой 9
§ 3. График функции $y = ax + b$ 13
§ 4. Уравнение прямой линии 15
§ 5. Уравнение с угловым коэффициентом. Формулы параллельного переноса координат 16
§ 6. Общее уравнение прямой 19
§ 7. Уравнение прямой в отрезках 21
§ 8. Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки 23
§ 9. Угол между двумя прямыми 25
§ 10. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых 26
§ 11. Пересечение двух прямых 28
§ 12. Некоторые задачи, решаемые при помощи уравнения прямой линии . 31
Контрольные упражнения 34

Глава II. Кривые второго порядка 36

§ 13. Алгебраические линии и их порядок 36
§ 14. Окружность 38
§ 15. Эллипс, его вершины, оси симметрии, фокусы и эксцентриситет . . 45
§ 16. Построение эллипса. Применение эллипса в технике 52
§ 17. Гипербола и ее асимптоты 56
§ 18. Общее преобразование координат. Равносторонняя гипербола 64
§ 19. График квадратичной функции 70
§ 20. Парабола и ее директриса 74
§ 21. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения. Полярные координаты и единое уравнение конических сечений 80
§ 22. Исследование общего уравнения второй степени 89
§ 23. Заключительные замечания 90
Контрольные упражнения 91

Часть вторая

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Глава III. Элементы дифференциального исчисления 94

§ 24. Функциональная зависимость 94
§ 25. Предельный переход 98
§ 26. Предел функции непрерывного аргумента 103

§ 27. Бесконечно малые и бесконечно большие величины 109
§ 28. Непрерывность функций. Разрывы первого и второго рода и устранимые разрывы 115
§ 29. Свойства непрерывных функций 121
§ 30. Обратная функция и ее непрерывность. Сложная функция 127
§ 31. Производная и ее вычисление 130
§ 32. Геометрическое значение производной 135
§ 33. Дифференцируемость функций 138
§ 34. Основные формулы и правила дифференцирования 140
§ 35. Производная степенной функции 147
§ 36. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций 152
§ 37. Натуральные логарифмы. Число *e* 156
§ 38. Производные логарифмической и показательной функций 163
§ 39. Таблица основных формул и правил дифференцирования 166
§ 40. Графическое дифференцирование 168
Контрольные упражнения 170

Глава IV. Исследование функций с помощью производных 171

§ 41. Возрастание и убывание функции 171
§ 42. Максимум и минимум функции. Экстремальные точки кривой . . . 174
§ 43. Производные высших порядков. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба 180
§ 44. Второй способ разыскания экстремумов функции 186
§ 45. Задачи на максимум и минимум функции 189
§ 46. Уравнение касательной и нормали к кривой. Дифференцирование неявных функций 195
§ 47. Кривизна и соприкасающаяся окружность 199
§ 48. Асимптоты 204
§ 49. Построение графиков 207
§ 50. Раскрытие неопределенностей 214
§ 51. Приращение и дифференциал функции. Аппроксимация любой дифференцируемой функции отрезками прямых 218
Контрольные упражнения 223

Глава V. Элементы интегрального исчисления 225

§ 52. Отыскание функции по ее производной. Первообразная и неопределенный интеграл 225
§ 53. Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла. Определение произвольной постоянной по начальным данным 227
§ 54. Обращение формул дифференцирования. Таблица простейших интегралов 229
§ 55. Основные свойства неопределенного интеграла 231
§ 56. Простейшие способы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой 233
§ 57. Интегрирование по частям 238
§ 58. Определенный интеграл и его связь с неопределенным интегралом. Формула Ньютона—Лейбница 241
§ 59. Основные свойства определенного интеграла 249
§ 60. Вычисление определенного интеграла подстановкой и интегрированием по частям 252
§ 61. Формула Валлиса 258
§ 62. Определенный интеграл как предел суммы 260
§ 63. Численное интегрирование. Формула трапеций и формула Симпсона . 264
§ 64. Понятие о математическом моделировании. Определение численного значения интеграла взвешиванием 273
§ 65. Исследование функций при помощи интеграла. Круговые и гиперболические функции 279

§ 66. Об интегралах, которые не выражаются через элементарные функции. Эллиптические интегралы 285
§ 67. Вычисление площади произвольной фигуры 290
§ 68. Длина дуги кривой 292
§ 69. Вычисление объема тела по его поперечным сечениям 297
§ 70. Путь, пройденный телом 301
§ 71. Заключительные замечания 302
Контрольные упражнения 308

Часть третья

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Глава VI. Основные понятия 311

§ 72. Вводные замечания 311
§ 73. Приближенные числа 314
§ 74. Абсолютная и относительная погрешности 317
§ 75. Сложение и вычитание приближенных чисел 319
§ 76. Умножение и деление приближенных чисел. Погрешность при вычислении заданной функции 322
§ 77. Приближенное извлечение корня 326
§ 78. Оформление вычислений и их контроль 330
§ 79. Табулирование и интерполяция 332
§ 80. Уплотнение таблиц, или субтабулирование 338
§ 81. Прямая и обратная табличные задачи 347
§ 82. Конечные разности. Вычисление таблиц полиномов 350
§ 83. О точности полиномиальной интерполяции. Проверка и корректировка таблиц 357
Контрольные упражнения 362

Глава VII. Приближенные методы решения конечных уравнений и их систем 364

§ 84. Численное решение уравнений с одним неизвестным. Графический метод отделения корней 364
§ 85. Метод Ньютона, или метод касательных 370
§ 86. Метод линейной аппроксимации, или метод хорд 377
§ 87. Метод итераций 379
§ 88. Решение систем двух уравнений 383
§ 89. Решение систем нелинейных уравнений в общем случае. Метод вариации параметров 396
§ 90. Решение нелинейных уравнений и их систем в комплексной области 409
§ 91. Заключительные замечания 421
Контрольные упражнения 427

Глава VIII. Степенные ряды 429

§ 92. Краткая историческая справка. Основные понятия 429
§ 93. Функциональные ряды. Равномерная сходимость 438
§ 94. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница 441
§ 95. Степенные ряды. Радиус сходимости 442
§ 96. Разложение в степенные ряды функций $\ln(1+z)$ и $\operatorname{arctg} z$ 447
§ 97. Вычисление таблиц логарифмов 452
§ 98. Ряд Тейлора 454
§ 99. Алгебраические действия над степенными рядами. Рекуррентные формулы 462
§ 100. Деление степенных рядов. Метод неопределенных коэффициентов . . 466
Контрольные упражнения 471

Глава IX. Дифференциальные уравнения 472
§ 101. Основные понятия и определения 472
§ 102. Уравнение с разделяющимися переменными 474
§ 103. Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными. Однородное уравнение 476
§ 104. Линейное уравнение первого порядка 479
§ 105. Уравнение Бернулли 483
§ 106. Линейное уравнение второго порядка 484
§ 107. Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами 487
§ 108. Неоднородное линейное уравнение высшего порядка 492
§ 109. Геометрический смысл уравнения первого порядка 495
§ 110. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Задача Коши 498
§ 111. Выделение из решений особенностей 508
§ 112. Уравнение Риккати 518
§ 113. Системы уравнений 532
§ 114. Краевые задачи 539
§ 115. Определение собственных значений. Задача Штурма — Лиувилля . . 546
§ 116. Уравнение Дуффинга 560
§ 117. Примеры простейших задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям 569
§ 118. Заключительные замечания 577
Контрольные упражнения 585

Глава X. Введение в теорию функций комплексного переменного 587

§ 119. Комплексные числа 587
§ 120. Основные определения 590
§ 121. Алгебраические действия над комплексными числами 592
§ 122. Возведение в степень и извлечение корня 597
§ 123. Основные геометрические понятия 600
§ 124. Функция комплексного аргумента 603
§ 125. Обратная функция. Непрерывность функции 606
§ 126. Производная. Условия дифференцируемости 607
§ 127. Аналитические функции 612
§ 128. Интеграл от функции комплексного аргумента 614
§ 129. Рациональные функции. Нули и полюсы 616
§ 130. Простейшие иррациональные функции. Точки разветвления 618
§ 131. Показательная функция и ее периодичность 621
§ 132. Тригонометрические функции. Формулы Эйлера 626
§ 133. Другой вывод теоремы сложения. Эффективные формулы для вычисления тригонометрических функций 631
§ 134. Вычисление π с любой наперед заданной точностью. Формулы приведения 634
§ 135. Графики тригонометрических функций. Составление таблиц 640
§ 136. Геодезическая съемка. Триангуляция 646
§ 137. Гиперболические функции и их связь с показательной и тригонометрическими функциями 651
§ 138. Логарифмическая функция 654
§ 139. Общая степенная и общая показательная функции 657
§ 140. Обратные тригонометрические и гиперболические функции 658
§ 141. Эллиптические функции Якоби 662
§ 142. Двоякопериодичность эллиптических функций Якоби 665
§ 143. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эллиптические функции Якоби 672
§ 144. Заключительные замечания 681
Контрольные упражнения 691

Ответы и указания 692

ПРИЛОЖЕНИЕ

Латинский и греческий алфавиты 711
Таблица I. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции . 712
Таблица II. Показательная и гиперболические функции 714
Таблица III. Коэффициенты для непосредственного интерполирования по узловым точкам 716
Таблица IV. Полные эллиптические интегралы первого рода 720
Таблица V. Некоторые часто встречающиеся постоянные 721
Литература 722

Алфавитный указатель 729

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой вниманию читателей книге излагаются основные вопросы аналитической геометрии на плоскости, дифференциального и интегрального исчисления, а также теории функций комплексного переменного, т. е. тот круг вопросов высшей математики, который необходим для студентов и аспирантов технических профилей. К сожалению, в настоящее время все эти вопросы рассредоточены по многим источникам, что существенно затрудняет их изучение.

Более подробно, чем в распространенной учебной литературе, рассматриваются рекуррентные формулы для выполнения алгебраических действий над степенными рядами и формулы численных квадратур, которые позволяют с любой наперед заданной степенью точности определять числовые значения интегралов, включая и те случаи, когда рассматриваемый интеграл не выражается в явном виде через элементарные функции, а также методы решения нелинейных конечных систем алгебраических и трансцендентных уравнений как в действительной области, так и в области комплексной. Учитывая ту роль, которую играют дифференциальные уравнения в самых различных теоретических и прикладных вопросах, в девятой главе, после краткого изложения простейших типов дифференциальных уравнений, более подробно освещены вопросы применения степенных рядов к интегрированию обыкновенных нелинейных и линейных дифференциальных уравнений и их систем. При этом рассматриваются задача Коши (т. е. задача с начальными условиями), краевые задачи и задачи по определению собственных значений.

В связи с переходом в ближайшие годы средней школы к новым программам, в справочнике предпринята попытка устранить существующий разрыв между элементарной и высшей математикой, что будет представлять интерес для учителей, студентов и аспирантов пединститутов, а также для учеников старших классов.

Наряду с этим часть материала, а именно: решение конечных систем алгебраических и трансцендентных уравнений, алгебраические действия над степенными рядами, применение рядов к решению нелинейных дифференциальных уравнений и т. д., выходит за рамки существующих программ технических вузов, так что он будет полезен для аспирантов и научных сотрудников, интересующихся прикладной математикой.

Весь материал иллюстрируется большим количеством рисунков и графиков, а также многочисленными примерами, доведенными до окончательных числовых результатов.

Для того чтобы активно усвоить все изложенное в книге, читатель обязательно должен продублировать рассмотренные примеры. Этой же цели служат и упражнения, приведенные в большинстве параграфов и в конце каждой главы. Ответы и указания к этим упражнениям даны в конце книги. Однако часть упражнений оставлена без ответов, для того чтобы помочь читателю выработать навыки самоконтроля. К сожалению, в практической работе при решении самых различных технических задач в большинстве случаев готового ответа не существует, и поэтому надо уметь найденный результат проверить самостоятельно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику АН УССР Ю. А. Митропольскому, с которым был обсужден ряд идей, положенных в основу данной книги.

Автор также искренне благодарит члена-корреспондента АН УССР А. Н. Боголюбова, профессора Н. М. Матвеева и доцента Ф. П. Яремчука за ряд ценных советов и замечаний, которые позволили улучшить изложение материала.

Все критические замечания и пожелания, направленные по адресу: Киев-4, ул. Репина, 3, издательство «Наукова думка», будут приняты с признательностью.

Март 1971 г. *Автор*

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Аналитическая геометрия—это раздел математики, в котором изучают свойства геометрических объектов (точек, линий, поверхностей и тел) средствами алгебры и математического анализа при помощи метода координат.

Сущность данного метода заключается в том, что геометрическим объектам сопоставляются уравнения или их системы, так что геометрические свойства фигур выражаются в свойствах их уравнений. Благодаря этому аналитическая геометрия объединила геометрию с алгеброй и математическим анализом, что плодотворно сказалось на развитии этих трех разделов математики.

В предлагаемой книге мы ограничились изложением основ аналитической геометрии на плоскости, усвоив которые читатель сможет самостоятельно перейти к изучению аналитической геометрии в пространстве, воспользовавшись, например, руководствами Н. В. Ефимова [39], А. В. Погорелова [103] или И. И. Привалова [110], в которых краткость и доступность изложения удачно сочетаются с его полнотой и математической строгостью.

Глава I

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

§ 1. Основные понятия. Метод координат

В элементарной (школьной) геометрии изучаются свойства прямолинейных фигур и окружности (в разделе *планиметрия*), а также прямые и плоскости в пространстве, многогранники и круглые тела — цилиндр, конус, шар (в разделе *стереометрия*). Основную роль при этом играют построения, а вычислениям отводится роль вспомогательная. Выбор того или иного построения для каждого конкретного случая требует обычно индивидуального подхода и соответствующей изобретательности, что и составляет основную трудность при решении задач методами элементарной геометрии.

Аналитическая геометрия и была призвана устранить эти трудности и создать единый метод решения различных геометрических задач. Поставленная цель была достигнута разработкой *координатного метода*, в котором основную роль играют вычисления, выполняемые по заданным формулам, а построения имеют вспомогательное значение.

Необходимые предпосылки для создания метода координат были подготовлены еще трудами древнегреческих математиков, в особенности Аполлония Пергского (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, ок. 260—170 до н. э.). Однако систематическое развитие этот метод получил в первой половине XVII века в работах Рене Декарта и Пьера Ферма.

Рене Декарт (René Descartes, 1596 — 1650) — знаменитый французский философ, математик, физик и физиолог. Родился в г. Лаэ (департамент Турень) в дворянской семье. В 1629 г. поселился в Голландии, где написал большую часть своих работ. Умер в Стокгольме, куда переехал в 1649 г.

В физике Декарт установил закон преломления света на границе двух сред (который несколько раньше и независимо от него был сформулирован В. Снеллиусом), пояснил образование радуги. Ему же принадлежит формулировка закона сохранения количества движения (в скалярной форме) и разработка механистической гипотезы образования тел Солнечной системы. В области физиологии Декарту принадлежит большое число экспериментов и ряд плодотворных научных идей, в частности, он первым ввел понятие о рефлексе.

В 1637 г. Декарт издал большой философский трактат «Рассуждение о методе. С приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия» (русский перевод, Гостехиздат, М., 1953), в котором, в частности, систематически изложен метод прямолинейных координат, введена удобная алгебраическая символика, сохранившаяся до наших дней, выполнена классификация кривых на алгебраические и трансцендентные, а также даны способы построения касательных и нормалей к плоским алгебраическим кривым. Благодаря этой работе, которая оказала большое влияние на дальнейшее развитие математики, Декарта, наряду с его не менее знаменитым соотечественником Ферма, и считают основоположником аналитической геометрии, а 1637 год — годом ее зарождения.

Пьер Ферма (Pierre de Fermat, 1601 — 1665) — известный французский математик. Родился в городке Бомон-де-Ломань, вблизи Монтобана, на Тарне (приток Гароны). По профессии юрист, с 1631 г. был советником парламента в г. Тулузе. Один из творцов теории чисел, в которой ему принадлежит несколько важных результатов, в частности так называемые большая и малая теоремы Ферма. В физике ему принадлежит основной принцип геометрической оптики, согласно которому свет всегда распространяется между двумя точками по такому пути, для преодоления которого необходимо затратить минимальное время. Большое внимание Ферма уделял также разработке основ дифференциального исчисления и аналитической геометрии. Он раньше и более последовательно, чем Декарт, разработал метод координат, а также вывел уравнение прямой и линий второго порядка. Но основные работы Ферма, в том числе и по аналитической геометрии, были опубликованы только в 1679 г. после его смерти сыном Самюэлем под заглавием «Различные математические работы д-ра Петра де Ферма,

выбранные из его писем или к нему написанных по математическим вопросам и по физике ученейшими мужами на французском, латинском или итальянском языках». Наиболее полное собрание сочинений Ферма в трех томах издано видным специалистом по истории математики Полем Таннери в Париже в 1896 г.

Дальнейший существенный вклад в развитие этой науки внесли Исаак Ньютон (I. Newton, 1642—1727), Готфрид Вильгельм Лейбниц (G. W. Leibnitz, 1646—1716) и Леонард Эйлер (L. Euler, 1707—1783), которые придали ей современную структуру. Сам термин *аналитическая геометрия* был предложен И. Ньютоном.

Перейдем к изложению метода координат, ограничиваясь при этом только двумерным (плоским) случаем.

Прямую линию, на которой указано положительное направление и единица масштаба (т. е. отмечены точки 0 и 1), *называют числовой осью.* На числовой оси каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка. Возьмем на плоскости две числовые оси, пересекающиеся под прямым углом (рис. 1). Точку их пересечения будем считать началом отсчета для обеих осей и обозначим ее буквой O (от латинского *origo* — начало; отсюда и «оригинал», т. е. первоисточник, начало).

Вертикальная ось Oy называется осью *ординат* или осью y, а горизонтальная Ox — осью *абсцисс* или осью x. Всю плоскость эти две оси разбивают на четыре части, называемые *квадрантами.* Каждый квадрант имеет свой номер, как показано на рис. 2. Любую точку M плоскости можно определить двумя числами — расстояниями этой точки от координатных осей. Эти числа называются *координатами* данной точки. Число x называется *абсциссой* точки M, число y — ее *ординатой.* Так, например, на рис. 3 точка M_1 определяется координатами $x = 3$; $y = 2$, или сокращенно (3; 2), причем на первом месте всегда ставят абсциссу x, а на втором — ординату y.

Точки M_1 (3; 2) и M_2(—3; 2), у которых ординаты совпадают, а абсциссы разнятся только знаками, называются точками, *симметричными относительно оси* y. Если представить, что вдоль оси y установлено зеркало, то отражение в нем точки M_1 дает точку, ей симметричную. В общем случае координаты точек M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 $(x_2; y_2)$ будут связаны соотношениями

$$x_1 = -x_2;\ y_1 = y_2.$$

Рене Декарт.

Пьер Ферма.

Аналогично точки M_1 (3; 2) и M_4 (3; — 2) *симметричны относительно оси x.*

В общем случае координаты точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_4(x_4; y_4)$ будут связаны соотношениями

$$x_1 = x_4;\ y_1 = -y_4.$$

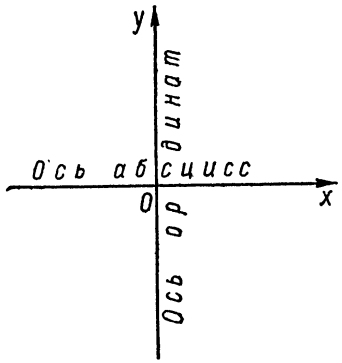


Рис. 1.

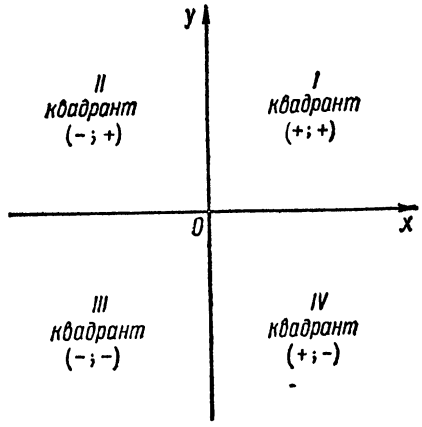


Рис. 2.

Наконец, точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_3(x_3; y_3)$ с координатами, удовлетворяющими условиям

$$x_1 = -x_3;\ y_1 = -y_3$$

(сформулируйте эти условия словами), называются *симметричными относительно начала координат* или *центрально симметричными.*

Упражнение 1. Построить точки, симметричные относительно осей и начала координат к точке M (5; 4), а также к M (— 3; 5). В каких квадрантах они расположатся?

Обратимся снова к точке M_1 (3; 2) и начнем изменять ее координаты, сохраняя неизменной абсциссу $x = 3$, т. е. рассмотрим ряды точек (3; 2), (3; 3), (3; 4),..

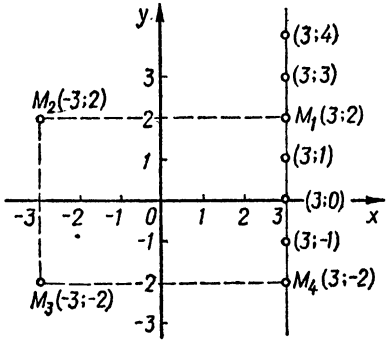


Рис. 3.

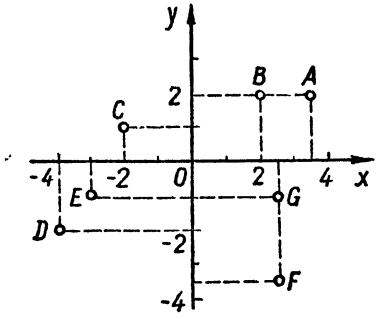


Рис. 4.

и (3; 2), (3; 1), (3; 0), (3; —1), ... (рис. 3). Как видим, точка M_1 с изменением только ординаты y перемещается параллельно оси y.

Упражнение 2. Постройте систему координат и точку M (3; 2). Изменяйте ее абсциссу x, сохраняя постоянным $y = 2$. Проследите, как будет перемещаться исходная точка $M(x; y)$. Проделайте то же для какой-либо иной точки.

Из этих упражнений можно сделать следующие выводы.

Координаты независимы одна от другой, и изменение одной из них не влияет на другую.

Каждой паре чисел $(x; y)$ отвечает одна и только одна точка плоскости и, обратно, каждой точке плоскости отвечает одна и только одна пара чисел $(x; y)$, или, как принято говорить в математике: *точке на плоскости можно поставить во взаимно однозначное соответствие пару чисел $(x; y)$ — ее координат.*

Упражнения

3. Определить координаты точек A, B, C, D, E, F, G (рис. 4).

4. Построить точки с координатами (4; —5), (— 8; —6), (5; 5), (0; 4), (—2; 0), (—3,2; 5,4), (0; 0), (6; 7), (—1,4; 2,3).

5. Какие знаки будут у координат произвольной точки II квадранта? IV квадранта?

6. Какую абсциссу имеют точки оси ординат? Какие координаты имеет точка O — начало координат?

7. Построить точки, симметричные относительно точки M (— 4; —3).

Как приложение метода координат для определения местоположения точки, рассмотрим такой пример.

Местоположение люка подземного кабеля или водопровода определяют координатами, нанесенными на табличку, укрепленную где-либо на видном месте, считая саму табличку началом координат (рис. 5). Это особенно удобно зимой, когда земля покрыта снегом и найти люк другим путем становится затруднительно.

Рассмотренная система координат называется *декартова прямоугольная система координат.* Существуют также полярные, косоугольные, биполярные и некоторые другие координаты, к чему мы вернемся в дальнейшем.

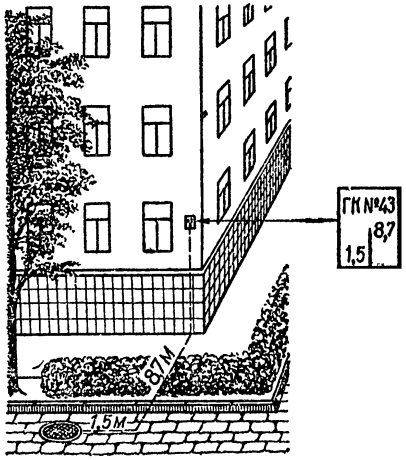


Рис. 5.

§ 2. Задачи, связанные с точкой

Решим теперь методом координат некоторые наиболее типичные задачи, связанные с точкой.

Задача 1. Определить расстояние r от начала координат точки $M(x; y)$ заданной своими координатами (рис. 6).

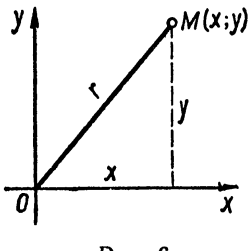


Рис. 6.

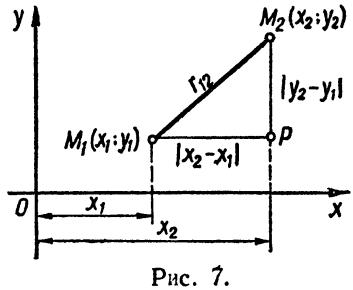


Рис. 7.

Решение. Данная задача сводится к вычислению гипотенузы прямоугольного треугольника*, катеты которого $|x|$ и $|y|$. Согласно теореме Пифагора

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

* Нас не интересуют знаки координат x и y, поэтому мы взяли их абсолютные величины $|x|$ и $|y|$.

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{I.1}$$

причем значение корня берется арифметическое, т. е. только со знаком плюс*.

Задача 2. Найти расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, заданными своими координатами (рис. 7).

Решение. В данном случае катеты треугольника M_1M_2P будут $|x_2 - x_1|$ и $|y_2 - y_1|$, так что**

$$r_{12} = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{I.2}$$

Заметим, что точки M_1 и M_2 могут лежать в любых квадрантах, т. е. знаки у x_1, x_2, y_1, y_2 могут быть как положительные, так и отрицательные. Таким образом, одной формулой (I.2) охвачены все частные случаи взаимного расположения точек.

Пример 1. Найти расстояние между точкой $M_1(5; -2)$ и симметричной ей относительно начала точкой $M_2(-5; 2)$.

Решение. Согласно формуле (I.2) имеем

$$r_{12} = \sqrt{[(-5) - (+5)]^2 + [2 - (-2)]^2} = \sqrt{100 + 4} \approx 10{,}2.$$

Упражнения

1. Найти расстояния от начала координат до следующих точек (8; 3), (−8; −3), (2; 7), (0; 5), (−3,1; 4,8).

2. Определить, какие из заданных точек лежат дальше, а какие ближе к началу координат: (5; 5), (−4; −6), (2; 3), (−7; 1), $(-\sqrt{7}; +\sqrt{6})$.

3. Найти расстояния между такими парами точек:

$M_1(2; 4)$, $M_2(5; 8)$; $A(3; -2)$, $B(-4; -7)$; $P(-3{,}8; 4{,}5)$, $Q(6{,}7; -7{,}3)$.

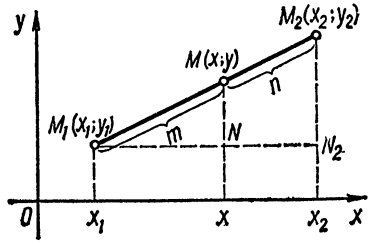


Рис. 8.

4. Треугольник задан координатами своих вершин $A(1; 1)$, $B(4; 1)$, $C(1; 5)$. Определить длину его сторон.

Задача 3. Отрезок задан координатами своих концов $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Найти точку $M(x; y)$, которая делит данный отрезок на части, пропорциональные числам m и n (рис. 8).

Решение. Будем считать, что отрезок M_1M имеет m единиц (*см*, дюймов, аршин), а отрезок MM_2 — n таких же единиц. Интересующие нас формулы найдем из подобия прямоугольных треугольников $M_1M_2N_2$ и M_1MN (у которых стороны MN и M_2N_2 параллельны оси Oy, а следовательно, и между собой):

$$\frac{x_2 - x_1}{m + n} = \frac{x - x_1}{m}.$$

Решив это уравнение относительно x, имеем

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} \tag{I.3}$$

* Все основные формулы будем нумеровать, пользуясь двойной нумерацией, в которой первая цифра означает номер главы, а вторая — текущий номер формулы.

** Значки, относящиеся к буквам, называются *индексами*. По-латыни *index* значит указатель. Индексы не следует путать с показателями степени. Выражения y_2, M_1, M_3 читаются: игрек два, эм один, эм три. Одинаковые буквы с разными индексами (x_0, x_1, x_3, x_a, x_b) применяют вместо разных букв для того, чтобы подчеркнуть, что речь идет об аналогичных, но в то же время разных величинах. Так, например, y_1, y_2, y_3 — все эти величины являются игреками — ординатами и откладываются по оси y. Но они относятся к разным точкам этой оси. Величины, обозначаемые разными буквами, но с одинаковым индексом, относятся к одной и той же точке: M_4 — обозначение некоторой точки $M = M_4(x_4; y_4)$, x_4 — ее абсцисса, y_4 — ее ордината. В тех случаях, когда надо подчеркнуть, что рассматриваемая величина зависит от двух (или нескольких) других величин, ставят два (или несколько) индексов. Например, r_{12} (читать эр один два, а не эр двенадцать) — расстояние между точками M_1 и M_2.

и, аналогично,

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}. \qquad (I.3')$$

В частности, для координат середины отрезка, для которого $m = n$, формулы упрощаются и принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (I.4)$$

Применение этих формул покажем на двух примерах: одном из механики, а другом из геометрии.

Отметим, что в задачах механики материальное тело часто заменяют одной надлежащим образом выбранной точкой, которой приписывается вес всего тела. Например, при расчете траектории искусственного спутника Луны ракета, Солнце, Земля и Луна рассматриваются как материальные точки.

Пример 2. Точка $M_1(4; -2)$ весом 5 *кг* и точка $M_2(4; 6)$ весом 3 *кг* соединены стержнем, весом которого можно пренебречь. Найти центр тяжести этой системы.

Решение. Из механики известно, что центр тяжести делит весь отрезок на части, обратно пропорциональные весам точек, т. е. здесь $m = 3$ и $n = 5$. В таком случае для центра тяжести имеем

$$x = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 4}{5 + 3} = 4; \qquad y = \frac{5 \cdot (-2) + 3 \cdot 6}{5 + 3} = 1.$$

Пример 3. Доказать, что диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам.

Решение. Возьмем произвольный параллелограмм и примем одну из его вершин за начало координат, а ось x направим по его основанию. Координаты остальных его вершин выразятся некоторыми тремя независимыми числами a, b, c (рис. 9). Для требуемого доказательства надо найти середину каждой диагонали и убедиться, что это одна и та же точка. В результате докажем теорему геометрии при помощи одних алгебраических вычислений.

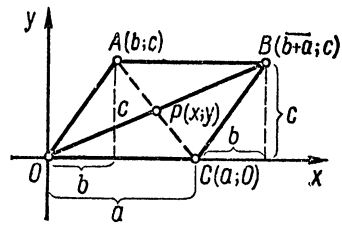


Рис. 9.

Действительно, для средней точки $P(x; y)$ диагонали OB

$$x = \frac{a + b}{2}; \quad y = \frac{c}{2}$$

и точно так же для середины диагонали AC

$$x = \frac{a + b}{2}; \quad y = \frac{c}{2}.$$

Упражнения

5. Найти, при каком значении b параллелограмм (рис. 9) обратится в прямоугольник, и проверить справедливость доказанной теоремы и в этом случае.

6. Найти координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок между точками $A(2; 3)$ и $B(6; 13)$ в отношении 3 : 1.

7. Решить эту же задачу, взяв отрезок, расположенный симметрично относительно оси y.

8. Найти координаты середин сторон треугольника ABC, заданного координатами своих вершин $A(-2; 1)$, $B(3; 5)$, $C(3; -2)$.

9. Выполнить то же самое для треугольника $A(0; 4)$, $B(-2; 3)$, $C(-2; -3)$. Есть ли в этом треугольнике вершины, симметричные относительно оси?

В заключение решим еще две задачи на вычисление площадей, которые выполняются также алгебраическим путем.

Задача 4. Определить площадь S фигуры, ограниченной отрезком, соединяющим точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ ординатами его концов и осью x (рис. 10).

Решение. Рассматриваемая фигура есть трапеция. Ее площадь

$$S = hm.$$

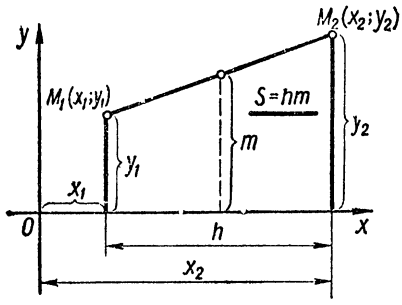


Рис. 10.

В данном случае $h = x_2 - x_1$, а m есть ордината средней точки отрезка M_1M_2, т. е.

$$m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Следовательно,

$$S = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}. \qquad (I.5)$$

Задача 5. Определить площадь треугольника ABC, зная координаты его вершин.

Решение. Задачу легко привести к предыдущей, если рассматривать площадь треугольника как разность суммы площадей $A'C'CA$ и $C'B'BC$ и площади трапеции $A'B'BA$ (рис. 11). В таком случае, вынося общий множитель $\frac{1}{2}$ за скобки, имеем:

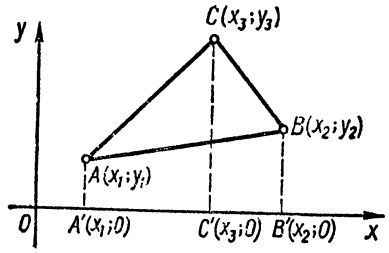


Рис. 11.

$$S = \frac{1}{2}[(x_3 - x_1)(y_3 + y_1) +$$

$$+ (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) - (x_2 - x_1)(y_2 + y_1)].$$

Выполнив несложные преобразования, этой формуле легко придать следующий вид:

$$S = \frac{1}{2}|(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)| \qquad (I.6)$$

или, переходя к определителям второго порядка (см., например, [110, гл. VI, § 1] или [161, стр. 236]),

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}. \qquad (I.7)$$

Площадь треугольника всегда считаем величиной положительной. Поэтому перед определителем берем знак плюс, если значение определителя положительно, и минус, если оно отрицательно. С этой же целью в формуле (I.6) применен знак модуля (который надо отличать от совпадающего с ним по начертанию знака определителя).

Пример 4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; 1)$, $B(-3; -2)$ и $C(-1; 4)$.

Решение. Приняв точку A за первую вершину, B за вторую и C за третью, имеем (рис. 12)

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1-4 \\ -3+1 & -2-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 6 = -24.$$

Тогда, взяв в формуле (I.7) знак минус, находим

$$S = -\frac{1}{2} \cdot (-24) = +12.$$

Если же считать первой вершиной A, второй C и третьей B, то

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 1+2 \\ -1+3 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 6 = +24.$$

В формуле (I.7) теперь надо взять знак плюс, и получим прежний результат

$$S = 12.$$

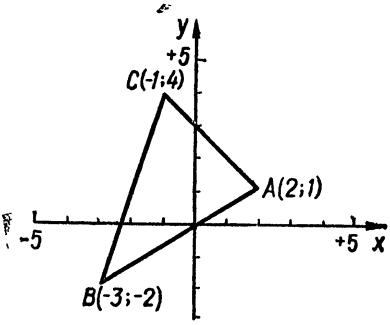


Рис. 12.

Упражнения

10. Решить пример 4, приняв точку C за первую вершину, A за вторую и B за третью.

11. Определить площадь $\triangle ABC$, у которого $A(2; 1)$, $B(8; 2)$, $C(4; 5)$.

Наиболее простой вид формула (I.7) принимает, если одна из вершин треугольника совпадает с началом координат. Например, если вершина M_3 имеет координаты

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 0,$$

то площадь треугольника представляется следующей формулой:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad (I.8)$$

§ 3. График функции $y = ax + b$

Согласно определению функции *каждому значению независимой переменной x соответствует определенное значение функции y*, которое в нашем случае легко вычислить*. Эту пару соответственных чисел x и y можно изобразить, пользуясь методом координат, одной точкой $(x; y)$ на плоскости xOy, и эта точка наглядно покажет, в каком именно числовом соответствии находятся функция и ее аргумент. Если же нанести достаточное количество таких точек и соединить их непрерывной линией, то получим *графическое изображение* рассматриваемой функции, или, короче, ее *график*.

Для большей наглядности возьмем какую-либо конкретную функцию рассматриваемого типа, например

$$y = 2x - 3,$$

и вычертим ее график. Результаты вычислений расположим в таком виде:

x	. . .	−2	−1	0	1	2	3	4	5	. . .
$y = 2x - 3$	. . .	−7	−5	−3	−1	1	3	5	7	. . .

Здесь мы задавали x произвольно и вычисляли соответствующий ему y. Многоточия показывают, что этот процесс можно продолжить в обе стороны беспредельно. Точно так же, при надобности, можно вычислить еще сколько угодно

* Более подробно понятие функциональной зависимости, которое является одним из основных математических понятий, рассмотрим в § 24.

промежуточных точек, как, например, это сделано ниже для значений между единицей и двумя:

x	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$y = 2x - 3$	−1,0	−0,6	−0,2	0,2	0,6	1,0

Построим теперь, воспользовавшись декартовой системой координат, вычисленные точки и, приложив линейку, убедимся, что все они легли на одну прямую, которая и является графиком функции $y = 2x - 3$ (рис. 13).

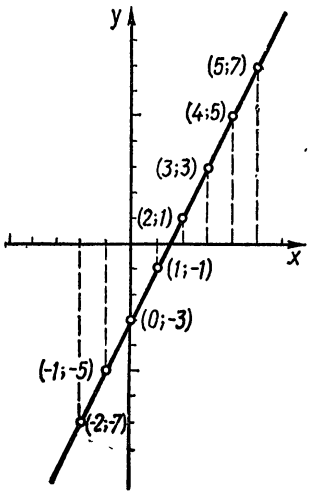


Рис. 13.

График любой функции типа $y = ax \pm b$ строим подобным образом. Все эти графики будут изображаться различными прямыми, в силу чего функция

$$y = ax \pm b$$

называется *линейной функцией*.

Однако при этом возникает законное сомнение: достаточно ли строг и убедителен такой метод, каким мы пользовались?

Можем ли мы утверждать, что если, к примеру, 17 построенных точек легли на одну прямую, то и следующая, 18-я, точка ляжет на ту же прямую? Ведь сколько бы ни продолжать процесс, мы не можем быть абсолютно уверены, что следующая точка будет вести себя так же, как предыдущие, уже проверенные, точки.

Необходимую строгость можно получить, только доказав, что всякая точка графика линейной функции $y = ax + b$ (т. е. всякая точка, координаты которой связаны этой функциональной зависимостью) попадает на одну и ту же прямую. Такое доказательство проведем в общем виде, оставляя буквенные коэффициенты a и b.

Как известно, прямая вполне определяется двумя своими точками. Это позволяет провести доказательство так: возьмем только две какие-нибудь точки графика нашей функции и проведем через эти точки прямую, а затем возьмем произвольную точку, которая должна принадлежать графику рассматриваемой функции, и докажем, что она обязательно попадет на ту же прямую.

Зададим такое значение x, чтобы соответствующий y был равен нулю, для чего решим уравнение

$$ax + b = 0.$$

В результате получим точку графика с координатами

$$x = -\frac{b}{a}; \quad y = 0,$$

которая на рис. 14 обозначена как точка A.

Возьмем произвольную точку графика, например точку с координатами x_1, y_1. Ее принадлежность графику означает, что y_1 и x_1 — не произвольная пара чисел, а что $y_1 = ax_1 + b$ (точка B_1 на рис. 14). Наконец, возьмем еще одну точку графика (точка B_2) с координатами x_2 и $y_2 = ax_2 + b$.

Соединим попарно точки A, B_1 и A, B_2 прямыми. Надо показать, что линия AB_1B_2 — одна прямая, а для этого достаточно показать, что углы с вершиной в точке A, т. е. $\angle B_1AC_1$ и $\angle B_2AC_2$, равны между собой. Этот же факт выте-

кает из подобия треугольников B_1C_1A и B_2C_2A (в подобных треугольниках соответствующие углы равны).

Чтобы обосновать последнее утверждение, вспомним тот признак подобия треугольников, согласно которому треугольники подобны, если они имеют по равному углу и если стороны, заключающие эти углы, соответственно пропорциональны. Так как $\triangle AC_1B_1$ имеет прямой угол при вершине C_1, а $\triangle AC_2B_2$ имеет прямой угол при вершине C_2 (по самому построению координатной системы), то остается показать, что

$$B_1C_1 : C_1A = B_2C_2 : C_2A.$$

Но по построению и согласно уравнению $y = ax + b$

$$C_1A = x_1 - OA = x_1 - \left(-\frac{b}{a}\right) = x_1 + \frac{b}{a} = \frac{ax_1 + b}{a} = \frac{y_1}{a}$$

и, следовательно, для рассматриваемого отношения

$$B_1C_1 : C_1A = y_1 : \frac{y_1}{a} = a.$$

Точно так же

$$C_2A = x_2 - OA = x_2 - \left(-\frac{b}{a}\right) = x_2 + \frac{b}{a} = \frac{ax_2 + b}{a} = \frac{y_2}{a}.$$

Следовательно,

$$B_2C_2 : C_2A = y_2 : \frac{y_2}{a} = a,$$

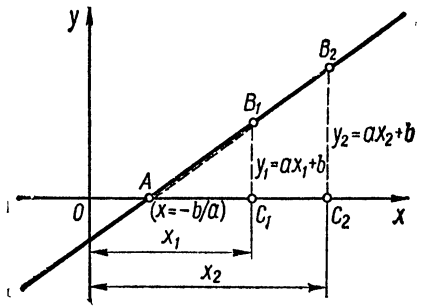


Рис. 14.

что и требовалось доказать.

Лишь теперь можно утверждать, что *графиком любой линейной функции*, т. е. функции вида

$$y = ax + b,$$

является прямая линия. Это обстоятельство очень упрощает построение графика линейной функции. Достаточно в любом случае вычислить только два значения этой функции y_1 и y_2, соответствующие двум значениям аргумента, которыми задаемся произвольно (x_1 и x_2), а затем через полученные две точки (x_1; y_1) и (x_2; y_2) провести прямую линию. Заметим, что эти две точки непрактично брать слишком близкими одна к другой (понижается точность построения) и что для контроля чертежа его проверяют еще по одной-двум дополнительно вычисленным точкам.

Упражнение. Построить график функции $y = 4x - 11$ и решить графически уравнение $4x - 11 = 0$, для чего надо только найти точку x_0, в которой построенная прямая пересекает ось абсцисс.

§ 4. Уравнение прямой линии

Из предыдущего параграфа следует, что с каждой линейной функцией связана вполне определенная прямая линия — ее график. Эта прямая делает наглядным ход изменения функции. Геометрия в этом случае помогает алгебре. Однако и алгебра может сослужить службу геометрии, если поменять роли функции и ее графика и идти не от функции к графику — линии, а от заданной линии к соответствующей ей функции, т. е. к функции, для которой данная линия является графиком. Поясним этот подход на примере все той же прямой линии, поставив такой вопрос: как найти функцию, для которой данная прямая является графиком, и всегда ли это возможно?

Рассмотрим частный случай, когда прямая проходит через начало координат (рис. 15). Затем все полученные результаты распространим на общий случай. Будем искать ту зависимость, которая существует между координатами каждой точки $M(x; y)$, лежащей на данной прямой. Возьмем ряд точек прямой $M(x; y)$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$, ... и рассмотрим треугольники OMN, OM_1N_1, OM_2N_2, OM_3N_3, ... Все эти треугольники подобны (что возможно лишь в том случае, когда рассматриваемая линия есть прямая), так что

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \ldots = k,$$

т. е. отношение их катетов постоянно для всякой точки $M(x; y)$, лежащей на нашей прямой. Обозначив эту постоянную буквой k, получаем необходимое условие

$$y = kx; \quad k = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (I.9)$$

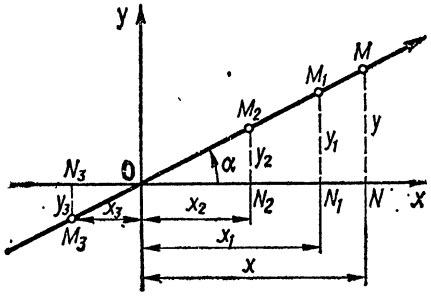


Рис. 15.

Но является ли это условие достаточным*, т. е. будут ли точки, координаты которых удовлетворяют условию (или уравнению) $y = kx$, лежать на одной и той же прямой?

Ответ на этот вопрос был дан в § 3: так как $y = kx$ есть частный случай линейной функции $y = ax + b$, то графиком ее является прямая, т. е. все точки, координаты которых связаны условием $y = kx$, лежат на одной и той же прямой, в данном случае на прямой, проходящей через начало координат.

Таким образом, условие (I.9) является одновременно необходимым и достаточным и может быть сформулировано так: *для того чтобы точка $M(x; y)$ лежала на данной прямой, необходимо и достаточно, чтобы координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяли условию (I.9).*

Подведем итог: *если прямая проходит через начало координат, то линейная функция $y = kx$ дает зависимость, существующую между координатами любой точки на прямой, и поэтому уравнение (I.9) называется уравнением прямой, проходящей через начало.*

С другой стороны, *всякое уравнение типа $y = kx$ может быть рассмотрено как уравнение прямой, проходящей через начало координат*, что и было подчеркнуто названием линейного уравнения.

§ 5. Уравнение с угловым коэффициентом. Формулы параллельного переноса координат

В уравнении (I.9) x и y являются координатами любой точки прямой, или, как их образно называют, *текущими координатами*, а величина $k = \operatorname{tg}\alpha$ характеризует прямую в целом, определяя угол ее наклона α к оси x. При этом, поскольку две прямые образуют между собой два разных угла, мы будем понимать под углом наклона α угол, образованный положительным направлением прямой (т. е. направлением, соответствующим росту x), как это показано на рис. 15 стрелкой, и осью x. Исследуем, как изменяется x с изменением угла α. Для этого начнем вращать прямую вокруг неподвижной точки O, уменьшая угол α, образованный прямой с положительным направлением оси x. Поскольку k не зависит от положения точки

* Не всякое необходимое условие является также и достаточным. Проиллюстрируем это на таком нематематическом примере. Необходимым условием возможности полета самолета является его исправность. Но этого еще не достаточно, надо самолет заправить горючим, маслом, надо иметь подходящие стартовое поле, метеорологические условия и т. д. Только наличие совокупности этих условий обеспечит возможность полета.

M на прямой, будем эту точку брать все время с одной и той же абсциссой x (рис. 16). Тогда по мере уменьшения угла α уменьшается и ордината y ($y_1 < y$), а с ней и $k = \frac{y}{x}$, так как x выбран постоянным. Когда прямая займет положение оси x, то y, а следовательно, и k обратятся в нуль. Продолжая вращение дальше, получим отрицательное k ($y_2 < 0$), и вместе с тем угол α также станет отрицательным. (Угол считают положительным, если он образован вращением прямой против часовой стрелки, и отрицательным — при вращении по часовой стрелке.)

Величина k, характеризующая наклон прямой, называется *угловым коэффициентом прямой* или ее *уклоном*. Численно угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}\alpha$, как это было отмечено в формуле (I.9).

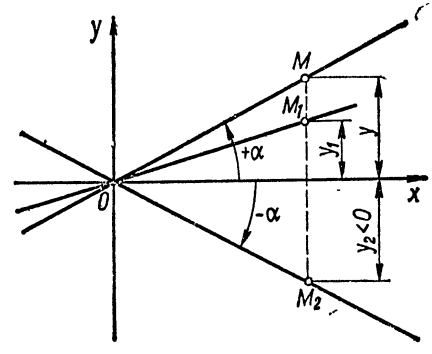


Рис. 16.

При этом определенному значению k отвечает одна единственная прямая, проходящая через начало. Вся же совокупность прямых, проходящих через начало координат и соответствующих всем возможным k, образует так называемый *пучок прямых*.

Нашим исследованием не охвачен случай, когда прямой является сама ось y. В этом случае $x = 0$ вдоль всей оси и $k = \frac{y}{x}$ теряет числовой смысл, обращаясь в бесконечно большую величину $k = \infty$. Но условие $x = 0$ является само по себе уравнением оси y.

С алгебраической (или, как чаще говорят, аналитической) точки зрения, функция $y = kx$ является функцией прямой пропорциональности, где k есть коэффициент пропорциональности. Это находится в полном соответствии с тем, что функция $y = kx$ есть уравнение прямой — общей стороны подобных треугольников (рис. 15).

На практике часто пользуются понятием уклона, для того чтобы охарактеризовать положение прямой, т. е. степень ее наклона к горизонтальной плоскости. Так, профиль пути (шоссейного или железнодорожного) можно полностью охарактеризовать указанием величины k и длиною участка, на котором k практически сохраняет постоянное значение. В пределах каждого такого участка путь считаем прямолинейным.

В качестве примера начертим профиль пути, определенный такими данными:

$k = 0{,}12$	на	участке	0 — 2,0 *км*
$k = 0{,}20$	»	»	2,0 — 3,2 *км*
$k = 0{,}05$	»	»	3,2 — 5,3 *км*
$k = 0$	»	»	5,3 — 7,2 *км*
$k = -0{,}17$	»	»	7,2 — 12,4 *км*
$k = 0{,}16$	»	»	12,4 — 15,0 *км*

Для того чтобы изобразить первый участок, т. е. провести прямую с уклоном $k = 0{,}12 = \frac{12}{100}$, откладываем от начала координат по оси x 100 произвольных единиц, в конце этого отрезка восставляем перпендикуляр высотою в 12 таких же единиц и полученную точку соединяем с началом. Другими словами, мы должны построить прямоугольный треугольник с катетами 100 и 12. Тогда его гипотенуза

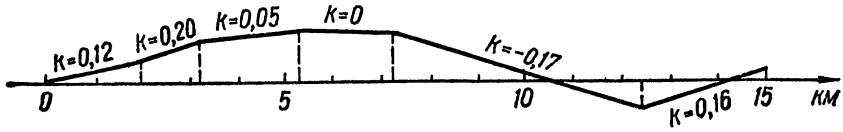


Рис. 17.

будет иметь уклон $k = 0{,}12$ по отношению к катету 100. Остальные участки строим аналогично. Весь профиль пути изображен на рис. 17, причем положительным значениям k соответствуют подъемы, а отрицательным k — спуски. При $k = 0$ путь идет горизонтально.

Упражнения

1. Определить k, если известно, что точка, которая продвинулась на 500 *м*, получила превышение над начальной точкой, равное 7, —5 и 13,2 *м*.

2. Вычертить профиль пути, для которого

$k = 0{,}18$	на участке	0 — 2 *км*
$k = 0$	» »	2 — 3 *км*
$k = -0{,}13$	» »	3 — 5 *км*
$k = 0$	» »	5 — 8 *км*
$k = 0{,}07$	» »	8 — 12 *км*

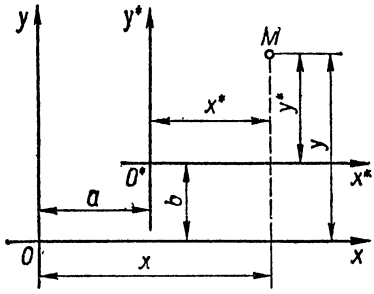


Рис. 18.

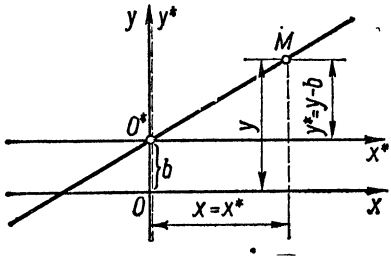


Рис. 19.

3. Начертить какой-либо профиль пути, состоящий из прямолинейных участков, а затем определить для каждого участка k, измерив на рисунке необходимые для этого величины.

Прежде чем переходить к общему случаю прямой, выведем необходимые для дальнейшего изложения формулы параллельного переноса координат*.

Примем в системе координат xOy, которую будем называть *старой системой*, какую-либо точку $O^*(a; b)$ за начало координат *новой системы* $x^*O^*y^*$, оси которой идут параллельно старым осям, и найдем, как связаны между собой координаты произвольной точки M, отсчитанные в старой xOy и новой $x^*O^*y^*$ системах (рис. 18).

Обозначим старые координаты точки $M(x; y)$, а новые снабдим звездочками $(x^*; y^*)$. Тогда согласно рис. 18 получаем

$$x = a + x^*, \quad y = b + y^*. \qquad \text{(I.10)}$$

Формулы (I.10) выражают старые координаты через новые при параллельном переносе осей координат в точку $(a; b)$. Решив их относительно новых координат

$$x^* = x - a, \quad y^* = y - b, \qquad \text{(I.11)}$$

получим формулы для определения новых координат по старым, где a и b, как и прежде, суть координаты нового начала в старой системе. Сформулируйте эти формулы словами.

Величины a и b могут быть как положительными, так и отрицательными, так что сложение и вычитание в формулах (I.10) и (I.11) следует понимать в алгебраическом смысле.

Упражнения

4. Написать формулы параллельного переноса для $a = -5$, $b = 3$.

5. Даны точки: (7; 2), (—5; — 10), (0; 3), (—2; 0) (7; —8), (4; 1). Найти их координаты в новой системе, для которой первая точка (7; 2) служит началом.

6. Найти расстояние между каждой парой точек в старой и новой системах. Изменится ли оно?

7. Решить задачу 2 § 2 и вывести формулу (I.2), воспользовавшись равенством (I.1) и формулами параллельного переноса координат.

* Более подробно формулы преобразования координат, одним из частных случаев которого является параллельный перенос осей, мы рассмотрим в § 18.

Рассмотрим общий случай, когда прямая отсекает на оси y какой-то отрезок b (рис. 19).

Примем точку пересечения прямой с осью y за начало координат новой системы. Координаты этого начала в старой системе будут (0; b). Ось x^* направим параллельно оси x, сохранив прежним положение оси ординат.

Отмечая звездочками текущие координаты прямой в новой системе, можем записать ее уравнение так:

$$y^* = kx^*.$$

Формулы перехода в нашем случае ($a = 0$, $b = b$) будут

$$x^* = x, \quad y^* = y - b.$$

Поэтому уравнение прямой в старой системе приобретает вид

$$y - b = kx,$$

или

$$y = kx + b. \tag{I.12}$$

Это и есть уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Обратите внимание на то, что преобразование параллельного переноса не изменило величины k (коэффициента при x), чему соответствует вполне очевидный геометрический факт: параллельный перенос не изменяет угла наклона. Величина b, как мы уже видели, есть отрезок, отсекаемый на оси y прямой. Если $x = 0$, то $y = b$, поэтому b можно назвать *начальной ординатой*.

Если в уравнении (I.12) зафиксировать k, т. е. сохранять его постоянным, а b придавать всевозможные значения, то получим систему прямых, параллельных между собой, с одним и тем же уклоном k (рис. 20). Такую систему называют *пучком параллельных прямых*.

Таким образом, положение прямой на плоскости можно полностью определить ее уклоном k и точкой оси y, через которую прямая проходит. Последнюю задаем начальной ординатой b. Для данной прямой k и b постоянны и называются в силу этого *параметрами*, т. е. характеристиками прямой. Величины же x и y являются переменными — текущими координатами точек прямой.

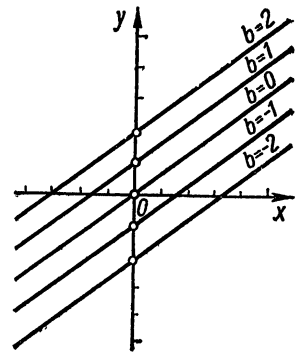


Рис. 20.

Упражнения

8. Определить, какой отрезок на оси y отсекает прямая $y = 3x + 7$.

9. Написать уравнение прямой, для которой $k = 5$, $b = -2$; $k = \frac{1}{2}$, $b = 12$.

§ 6. Общее уравнение прямой

Уравнение $y = kx + b$ имеет один недостаток. Оно не охватывает собой уравнение оси ординат $x = 0$ и, следовательно, всех прямых, параллельных этой оси, $x = a$, где a — некоторая постоянная величина (расстояние прямой до оси ординат). Этот недостаток можно устранить, перейдя к обратной функции, т. е. решив наше уравнение относительно x:

$$x = \frac{1}{k}(y - b).$$

Теперь роль аргумента играет y, а x является функцией, и когда угловой коэффициент $\frac{1}{k}$ будет равен нулю, мы получим уравнение прямой $x = 0$, т. е. уравнение оси ординат. Но при этом снова выпадут из рассмотрения прямые,

параллельные оси абсцисс, и сама ось абсцисс. Причина этого кроется в том, что роли x и y в каждом из приведенных уравнений различны, в то время как геометрически обе координаты совершенно равноправны.

Таким образом, мы либо должны рассматривать оба уравнения $y = kx + b$ и $x = \frac{1}{k}(y - b)$ одновременно, либо рассматривать уравнение первой степени с двумя неизвестными в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{I.13}$$

где A, B, C — постоянные величины, не равные нулю все одновременно.

Это уравнение охватывает собой обе формы уравнений с угловым коэффициентом, т. е. представляет все без исключения прямые на плоскости. Действительно, если $B \neq 0$, то, решив (I.13) относительно y

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначив в нем

$$-\frac{A}{B} = k; \quad -\frac{C}{B} = b; \quad B \neq 0, \tag{I.14}$$

мы сведем уравнение в общем виде к уравнению с угловым коэффициентом

$$y = kx + b.$$

При $B = 0$ в уравнении (I.13) y может быть совершенно произвольным, так как его влияние на уравнение уничтожается (аннулируется) коэффициентом $B = 0$. Следовательно, уравнение в общем виде при $B = 0$ принимает вид $Ax + C = 0$, или

$$x = -\frac{C}{A} = a,$$

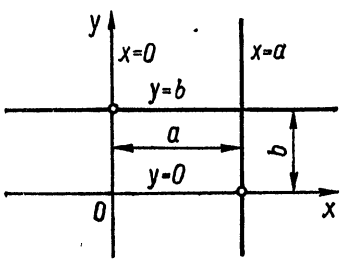


Рис. 21.

т. е. представляет прямую, идущую параллельно оси y на расстоянии a от нее (рис. 21). Если, кроме того, $C = 0$ (тогда и $a = 0$), то мы получаем уравнение оси y, на которой всюду $x = 0$.

Как видим, случаи, не охваченные уравнением $y = kx + b$, получаются из общего уравнения при частных допущениях относительно его коэффициентов.

Аналогично при $A = 0$ получаем

$$y = -\frac{C}{B} = b,$$

т. е. прямую, параллельную оси x и идущую на расстоянии b от нее, а $y = 0$ есть уравнение оси абсцисс. При $C = 0$ имеем $Ax + By = 0$, или

$$y = -\frac{A}{B}x = kx,$$

и мы приходим к рассмотренному выше уравнению прямой, проходящей через начало.

Упражнения

1. Начертить прямые: $x = 7$; $y = 3x$; $y = -2$.
2. Написать уравнение оси y; прямой, идущей параллельно оси x на расстоянии пяти единиц от нее.

В общем случае, если надо построить прямую, заданную уравнением $Ax + By + C = 0$, прежде всего определяем для нее k и b согласно формулам (I.14).

После этого можно провести через точку $(0; b)$ прямую с уклоном, соответствующим найденному k. Все построение выполняется угольником и линейкой.

Можно построить прямую при помощи одной только линейки, так как прямая определяется двумя точками, и вопрос сводится к построению таковых. Координаты же точек прямой легко определить, задавшись каким-либо значением одной из координат и вычислив из уравнения прямой вторую координату.

Пример. Построить прямую, заданную в общем виде

$$8x + 5y - 20 = 0.$$

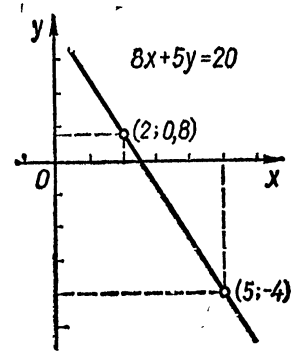


Рис. 22.

Решение. Пусть $x = 2$, тогда

$$8 \cdot 2 + 5y - 20 = 0,$$

откуда соответствующая выбранному x ордината

$$y = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Следовательно, одна точка нашей прямой будет (2; 0,8).

Для определения второй точки можно взять либо иной x, либо какой-то y. Возьмем, например, $y = -4$. Тогда

$$8x - 5 \cdot 4 - 20 = 0$$

и $x = 5$, т. е. вторая искомая точка (5; —4). Наносим эти точки и соединяем их прямой (рис. 22).

Упражнения

3. Построить следующие прямые:
а) $3x + 4y - 12 = 0$; б) $7x - 5y - 15 = 0$; в) $-x + 3y + 8 = 0$; г) $y = -0{,}5x + 6$; д) $y = x$; е) $y = -2x - 3$.

4. Определить угловой коэффициент k и начальную ординату b прямых:
а) $-8x + 4y - 15 = 0$; б) $7x - 2y - 8 = 0$.

Указание. Заданные уравнения надо привести к виду (I.12).

5. Не вычерчивая прямых

$$-3x + 5y - 10 = 0,$$
$$3x + 5y - 10 = 0,$$

определить примерно, как они расположены на плоскости.

Указание. Привести уравнения к виду с угловым коэффициентом (I.12).

§ 7. Уравнение прямой в отрезках

Прямую линию по ее уравнению можно строить более экономным способом, если воспользоваться тем, что одну из координат можно выбирать произвольно. Действительно, принимая для первой точки $x = 0$, из уравнения

$$Ax + By + C = 0$$

находим $y = -\frac{C}{B}$. Далее положим $y = 0$ и находим $x = -\frac{C}{A}$ — координаты второй точки. Обе эти точки лежат на осях и поэтому величины

$$a = -\frac{C}{A}; \quad b = -\frac{C}{B} \tag{I.15}$$

называются *отрезками*, отсекаемыми прямой на осях. Отложив на осях найденные отрезки, проводим прямую NP (рис. 23).

Отрезки на осях могут быть приняты в качестве параметров прямой, т. е. величин, которые своими числовыми значениями характеризуют и выделяют одну

определенную прямую из множества всевозможных прямых. Для этого возьмем уравнение в общем виде (I.13) и, разделив его на $-C$ (считая, что $C \neq 0$), получим

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1.$$

Но из определения отрезков (I.15) следует, что $-\frac{A}{C} = \frac{1}{a}$; $-\frac{B}{C} = \frac{1}{b}$, так что уравнение примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{I.16}$$

известный как *уравнение в отрезках.*

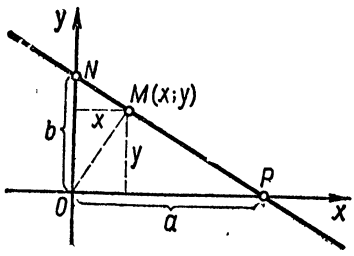


Рис. 23.

Уравнение (I.16) можно вывести и непосредственно, геометрическим путем. Для этого найдем связь текущих координат $(x; y)$ произвольной точки M прямой с параметрами a и b, рассмотрев площадь S треугольника NPO (рис. 23). Как площадь прямоугольного треугольника, она равна полупроизведению катетов:

$$S = \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны, эту же площадь можно выразить через x и y. Для этого разобьем наш треугольник на два треугольника линией OM. Для треугольника OMP отрезок a будет основанием, а y — высотой; для треугольника NMO соответственно основанием будет отрезок b, а высотой — x. Тогда

$$S_{\triangle NOM} = \frac{bx}{2}; \quad S_{\triangle OMP} = \frac{ay}{2},$$

а так как $S_{\triangle NOM} + S_{\triangle OMP} = S_{\triangle NPO}$, то получаем

$$\frac{bx}{2} + \frac{ay}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Отбросив общий знаменатель и разделив все уравнение на ab, мы и приходим к уравнению (I.16). Но при геометрическом выводе параметры a и b, как стороны треугольника, могут быть только положительными, а поэтому надо еще доказать справедливость полученного уравнения для всех возможных $a \gtrless 0$, $b \gtrless 0$, чего вовсе не требует вывод аналитический, где a и b — любые действительные числа, знак которых зависит от того, в какую сторону от начала координат откладываются отрезки a и b.

Пример. Написать уравнение прямой, отсекающей на осях отрезки $a = -3$; $b = 4$.

Решение. Подставляем в формулу (I.16) данные значения a и b и получаем

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Упражнения

1. Определить отрезки на осях, отсекаемые прямой

$$4x - 5y - 20 = 0,$$

и записать ее в виде (I.16).

2. Написать уравнение прямой, для которой $a = -2$, $b = -3$. Привести его затем к виду с угловым коэффициентом и определить k и b.

§ 8. Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Выведем еще два важных вида уравнения прямой, часто встречающиеся при решении задач аналитической геометрии, а именно: уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку $M_1(x_1; y_1)$, и уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Первое уравнение получим, исключив b из уравнения прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b.$$

Точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой, следовательно,

$$y_1 = kx_1 + b.$$

Вычтя из первого равенства второе, находим

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{I.17}$$

т. е. уравнение всех прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$. Совокупность всех этих прямых и образует искомый пучок. Неопределенный параметр k, который входит в уравнение пучка, меняет свое численное значение при переходе от одной прямой пучка к другой, так что, задав k, мы выделяем из этого пучка одну определенную прямую.

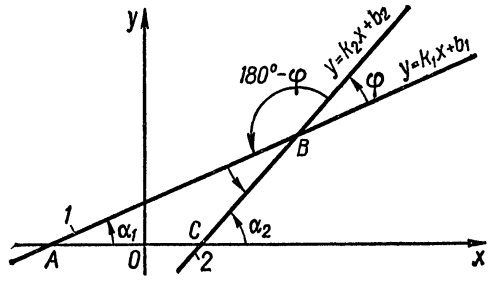


Рис. 24.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, получим из пучка, проходящего через точку $M_1(x_1; y_1)$, уравнение которого

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Так как точка $M_2(x_2; y_2)$ принадлежит искомой прямой, то

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Разделив первое уравнение на второе, исключим k:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{I.18}$$

и тем самым выделим из пучка одну прямую, проходящую через вторую данную точку M_2.

Уравнение (I.18), так же как и уравнение в отрезках (I.16), есть частный случай общего уравнения прямой (I.13). Если $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, то формула (I.18) теряет смысл, так как делить на нуль нельзя. В этих случаях точки M_1 и M_2 лежат либо на прямой, параллельной оси Oy, либо на прямой, параллельной оси Ox. В первом случае уравнение прямой запишется в виде

$$x = x_1,$$

а во втором — в виде

$$y = y_1.$$

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3; -2)$ и $M_2(-5; -4)$.

Решение. Имеем

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -5, \quad y_1 = -2, \quad y_2 = -4.$$

Подставив эти значения в уравнение (I.18), получим

$$\frac{y+2}{-4+2}=\frac{x-3}{-5-3},$$

или после очевидных упрощений

$$x-4y-11=0.$$

Пример 2. Через две точки M_1 (3; —7) и M_2 (3; 8) проходит прямая. Написать ее уравнение.

Решение. Так как абсциссы точек M_1 и M_2 равны, то искомая прямая параллельна оси Oy и ее уравнение будет $x=3$.

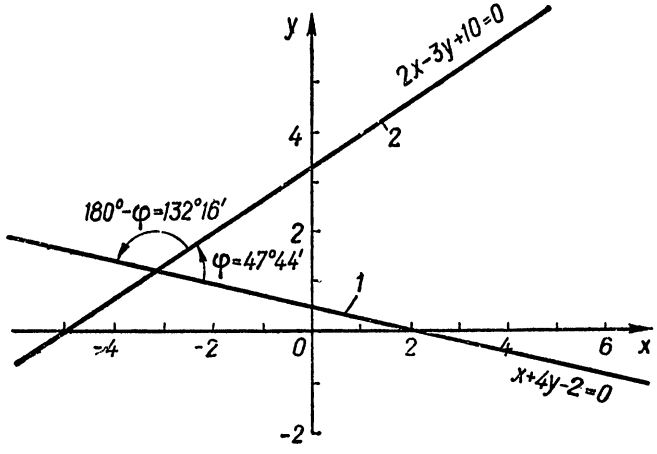


Рис. 25.

Выведем условие, при котором три заданные точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой. Для этого надо только подставить в уравнение (1.18) координаты третьей точки, так как она по условию должна лежать на прямой, проходящей через точки M_1 и M_2. В таком случае имеем

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1},$$

или

$$(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=0.$$

Переходя к определителю второго порядка, мы и получаем условие того, что три заданные точки лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad \text{(I.19)}$$

Формула (I.19) выражает также то, что площадь «треугольника» $M_2M_3M_1$ равна нулю (см. § 2).

Пример 3. Проверить, лежат ли на одной прямой точки:

а) $M_1(3; -2)$, $M_2(-1; 4)$, $M_3(5; -5)$;

б) $M_1(3; -2)$, $M_2(-1; 4)$, $M_3(5; 6)$.

Решение. Так как для первых трех точек

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (-1-3) & (4+2) \\ (5-3) & (-5+2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=$$

$$=(-4)\cdot(-3)-2\cdot 6=0,$$

то они лежат на одной прямой. Аналогичная проверка для случая б) дает

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-1-3) & (4+2) \\ (5-3) & (6+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -32 - 12 = -44 \neq 0$$

и, следовательно, эти три точки на одной прямой не лежат.

Упражнения

1. Провести пучок прямых через точку M (2; 7) и выделить из него: прямую, для которой $k = \frac{1}{2}$; прямую, идущую параллельно оси x ($k = 0$); прямую, проходящую через точку M_2 (5; 13).

2. Написать уравнения прямых, проходящих через точки

$$\begin{cases} M_1(3; 4), \\ M_2(1; 5), \end{cases} \quad \begin{cases} M_1(0; -2), \\ M_2(-3; -5), \end{cases} \quad \begin{cases} M_1(0; 2), \\ M_2(3; 5). \end{cases}$$

3. Определить, чему равен угловой коэффициент k прямой (I.18).

4. Определить, лежат ли на одной прямой точки M_1 (4; 3), M_2 (—2; 5), M_3 (16; —1).

§ 9. Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые *1* и *2* заданы уравнениями

$$y = k_1 x + b_1,$$
$$y = k_2 x + b_2.$$

Обозначим соответственно через α_1 и α_2 углы наклона этих прямых к оси Ox (рис. 24).

Углом φ между прямыми *1* и *2* называют угол, на который надо повернуть прямую *1* в положительном направлении, чтобы она совпала с прямой *2*. Аналогично определяется угол между прямой *2* и прямой *1*, и на рис. 24 он будет равен углу $180° - \varphi$.

Угол α_2, как внешний угол треугольника ABC, равен сумме внутренних углов, с ним не смежных: $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$.

Отсюда

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (\varphi \neq 90°),$$

и тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1),$$

поскольку тангенсы равных углов равны между собою.

Воспользовавшись формулой для тангенса разности двух углов, получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2},$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \tag{I.20}$$

так как согласно (I.9)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2.$$

Определив по формуле (I.20) $\operatorname{tg} \varphi$, при помощи таблиц находим и сам угол φ.

Пример 1. Найти угол между прямыми $y = \frac{1}{2} x - 5$ и $y = 3x + 7$.

Решение. В данном случае $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 3$, так что, подставив эти значения в формулу (I.20), находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1; \quad \varphi = \operatorname{arctg} 1 = 45°.$$

Таким образом, угол между прямыми *1* и *2* равен 45°, а дополнительный к нему (т. е. угол между прямыми *2* и *1*) равен 135°.

Пример 2. Найти угол между прямыми *1* и *2*, заданными уравнениями в общем виде (рис. 25):

$$x + 4y - 2 = 0,$$
$$2x - 3y + 10 = 0.$$

Решение. Приведем каждое из заданных уравнений к виду уравнения с угловым коэффициентом, решив их относительно y:

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}; \quad y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}.$$

В таком случае $k_1 = -\frac{1}{4}$, $k_2 = \frac{2}{3}$ и согласно формуле (I.20) имеем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{2}{3 \cdot 4}} = \frac{\frac{8+3}{12}}{\frac{12-2}{12}} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$$

Следовательно,

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1{,}1 = 0{,}8330 \text{ рад} = 47{,}73° = 47° 44',$$
$$180° - \varphi = 132° 16'.$$

Упражнения

1. Найти угол между прямыми $3x + y - 5 = 0$ и $y = 2x + 4$.
2. Даны прямые $2x - 3y + 7 = 0$ и $x + 2y - 3 = 0$. Найти угол между ними Изменится ли величина этого угла, если в заданных уравнениях изменить значения свободных членов $C_1 = 7$ и $C_2 = -3$, взяв, например, $C_1 = -5$ и $C_2 = +8$?

§ 10. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

Прямые параллельны в том и только в том случае, если равны тангенсы углов наклона их к оси Ox, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

или

$$k_1 = k_2. \tag{I.21}$$

Итак, *условие параллельности прямых заключается в равенстве их угловых коэффициентов.*

Условие (I.21) можно также получить непосредственно из формулы (I.20). Действительно, если прямые параллельны, то $\varphi = 0$ и, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, что возможно только тогда, когда

$$k_1 - k_2 = 0.$$

Две заданные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол φ между ними равен 90°, т. е. когда $\operatorname{tg}\varphi$ принимает бесконечно большое значение ($\operatorname{tg}\varphi = \infty$). В этом случае знаменатель правой части формулы (I.20) обращается в нуль и мы имеем $1 + k_1k_2 = 0$. Следовательно, признаком перпендикулярности двух прямых является соотношение

$$k_1k_2 = -1.$$

Последнее соотношение обычно пишут в виде

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad (k_1 \neq 0) \tag{I.22}$$

и, в соответствии с этим, условие перпендикулярности двух прямых формулируют так: *угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Применяя признаки (I.21) и (I.22), можно сказать, что, например, прямые $y = \frac{5}{8}x - 7$, $y = -\frac{8}{5}x + 4$ перпендикулярны друг к другу, а прямые $y = \frac{3}{5}x + 12$, $y = \frac{3}{5}x - 8$ между собой параллельны.

Если прямые заданы своими уравнениями в общем виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то условие их параллельности принимает следующий вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{I.23}$$

а условие перпендикулярности

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{B_2}{B_1}. \tag{I.24}$$

Докажите это, приведя заданные уравнения к виду (I.12) и воспользовавшись затем условиями (I.21) и (I.22). Сформулируйте условия (I.23) и (I.24) словами.

Пример 1. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $2x - 5y - 8 = 0$ и проходящей через точку (3; —1).

Решение. Уравнение пучка прямых (I.17), проходящих через точку (3; —1), имеет вид

$$y + 1 = k(x - 3).$$

Так как по условию искомая прямая параллельна прямой $2x - 5y - 8 = 0$, то ее угловой коэффициент должен быть равен угловому коэффициенту этой прямой, т. е. $\frac{2}{5}$. Поэтому, полагая в уравнении пучка $k = \frac{2}{5}$, мы и получим искомое уравнение

$$y + 1 = \frac{2}{5}(x - 3),$$

или

$$2x - 5y - 11 = 0.$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (—2; 3) перпендикулярно к прямой $-5x + 7y + 2 = 0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой есть $\frac{5}{7}$. Следовательно, согласно условию (I.22) угловой коэффициент искомой прямой равен $k = -\frac{7}{5}$. Воспользовавшись формулой пучка прямых (I.17) и подставив в нее координаты заданной точки (—2; 3) и $k = -\frac{7}{5}$, получаем искомое уравнение

$$y - 3 = -\frac{7}{5}(x + 2), \text{ или } 7x + 5y - 1 = 0.$$

Пример 3. Треугольник ABC задан координатами своих вершин A(—1; —3), B(7; 1), C(2; 5). Найти уравнение высоты, опущенной из вершины C.

Решение. Уравнение стороны AB как прямой, проходящей через точки A(—1; —3) и B(7; 1), согласно формуле (I.18) будет

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ или } \frac{y + 3}{1 + 3} = \frac{x + 1}{7 + 1},$$

а ее угловой коэффициент (обозначим его k_1)

$$k = k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+3}{7-1} = \frac{1}{2}.$$

В таком случае угловой коэффициент $k = k_2$ искомой высоты, которая перпендикулярна к стороне AB, согласно условию (I.22)

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -2$$

и, следовательно, уравнение этой высоты как прямой, проходящей через точку $C(2; 5)$,

$$y - 5 = k(x - 2) = -2(x - 2),$$

или

$$2x + y - 9 = 0.$$

Упражнения

1. Параллельны ли прямые:
а) $3x - 4y - 12 = 0$ и $6x - 8y - 7 = 0$,
б) $5x - 7y = 0$ и $10x + 14y - 3 = 0$,
в) $y - 2x - 5 = 0$ и $6x - 3y - 8 = 0$?
Дать аналитическое и графическое решения.

2. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок $a = 4$, и параллельной прямой $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$.

3. В равнобедренном прямоугольном треугольнике известно уравнение гипотенузы $2x - 5y = 17$ и вершина прямого угла $C(-3; 7)$. Написать уравнения катетов.

§ 11. Пересечение двух прямых

Рассмотрим две прямые, заданные своими уравнениями в общем виде

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (I.25)$$

и найдем координаты точки пересечения этих прямых.

Так как искомая точка лежит одновременно на каждой из данных прямых, то координаты ее должны удовлетворять обоим данным уравнениям. Следовательно, решив систему (I.25), мы найдем координаты точки их пересечения:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}} = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}} = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \qquad (I.26)$$

Для того чтобы система (I.25) имела одно единственное решение, ее определитель $\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}$ не должен равняться нулю. Если же

$$\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

то прямые (I.25) согласно условию (I.23) параллельны, и в этом случае они не пересекаются. Если, кроме того, и свободные члены уравнений (I.25) пропорциональны (с тем же коэффициентом пропорциональности), т. е.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\ (A_2\neq 0,\ B_2\neq 0,\ C_2\neq 0), \tag{1.27}$$

то, полагая это отношение равным q, получим:

$$A_1=qA_2;\ B_1=qB_2;\ C_1=qC_2.$$

Тогда, подставив эти результаты в первое уравнение системы (I.25) и вынося общий множитель q за скобки, имеем:

$$A_1x+B_1y+C_1=q\,(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Сократив полученное уравнение на q, видим, что оба уравнения (I.25) равносильны, и, следовательно, в этом случае обе параллельные прямые совпадают, так что система (I.25) имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, условие (I.27) является необходимым и достаточным условием того, чтобы две прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2=0$$

слились в одну. Если же выполняется только условие (I.23), т. е.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2},$$

то прямые параллельны, но не совпадают между собой.

Пример 1. Найти точку пересечения прямых

$$6x-y-15=0$$

и

$$5x+3y-1=0.$$

Решение. Умножая первое уравнение на 3 и складывая его почленно со вторым, получаем $23x-46=0$, откуда $x=2$. Подставляя найденное значение x в первое уравнение, находим $y=-3$ и, следовательно, искомая точка есть $(2;-3)$. Этот же результат получим, подставив в формулы (I.26) $A_1=6$, $B_1=-1$, $C_1=-15$; $A_2=5$, $B_2=3$, $C_2=-1$.

Пример 2. Найти точку пересечения прямых

$$5x-4y-9=0$$

и

$$10x-8y-3=0.$$

Решение. Умножив все члены первого уравнения на -2 и сложив полученное уравнение со вторым, имеем

$$\begin{array}{r} -10x+8y+18=0 \\ +\ 10x-8y-3=0 \\ \hline 15=0, \end{array}$$

т. е. невозможное равенство. Таким образом, рассматриваемая система уравнений несовместна и поэтому решений не имеет. Следовательно, прямые, определяемые этими уравнениями, не имеют общих точек, т. е. они параллельны.

Этот же результат получим, убедившись, что для заданных прямых удовлетворяется условие (I.23), так как в данном случае $A_1=5$, $B_1=-4$, $A_2=10$, $B_2=-8$ и, следовательно,

$$A_1:A_2=B_1:B_2=2.$$

Пример 3. Найти точку пересечения прямых

$$3x-y+5=0$$

и

$$9x-3y+15=0.$$

Р е ш е н и е. В данном случае выполняется условие (I.27) и рассматриваемая система сводится к одному уравнению, а поэтому имеет бесконечное множество решений: давая произвольные значения одному из неизвестных x или y и вычисляя соответствующие значения другого неизвестного, мы получим сколько угодно решений данной системы уравнений.

Такая система уравнений называется *неопределенной.*

П р и м е р 4. Треугольник $M_1M_2M_3$ задан координатами своих вершин M_1 (5; 6), M_2 (1; 2); M_3 (7; 4). Найти точку пересечения его медиан.

Р е ш е н и е. Координаты точки, делящей отрезок M_2M_3 пополам, согласно формулам (I.4) будут

$$x = \frac{1+7}{2} = 4; \quad y = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Поэтому уравнение медианы, проходящей через вершину M_1, найдем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: M_1 (5; 6) и точку (4; 3):

$$\frac{x-5}{4-5} = \frac{y-6}{3-6}, \text{ или } 3x - y - 9 = 0.$$

Аналогично для медианы, проходящей через вершину M_2, получаем уравнение $3x - 5y + 7 = 0$. Решив теперь систему

$$\left.\begin{aligned} 3x - y - 9 &= 0, \\ 3x - 5y + 7 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

находим координаты искомой точки

$$x = 4^1/_3; \; y = 4.$$

Проверьте, что через эту же точку пройдет и третья медиана (уравнение которой $y = 4$), как и должно быть, поскольку все три медианы пересекаются в одной точке. Далее, воспользовавшись формулами (I.3) и (I.3′), проверьте также, что точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от вершины).

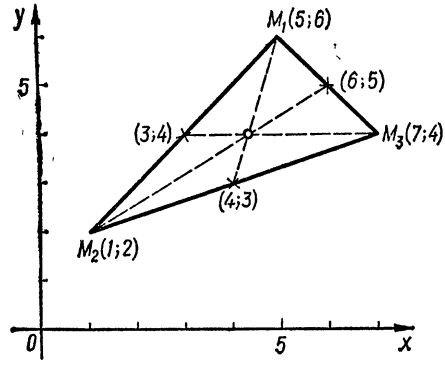


Рис. 26.

Полученные результаты представлены на рис. 26. Однако подчеркнем, что рисунок мы привели только для наглядности, само же решение было получено по формулам (т. е. аналитически) и обращаться к рисунку не было необходимости.

Решив рассмотренный пример в общем виде (что читателю полезно выполнить в качестве упражнения), найдем для координат точки пересечения медиан следующие формулы*:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \tag{I.28}$$

где $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_3(x_3; y_3)$ суть вершины заданного треугольника.

Упражнения

1. Найти точку пересечения каждой из следующих пар прямых:

а) $3x - 5y + 10 = 0$ и $2x + 7y - 8 = 0$,

б) $3x - 5y + 4 = 0$ и $6x - 10y - 15 = 0$,

в) $-7x + 2y - 12 = 0$ и $4x - 11y + 13 = 0$.

* Эта точка совпадает с центром тяжести треугольника, точнее, треугольной пластины постоянной толщины, вырезанной из однородного материала.

2. Треугольник $M_1M_2M_3$ задан координатами своих вершин M_1 (—3; 4), M_2 (4; 3), M_3 = (0; —5). Определить точку пересечения перпендикуляров, проходящих через середины сторон, а затем вычислить по формуле (I.2) радиус описанной окружности и построить для наглядности рисунок (лучше всего на миллиметровой бумаге).

§ 12. Некоторые задачи, решаемые при помощи уравнения прямой линии

Многие практические задачи, в которых исследуемые функции на заданном интервале с достаточной для практики точностью представимы линейными функциями, можно решать при помощи уравнения прямой. При этом, в отличие от предыдущих параграфов, рассмотрим также более общий случай, когда искомую функцию можно представить ломаной линией, состоящей из нескольких отрезков прямых. Не входя в подробности, ограничимся только двумя характерными задачами, предоставив остальное самостоятельной работе читателя.

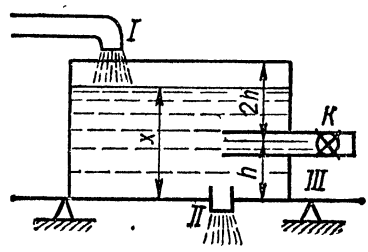


Рис. 27.

Задача 1. Вода вливается в бассейн через трубу *I* со скоростью 3 единицы в час. По трубе *II* вода вытекает со скоростью 2,4 единицы в час. На высоте h от дна бассейна помещена труба *III* с пропускной способностью 1,6 единицы в час, перекрываемая краном K и работающая только 8 часов в сутки (рис. 27). Глубина бассейна $3h$. Требуется исследовать режим уровня воды x в бассейне, т. е. выразить x как функцию времени t.

Решение. Режим работы бассейна можно охарактеризовать двумя периодами: первым — при открытом кране K (8 часов) и вторым — при закрытом кране K (16 часов).

Допустим, что кран K открывают в момент, когда бассейн полон ($x = 3h$; $t = 0$). Тогда в первый период

$$x = 3h + 3t - 2{,}4t - 1{,}6t = -t + 3h,$$

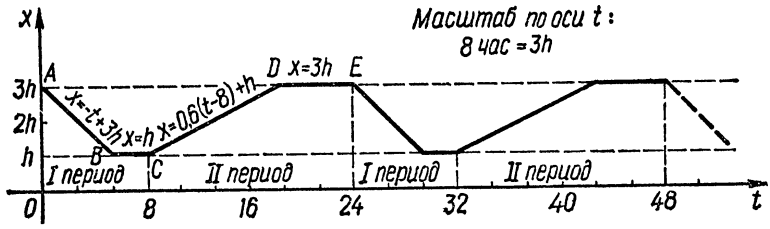


Рис. 28.

до $x = h$, т. е. до тех пор, пока x не достигнет уровня h. Начиная с этого момента, для всего остального времени первого периода установится так называемое динамическое равновесие, так как при $x < h$ действуют только трубы *I* и *II* и приток больше расхода, а при $x > h$ действуют все три трубы и приток меньше расхода.

По прошествии восьми часов выключаем трубу *III*. Начинается второй период:

$$x = h + 3(t - 8) - 2{,}4(t - 8) = 0{,}6(t - 8) + h,$$

до $x = 3h$.

Выше $3h$ уровень подняться не может, так как вода польется через край.

Представим все это графически (рис. 28). По этому графику мы можем в любой момент времени t определить, каков уровень воды x в бассейне.

С аналогичной задачей столкнулись проектировщики Ново-Краматорского машиностроительного завода имени В. И. Ленина.

Завод, потреблявший огромное количество воды, надо было снабжать от небольшой реки, притока Донца. Для того чтобы «утолить жажду» этого гиганта первой пятилетки в часы его полной нагрузки, на реке надо было установить плотину для круглосуточного сбора воды, т. е. соорудить «бассейн» (рис. 29), в котором: труба *I* — количество воды, приносимое течением реки, труба *II* — потери воды на просачивание (фильтрацию) в грунте под плотиною и круглосуточное обслуживание основных цехов завода, труба *III* — увеличение расхода воды заводом при работе на полную мощность в первую смену. (Высота h необходима для того, чтобы водоотсосные трубы не засасывали ил.)

Из графика режима реки (рис. 28) замечаем два возможных неприятных момента. В первом периоде, начиная с момента, отвечающего точке B, начинает не хватать воды, а во втором периоде от точки D происходит бесполезный сброс воды через плотину.

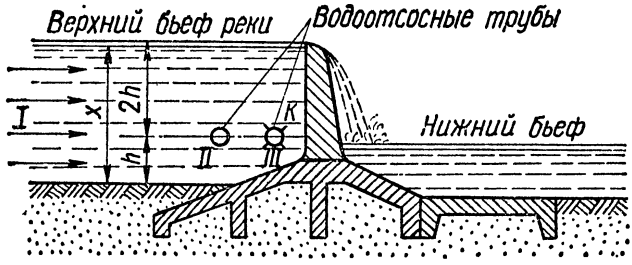


Рис. 29.

Найдем, насколько надо увеличить высоту плотины, чтобы обеспечить восьмичасовую работу по первому периоду, т. е. чтобы устранить горизонтальную ступеньку графика BC.

Для этого надо через точку C провести прямую, параллельную отрезку AB, и определить начальную ординату b этой прямой.

Уравнение любой прямой, параллельной прямой $x = -t + 3h$, будет иметь тот же угловой коэффициент $k = -1$, т. е. его вид будет

$$x = -t + b.$$

Но по условию эта прямая должна пройти через точку $C(8; h)$ и, следовательно, $8 = -h + b$; отсюда $b = 8 + h$. На рис. 28 принят масштаб $3h = 8$ единицам по оси t, так что $b = 8 + h = 3h + h = 4h$. Следует отметить, что при некотором соотношении между притоком воды и ее расходом для каждого данного отношения продолжительности первого и второго периодов задача не имеет решения. (Найдите это соотношение для данной задачи.)

Если природные условия в этом смысле неблагоприятны, решение ищут путем искусственного увеличения стока реки, как это имело место, например, для Москвы-реки (сооружение канала им. Москвы). Вторым аналогичным примером является проблема обмеления Каспийского моря, для решения которой в качестве одного из вариантов рассматривают переброс части стока северных рек — Вычегды и Печоры — в бассейн реки Волги.

Упражнения

1. Определить начало сброса воды (точку D) при высоте плотины $b = 4h$ (рис. 28).

2. Определить максимально достижимый уровень воды (при достаточно высокой плотине) за весь второй период.

3. Сколько времени может работать завод на полную мощность при этом запасе воды?

Задача 2. Станции A и B (расстояние 28 *км*) соединены одноколейной железной дорогой. В 10 *км* от A находится полустанок P. Из A в B отправляется почтовый поезд ($t = 10^{40}$; $v = 50$ *км/час*) с трехминутной остановкой в P.

Двумя минутами позже в A прибывает скорый поезд ($v = 60$ *км/час*). Через сколько минут он должен отправиться, чтобы обогнать почтовый именно на полустанке P?

Кроме того, из B в A с остановкой в P (для пропуска почтового и скорого) следует товарный поезд ($v = 54$ *км/час*).

Построить график движения.

Решение. Задачу решаем графически. Вводим среднюю скорость поездов, пренебрегая изменениями ее при отходе и прибытии поездов и во время пути.

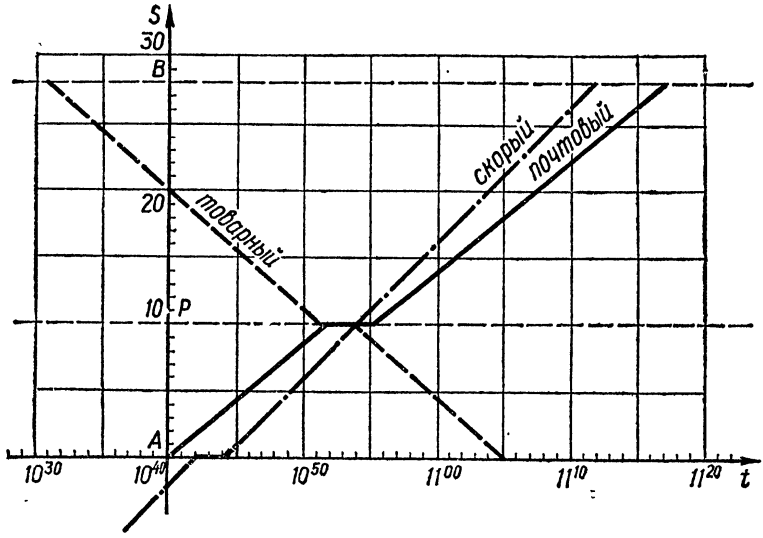


Рис. 30.

Прежде всего построим график движения почтового поезда, о котором все известно, в системе координат (t; s) — время, путь.

Время t измеряем в минутах, расстояние s — в километрах, скорость $v = \frac{s}{t}$ — в *км/мин*. За начало отсчета t примем момент $t = 10^{40}$.

Для почтового поезда $\left(v = 50 \text{ км/час} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \text{ км/мин}\right)$ имеем (рис. 30):

на перегоне AP $s = \frac{5}{6}t$,

на полустанке P $s = 10 = \text{const}$ в течение 3 *мин*,

на перегоне PB $s = 10 + \frac{5}{6}(t - 3)$.

Для графика скорого поезда $s = v(t - t_0)$ нам известно $v = 60$ *км/час* $=$ $= 1$ *км/мин*; остается определить t_0. Определим t_0 из условия, что встреча скорого с почтовым должна произойти на полустанке P.

Если бы она произошла на перегоне AP или PB, то при одноколейной железной дороге это была бы не встреча, а катастрофа. Итак, точкой встречи может быть только какая-либо точка на горизонтальной части графика почтового.

Назначим время прохождения через полустанок P скорого поезда в 10^{54} (на 2 минуты позже прибытия почтового). Теперь мы имеем все данные для определения t_0:

$$t = 10^{54} - 10^{40} = 14'; \; v = 1 \; км/мин; \; s = 10 \; км.$$

Внося их в уравнение движения, получаем

$$10 = 1 \cdot (14' - t_0); \; t_0 = 4'$$

и, следовательно, время отправления скорого поезда со станции A будет $10^{40} + 4' = 10^{44}$.

Товарный поезд к моменту прохождения скорого должен уже прибыть в P, для того чтобы перегон BP был свободен. Для учета возможных ошибок движения назначим время его прибытия в P на 3 минуты раньше прибытия скорого (10^{54}), т. е. для товарного поезда имеем

$$v = 54 \; км/час = 0{,}9 \; км/мин; \; s = BP = 18 \; км; \; t = 10^{51} - 10^{40} = 11'.$$

Тогда

$$18 = 0{,}9\,(11' - t_0); \; t_0 = 11' - 20' = -9'.$$

Товарный поезд должен выйти из B на 9 минут раньше, чем 10^{40}, т. е. в 10^{31}. Отправится из P он может сразу же после прохождения скорого, т. е. в 10^{54}.

Имея график движения этих трех поездов, можно решать многие задачи, связанные с их движением, как, например: а) определить время прибытия скорого и почтового в B; б) найти местоположение почтового и товарного поездов в момент прибытия скорого в B; в) найти расстояние между тремя поездами в момент времени 11^{00} и т. д.

Ответы на каждый из этих вопросов получим простым измерением на графике.

Упражнения

4. Составить график движения поездов для участка одноколейной железной дороги между тремя станциями и двумя полустанками AP_1BP_2C ($AP_1 = 10 \; км$, $P_1B = 15 \; км$, $BP_2 = 15 \; км$, $P_2C = 20 \; км$).

Из A в C без остановки проходит экспресс ($v = 70 \; км/час$). Из C в A с остановками на полустанках P_1 и P_2 и в B — почтовый ($v = 50 \; км/час$). Из C в A с остановкой в B на 4 минуты — пассажирский ($v = 55 \; км/час$). Из C в A с наименьшим возможным количеством остановок надо пропустить товарный поезд ($v = 54 \; км/час$).

5. Экспресс Москва — Владивосток все расстояние проходит за семь дней. При этом из Москвы и Владивостока ежедневно отправляется по одному экспрессу. Сколько экспрессов встретит пассажир, выехавший из Москвы, на протяжении всего пути до Владивостока?

На этом мы заканчиваем первую главу и переходим к кривым второго порядка. Для закрепления изученного материала читателю необходимо решить предлагаемые контрольные упражнения.

Контрольные упражнения

1. Написать формулу для расстояния r между двумя точками. Изменится ли r, если данные точки заменить им симметричными относительно осей или относительно начала?
2. Вывести формулы параллельного переноса координат.
3. Какие величины называются текущими координатами и параметрами прямой?
4. Дана прямая $y = 7x - 10$. Написать ее уравнение в параллельно перенесенной системе координат (x^*; y^*), для которой $a = 3$, $b = 5$. Найти одну из возможных параллельных систем координат, в которой бы прямая проходила через начало координат.

5. Определить площадь треугольника, отсекаемого прямой $7x - 3y - 42 = 0$ от осей координат.

6. Определить площадь ΔABC с вершинами $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; 2)$.

7. Привести прямую $5x - 3y - 30 = 0$ к виду в отрезках на осях и начертить ее.

8. Определить графическим и аналитическим (т. е. подстановкой в заданное уравнение) путем, какие из точек (5; 3), (—2; —1), (0; 2), (0; 3), (1; 7), (0; 7), (—2; 5) лежат над, на или под прямой $-10x + 7y - 14 = 0$.

9. Дана прямая $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$. Провести прямую, симметричную ей относительно оси y, оси x, начала (0; 0).

Указание. Для прямой, симметричной относительно оси y, $b = b^*$, $a = -a^*$.

10. Написать уравнение прямой, проходящей через начало (0; 0) и точку (—3; —2,5).

11. Найти угловой коэффициент k для прямой $7x - 14y - 0{,}3 = 0$.

12. Треугольник ABC задан своими вершинами: $A(3; 2)$, $B(4; 4)$, $C((7; 0)$. Написать уравнение его сторон и медианы, проведенной через вершину B.

13. Угловой коэффициент прямой $k = 3$. Найти b, если точка (—2; —1) лежит на прямой.

14. Исследовать, независимы ли все три коэффициента в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$.

15. Начертить прямые $y = 5x + 3$; $y = x + 3$; $y = \frac{1}{5}x + 3$; $y = -\frac{1}{5}x + 3$; $y = -5x + 3$; Есть ли среди этих прямых параллельные между собой и перпендикулярные?

16. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(3; -5)$.

17. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 7)$ и образующей с положительным направлением оси Ox один из углов: 45°, 60°, 135°, 180°.

18. Определить острый угол между прямыми $y = 2x + 3$ и $y = x - 2$.

19. Написать уравнение прямой, отсекающей на оси Ox отрезок, равный 5, и параллельной прямой $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

20. Определить координаты вершин треугольника, если даны уравнения его сторон:

$$y = 2x - 1;\ 2y - x = 3;\ 3y + 2x - 5 = 0.$$

Дать аналитическое и графическое решения.

Глава II

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данной главе рассматриваются окружность, эллипс, гипербола и парабола. Все эти кривые можно получить в результате пересечения кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. Геометрическое родство данных кривых отражается и на виде уравнений, которыми они определяются, — уравнение каждой из этих кривых является уравнением второй степени.

§ 13. Алгебраические линии и их порядок

Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие уравнения линии.

Пусть на плоскости дана какая-либо линия и указана система координат, например прямоугольная декартова система координат $(x; y)$.

Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) *называется такое уравнение* $F(x, y) = 0$ *с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты* x *и* y *каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.*

Координаты произвольной (переменной) точки $(x; y)$, как и в случае прямой линии, называются *текущими координатами*, а коэффициенты уравнения или их отношения (если в уравнении задано избыточное число коэффициентов) называют *параметрами**. Например, коэффициенты A, B, C в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ сами по себе нельзя рассматривать как параметры. Но если мы это уравнение разделим на $-B$ (в результате чего оно останется равносильным исходному уравнению) и приведем его к виду $y = kx + b$, то в качестве параметров можно рассматривать следующие отношения исходных коэффициентов:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Таким образом, если известно уравнение линии, то относительно каждой точки плоскости легко решить вопрос: лежит она на данной линии или нет. Для этого достаточно координаты испытываемой точки подставить в уравнение вместо переменных, и если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на линии, а если не удовлетворяют — не лежит.

Это позволяет исследовать линии при помощи анализа их уравнений, что и составляет основу методов аналитической геометрии.

Возможен и противоположный подход: задано уравнение и необходимо определить, какой геометрический образ ему соответствует. Чаще всего это будет линия (одна или состоящая из нескольких ветвей), но может быть и совокупность нескольких точек или одна единственная точка. Кроме того, встречаются и такие уравнения, которые (в действительной области) никакого геометрического образа не выражают. Поэтому, исследуя уравнение $F(x, y) = 0$, будем говорить, что *необходимо определить геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению.*

---

* Слово «параметр» происходит от греческого παραμετρῶν (парамегрон) — отмеривающий. Поэтому в математике параметром называют величину, числовое значение которой дает возможность выделить определенный элемент из множества элементов того же рода. Например, в уравнении параболы $y = px^2$ величина p есть параметр, значение которого выделяет одну определенную параболу из множества парабол, заданных этим уравнением. Параметром называют также вспомогательную переменную величину, которую вводят для удобства исследований. Параметр обычно сохраняет постоянное значение только в условиях данной задачи. Во многих случаях вводят не один, а несколько различных параметров, например, прямая линия характеризуется двумя независимыми параметрами.

В различных отраслях науки и техники параметрами называют величины, которые характеризуют какое-либо свойство, размеры и т. д., например объем, плотность, температуру, давление.

В частности, линия, определенная уравнением вида $y = f(x)$, т. е. уравнением, разрешенным относительно y, называется *графиком* функции $f(x)$. Можно также сказать, что линия, определяемая произвольным уравнением $F(x, y) = 0$, есть график той функциональной зависимости между x и y, которая устанавливается этим уравнением.

В качестве иллюстрации рассмотрим несколько простейших примеров определения геометрических образов по заданному уравнению.

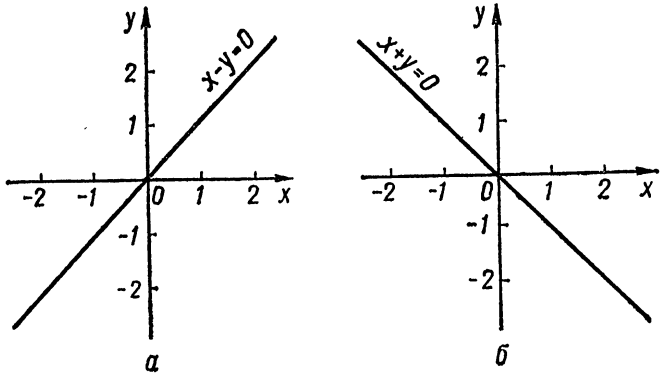


Рис. 31.

Пример 1. Заданное уравнение есть $x - y = 0$.

Представив это уравнение в виде $y = x$, убеждаемся, что точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют, суть те и только те, которые расположены в первой или третьей четверти на одинаковых расстояниях от осей. Таким образом, линия, определенная уравнением $x - y = 0$, есть биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 31, *а*).

Пример 2. Заданное уравнение есть $x + y = 0$.

Повторив те же рассуждения, приходим к выводу, что геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению $x + y = 0$, является биссектриса $y = -x$ второго и четвертого координатных углов (рис. 31, *б*).

Пример 3. Заданное уравнение есть $x^2 - y^2 = 0$. Представив его в виде $(x - y)(x + y) = 0$, заключаем: точки, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, суть те и только те, которые удовлетворяют либо уравнению $x - y = 0$, либо уравнению $x + y = 0$. Таким образом, геометрическим местом точек, удовлетворяющих уравнению $x^2 - y^2 = 0$, являются две биссектрисы координатных углов (рис. 32).

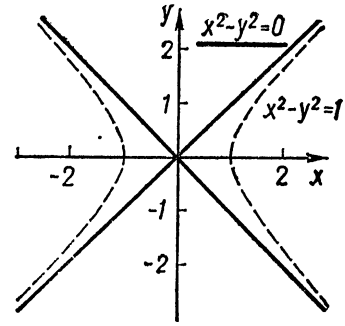


Рис. 32.

Заметим попутно, что уравнение $x^2 - y^2 = 1$ будет определять собой равностороннюю гиперболу (изображенную на рис. 32 пунктирными линиями), для которой биссектрисы координатных углов будут асимптотами. Подробнее это уравнение рассмотрим в § 18.

Пример 4. Заданное уравнение есть $x^2 + y^2 = 0$. Так как при вещественных x и y величины x^2 и y^2 всегда не отрицательны, то при сложении они не могут взаимно уничтожиться, следовательно, если $x^2 + y^2 = 0$, то $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 0$, состоит из одной единственной точки — начала координат (0; 0). В данном случае уравнение определяет, как говорят, *вырожденную линию*.

Пример 5. Заданное уравнение есть $x^2 + y^2 + 4 = 0$. Поскольку при любых вещественных x и y величины $x^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$, то $x^2 + y^2 + 4 > 0$. Следовательно,

нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, и уравнение $x^2 + y^2 + 4 = 0$ никакого геометрического образа на плоскости не выражает. В этом случае иногда говорят, что данное уравнение изображается *мнимой кривой*.

Переходим теперь к классификации линий.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{II.1}$$

в котором по крайней мере одна из величин A или B не равна нулю, есть *алгебраическое уравнение первой степени* (с двумя неизвестными x и y). Как мы уже видели в предыдущей главе, это уравнение всегда представляет прямую.

Алгебраическим уравнением второй степени называется всякое уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{II.2}$$

в котором по крайней мере одна из величин A, B, C не равна нулю. Аналогично определяются алгебраические уравнения третьей, четвертой, пятой и высших степеней.

Линия, представляемая (в декартовой системе) уравнением n-й степени, называется алгебраической линией n-го порядка.

Другими словами, *если $F(x, y)$ есть многочлен, то кривая $F(x, y) = 0$ называется алгебраической, а степень многочлена называется порядком кривой. Если же кривая не алгебраическая, то она называется трансцендентной**. Примером трансцендентной кривой может быть синусоида $y = \sin x$.

Аналогично можно рассматривать уравнения линий и в других (не декартовых) системах координат; в части второй мы еще к этому вопросу вернемся, а сейчас подчеркнем, что аналитическая геометрия на плоскости рассматривает только алгебраические кривые первого и второго порядка, т. е. прямую линию (II.1), являющуюся алгебраической линией первого порядка, и кривые второго порядка, изображаемые уравнением (II.2).

Уравнение (II.2), как будет показано в дальнейшем, может представлять собой уравнение окружности, эллипса, гиперболы или параболы. В частных случаях уравнению (II.2) может соответствовать одна точка (т. е. окружность, радиус которой равен нулю) или мнимая кривая второго порядка, одна из которых была рассмотрена в примере 5.

§ 14. Окружность

Окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной, называемой центром.

Выражая это свойство на языке формул, т. е. в виде функциональной связи между координатами точек окружности, мы и получим ее уравнение.

Поместим начало координат в центр окружности. По определению, окружности принадлежат только точки плоскости, находящиеся на данном расстоянии от центра, и кроме этих точек, никакие другие точки окружности не принадлежат. Применяя формулу (I.1) к прямоугольному треугольнику OMN (рис. 33), видим, что координаты произвольной точки $M(x; y)$ окружности должны удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{II.3}$$

Обратное утверждение в данном случае также справедливо: всякая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (II.3), находится на расстоянии R от начала координат — центра окружности, т. е. лежит на окружности.

---

* Слово «трансцендентный» не означает чего-либо особо трудного или таинственного, оно лишь указывает, что определение трансцендентных функций не может быть дано при помощи элементарных арифметических действий: *quod algebrae vires transcendit* в переводе с латинского означает «то, что превышает силы алгебры».

Действительно, для всякой точки, лежащей вне окружности, согласно определению будем иметь

$$x^2 + y^2 > R^2,$$

а для всякой внутренней точки

$$x^2 + y^2 < R^2,$$

и окружность, таким образом, является линией раздела областей выполнения этих двух неравенств. Поэтому (II.3) и есть уравнение окружности.

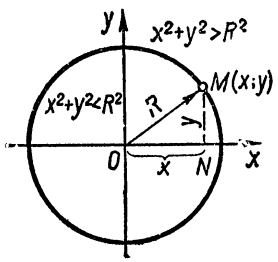


Рис. 33.

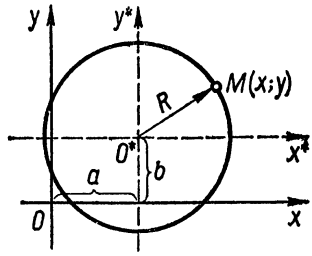


Рис. 34.

В общем случае, когда центр окружности находится не в начале координат, а в произвольной точке $(a; b)$, ее уравнение будет

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \qquad \text{(II.4)}$$

где a и b — координаты центра окружности, а R — ее радиус.

Действительно, построим параллельно первоначальным осям $(x; y)$ вспомогательную систему координат $(x^*; y^*)$ с центром $(a; b)$ (рис. 34). Тогда согласно (II.3) имеем

$$(x^*)^2 + (y^*)^2 = R^2.$$

Заменив теперь новые координаты старыми, в соответствии с формулами параллельного переноса координат (I.11),

$$x^* = x - a;\ y^* = y - a,$$

и внося эти значения в наше уравнение, мы и получим общее уравнение окружности (II.4).

Пример 1. Написать уравнение окружности радиуса $R = 5$ с центром в точке $(2; -4)$ и найти точки пересечения этой окружности с осями координат.

Решение. Согласно формуле (II.4) получаем

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

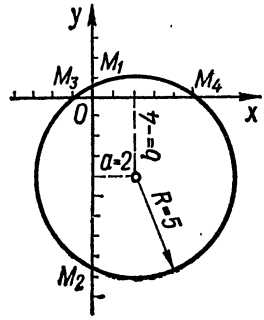


Рис. 35.

Если мы раскроем скобки и выполним приведение подобных членов, то придем к следующему (равносильному) уравнению:

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0.$$

Точки пересечения окружности с осью ординат найдем, положив в исходном уравнении $x = 0$. В результате имеем: $4 + (y + 4)^2 = 25$, откуда $y = -4 \pm \sqrt{21} = -4 \pm 4{,}58257\ldots$ и, следовательно (если ограничиться точностью в два десятичных знака), искомыми будут точки $M_1(0;\ 0{,}58)$ и $M_2(0;\ -8{,}58)$.

Аналогично находим точки $M_3(-1;\ 0)$ и $M_4(5;\ 0)$, в которых окружность пересекается с осью абсцисс, т. е. с прямой $y = 0$. Полученные результаты для большей наглядности представлены на рис. 35.

Пример 2. Написать уравнение окружности радиуса $R = \sqrt{32}$ с центром в точке (0; 5), лежащей на оси ординат, а затем определить, как расположены точки $M_1(-3; 6)$, $M_2(0; -2)$, $M_3(+\sqrt{23}; 2)$, $M_4(-\sqrt{23}; 2)$, относительно этой окружности.

Решение. Уравнение искомой окружности согласно формуле (II.4) будет

$$x^2 + (y - 5)^2 = 32.$$

Подставив координаты точки M_1 в это уравнение, имеем

$$x^2 + (y - 5)^2 = (-3)^2 + (6 - 5)^2 = 10 < 32,$$

так что точка $M_1(-3; 6)$ лежит внутри окружности. Аналогичным путем убеждаемся, что точка M_2 лежит вне окружности, а точки M_3 и M_4 — на самой окружности, поскольку для них

$$x^2 + (y - 5)^2 = 23 + 9 = 32 = R^2.$$

Упражнения

1. Написать уравнение окружности радиуса $R = 4$ с центром в начале координат радиуса $R = 7$ с координатами центра: абсцисса $a = 3$, ордината $b = -2$.

2. Написать формулы параллельного переноса координат к центру окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 49$, а затем уравнение этой окружности в новой системе координат $(x^*; y^*)$.

3. Как расположены относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$ следующие точки (1; 2), (0; 1), (0,6; −0,8), (0,2; −0,3), $\left(-\frac{7}{13}; -\frac{12}{13}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}; \frac{2}{7}\right)$, (2,7, 0,7)?

Пользуясь уравнением окружности и выведенным ранее уравнением прямой, можно исследовать некоторые свойства окружности, а также доказать большинство теорем элементарной математики, не обращаясь к построениям, а чисто аналитическим путем, т. е. только при помощи формул.

Так, например, уравнение окружности (II.3) оправдывается, если в нем заменить x на $-x$, так как $(+x)^2 = (-x)^2$. Следовательно, окружность симметрична относительно оси y. Аналогично убеждаемся в ее симметрии относительно оси x и относительно начала координат, т. е. ее центра.

Так как путем параллельного переноса осей общее уравнение окружности (II.4) всегда можно привести к частному случаю (II.3), то доказанное свойство симметрии относительно двух взаимно перпендикулярных диаметров и центра окружности остается в силе и в общем случае.

Докажем теорему: *диаметр, проведенный через середину какой-либо хорды, перпендикулярен к ней.*

Пусть дана окружность

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и хорда, проходящая через произвольные точки окружности: $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Для доказательства достаточно написать уравнение хорды и диаметра, проходящего через ее середину, а затем убедиться, что условие перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ выполняется (см. § 10).

Уравнение хорды, как прямой, определяемой двумя данными точками:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

так что ее угловой коэффициент

$$k_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Уравнение пучка диаметров, проходящих через начало, которое совпадает с центром рассматриваемой окружности:

$$y = kx.$$

Найдем среди них диаметр, который делит хорду пополам. Координаты средней точки хорды:

$$x_{ср} = \frac{x_2 + x_1}{2}; \quad y_{ср} = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

Следовательно, внося эти значения в уравнение пучка

$$\frac{y_2 + y_1}{2} = k\,\frac{x_2 + x_1}{2},$$

находим $k = k_2$ интересующего нас диаметра:

$$k_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}.$$

Остается убедиться, что условие перпендикулярности $k_1k_2 = -1$ для данной хорды и диаметра выполняется.

Действительно,

$$k_1k_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2},$$

а так как точки $(x_2; y_2)$ и $(x_1; y_1)$ по условию принадлежат окружности, то для них уравнение последней должно оправдываться, т. е.

$$x_2^2 + y_2^2 = R^2,$$
$$x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

Вычитая из верхнего уравнения нижнее, имеем

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0, \text{ или } y_2^2 - y_1^2 = -(x_2^2 - x_1^2).$$

Таким образом,

$$k_1k_2 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{x_2^2 - x_1^2} = -1$$

и теорема доказана.

В приведенном выше доказательстве мы пользовались частным видом уравнения окружности (II.3). Но так как параллельный перенос осей не изменяет углов между рассматриваемыми прямыми, то доказанная теорема остается справедливой и в общем случае (II.4).

Упражнение 4. Провести доказательство этой теоремы для двух конкретных примеров:

а) окружность $x^2 + y^2 = 25$ и хорда, проходящая через точки окружности $M_1(0; 5)$ и $M_2(4; -3)$;

б) окружность $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 169$ и точки $M_1(2; -10)$ и $M_2(14; 8)$.

Для наглядности (но не для доказательства) постройте соответствующие рисунки на миллиметровой бумаге.

Как мы уже показали, общее уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом R будет

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки, придадим этому уравнению вид

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - R^2) = 0,$$

или

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{II.5}$$

где положено

$$D = -2a, \quad E = -2b, \quad F = a^2 + b^2 - R^2.$$

Уравнение (II.5) является уравнением второй степени, и, следовательно, *окружности соответствует уравнение второй степени относительно текущих координат.* Однако не всякое уравнение второй степени (II.2) определяет собой окружность. Действительно, из уравнения (II.5) вытекает, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат xy отсутствует. Обратно, если эти два условия (равенство коэффициентов при x^2 и y^2 и отсутствие члена xy) осуществлены, то уравнение (II.2), вообще говоря, определяет окружность, так как оно приводится к виду (II.5) путем деления на коэффициент при x^2.

Итак, по виду данного уравнения второй степени мы можем решить, является ли оно уравнением окружности или нет. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$

определяет окружность, так как в нем коэффициенты при квадратах координат равны, а произведение xy отсутствует. Для того, чтобы построить эту окружность, мы должны предварительно определить координаты ее центра и радиус. С этой целью приведем данное уравнение к виду (II.4). Возьмем в заданном уравнении члены, содержащие x, а именно $x^2 + 6x$, и представим этот двучлен в виде

$$x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9,$$

т. е. выделим из него полный квадрат $(x + 3)^2$. Аналогичным образом преобразуем двучлен, содержащий y:

$$y^2 - 10y = (y - 5)^2 - 25,$$

после чего исходное уравнение запишется так:

$$(x + 3)^2 - 9 + (y - 5)^2 - 25 + 18 = 0.$$

Перенеся свободные члены в правую часть равенства, будем иметь

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16,$$

так что согласно формуле (II.4) радиус искомой окружности $R = 4$, а ее центром является точка $(-3; 5)$. По этим данным уже не представляет особого труда построить окружность.

Однако не любое уравнение типа (II.5) будет определять собой окружность. Так как в этом уравнении

$$a = -\frac{D}{2}; \quad b = -\frac{E}{2}; \quad R^2 = a^2 + b^2 - F = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4},$$

то только при непременном условии, что

$$D^2 + E^2 - 4F > 0,$$

уравнение (II.5) будет представлять окружность. Если же $D^2 + E^2 - 4F = 0$, то уравнение (II.5) определяет окружность нулевого радиуса, т. е. точку, а при $D^2 + E^2 - 4F < 0$ уравнение (II.5) не определяет никакого геометрического образа, и в этом случае говорят, что оно представляет мнимую окружность.

Пример 3. Найти координаты центра и радиус окружности

$$4x^2 + 4y^2 - 3x = 0.$$

Решение. Придавая уравнению вид

$$x^2+y^2-\frac{3}{4}x=0, \text{ или } \left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2+y^2=0, \text{ или } \left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2,$$

заключаем, что радиус окружности $R=\frac{3}{8}$, а ее центром служит точка $\left(\frac{3}{8};\ 0\right)$.

Упражнения

5. Дана окружность $(x-3)^2+(y+5)^2=16$. Лежат ли на ней точки $M_1(3;\ -1)$, $M_2(3;\ -9)$, $M_3(0;\ -3)$?

6. Дана окружность $(x+2)^2+(y+3)^2=13$ и точка на ней с ординатой равной нулю. Найти абсциссу точки.

7. Построить окружности

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0 \text{ и}$$
$$x^2+y^2-12y+11=0,$$

а затем написать уравнение их линии центров, т. е. уравнение прямой, проходящей через центры данных окружностей.

8. Найти расстояние между центрами окружностей

$$x^2+y^2=16 \text{ и } x^2+y^2-12x+11=0.$$

9. Дана окружность $x^2+y^2-2x+6y-6=0$. Написать уравнение ее диаметра, перпендикулярного к хорде $2x-y+3=0$.

В заключение отметим, что уравнение окружности можно также получить, рассматривая целый ряд иных задач на геометрические места, например такую.

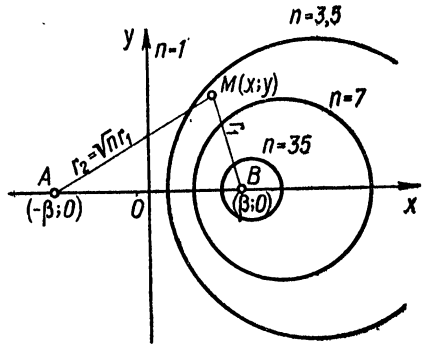


Рис. 36.

Даны две точки A и B. Найти геометрическое место точек $M(x;\ y)$, квадраты расстояний которых от данных (а следовательно, и сами расстояния) находятся в заданном отношении

$$r_2^2:r_1^2=n, \text{ или } r_2^2=nr_1^2.$$

Проведем ось абсцисс через данные точки A и B (рис. 36), а ось ординат — через середину отрезка AB, длину которого обозначим 2β. Тогда координаты точки B будут $(\beta;\ 0)$ и для A, соответственно, $(-\beta;\ 0)$. Нас интересуют все точки плоскости $M(x;\ y)$, которые удалены от точки $A(-\beta;\ 0)$ в $\sqrt{n}$ раз больше, чем от точки $B(\beta;\ 0)$.

По формуле (I.2) § 2 имеем

$$(MB)^2=r_1^2=(x-\beta)^2+y^2$$

и, соответственно,

$$(MA)^2=r_2^2=(x+\beta)^2+y^2.$$

В таком случае наше условие $nr_1^2=r_2^2$ дает уравнение рассматриваемого геометрического места точек

$$n[(x-\beta)^2+y^2]=(x+\beta)^2+y^2.$$

Преобразуем его. Раскрыв скобки, перенеся переменные величины в левую часть равенства и приведя подобные члены, имеем

$$(n-1)x^2-2\beta(n+1)x+(n-1)y^2=(1-n)\beta^2.$$

Разделив все члены на $(n-1)$ и прибавив затем к обеим частям уравнения величину $\beta^2\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2$, получаем

$$\left(x-\beta\frac{n+1}{n-1}\right)^2+y^2=\frac{4n\beta^2}{(n-1)^2}, \tag{II.6}$$

т. е. уравнение окружности, у которой $R=\frac{2\beta}{n-1}\sqrt{n}$ и координаты центра $a=\beta\frac{n+1}{n-1}$; $b=0$. Три из этих окружностей, соответствующие различным числовым значениям n, изображены на рис. 36.

Полученные формулы справедливы для любого n, кроме $n=1$, при котором знаменатель в выражениях для R и a обращается в нуль. Выясним, что же из себя представляет случай $n=1$.

При этом наше условие будет

$$r_2^2=r_1^2, \text{ или } (x-a)^2+y^2=(x+a)^2+y^2.$$

Отсюда, выполнив аналогичные преобразования, получаем

$$2ax=0, \text{ или } x=0,$$

т. е. уравнение оси ординат. Следовательно, геометрическое место точек, равноудаленных от двух заданных ($n=1$), есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину (в данном случае — ось y, проходящая через начало координат, как показано на рис. 36).

Рассмотренной выше задаче можно дать также и физическую интерпретацию.

Пусть A и B — две светящиеся точки. Источник A — красного цвета, источник B — дополнительного к нему синего цвета *.

Примем интенсивность свечения точки B равной некоторой единице, а точки A — соответственно n таких единиц. Найдем точки плоскости, равноосвещенные обоими источниками.

Из физики известно, что освещенность в данной точке прямо пропорциональна силе источника света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от него.

В таком случае освещенность произвольной точки $M(x; y)$ (рис. 36) от источника B будет равна $\frac{1}{r_1^2}$, а от источника A — соответственно $\frac{n}{r_2^2}$, и геометрическое место точек, в которых освещенность от обоих источников одинакова, определится из условия

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{n}{r_2^2}, \text{ или } r_2^2=nr_1^2,$$

а это и есть случай, рассмотренный выше.

Значит, точки плоскости, освещаемой одновременно двумя такими источниками, окажутся окрашенными в три различных цвета. Точки, освещенные с одинаковой силой обоими источниками, будут окрашены в белый цвет. Они образуют при заданном n вполне определенную окружность

$$(x-a)^2+y^2=R^2,$$

где

$$a=\beta\frac{n+1}{n-1},\ b=0,\ R=\frac{2\beta}{n-1}\sqrt{n}.$$

* Дополнительным цветом называется такой, который в сумме с основным при равной интенсивности дает цвет белый. При этом нельзя отождествлять смешивание лучей различных цветов и смешивание красок. Следует также заметить, что при разной интенсивности цветов более сильный, очевидно, целиком поглотит более слабый, так как равные их количества взаимно уничтожаются, дав цвет белый, а избыток одного из них и придает всей картине свою окраску.

Все точки, лежащие внутри этой окружности, т. е. для которых

$$(x-a)^2+y^2<R^2,$$

будут окрашены в синий цвет, а точки, удовлетворяющие неравенству

$$(x-a)^2+y^2>R^2,$$

будут окрашены в красный цвет.

§ 15. Эллипс, его вершины, оси симметрии, фокусы и эксцентриситет

Начертим окружность радиуса $R=b$ на резиновой полосе. На образовавшийся круг нанесем квадратную сетку из хорд (рис. 37).

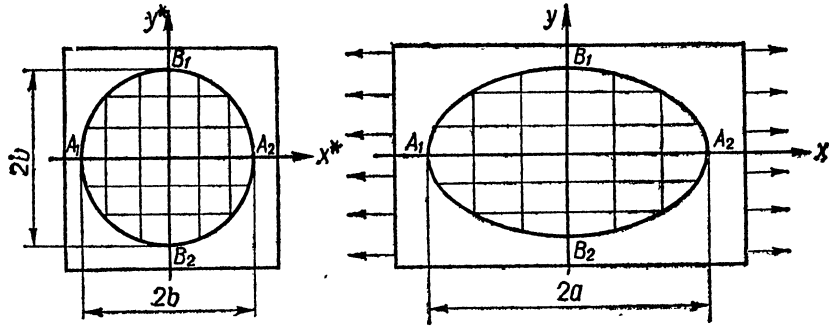


Рис. 37.

Растянем теперь равномерно нашу полосу в направлении оси абсцисс. При этом предполагаем, что размеры по оси y сохраняются неизменными, а по оси x пропорционально увеличиваются, что и будет являться условием равномерного растяжения. Если отрезок b растянется до величины a, то связь между обеими системами координат будет

$$x^*:b=x:a, \text{ или } x^*=\frac{b}{a}x,\ y^*=y,$$

где $(x^*;\ y^*)$ — координаты точки до растяжения, а $(x;\ y)$ — после растяжения. Величина $\frac{b}{a}$ характеризует собой степень растяжения.

Уравнение исходной окружности согласно формуле (II.3) есть

$$(x^*)^2+(y^*)^2=b^2.$$

Следовательно, уравнение полученной кривой будет

$$\left(\frac{b}{a}x\right)^2+y^2=b^2.$$

Разделив все члены на b^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{II.7}$$

Эту кривую и называют *эллипсом*, величину a — *большой полуосью*, величину b — *малой полуосью*, а точки $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ — *вершинами эллипса*.

Из уравнения (II.7) выведем некоторые свойства эллипса. От окружности эллипс унаследовал симметрию (относительно осей и начала координат) и замкнутость. Но окружность имела только одну выделяющуюся точку: центр. У эллипса таких точек две: F_1 и F_2 (рис. 38), и называются они его *фокусами* *. Фокусы эллипса F_1 и F_2 получим, если из вершины B_1 радиусом a сделаем засечки на его большой оси. Тогда, если расстояние между фокусами F_1F_2 обозначить величиной $2c$, то координаты фокусов будут соответственно $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, т. е. ординаты обоих фокусов равны нулю, а абсциссы $(-c)$ или $(+c)$. Величину c определим из прямоугольного треугольника B_1OF_2:

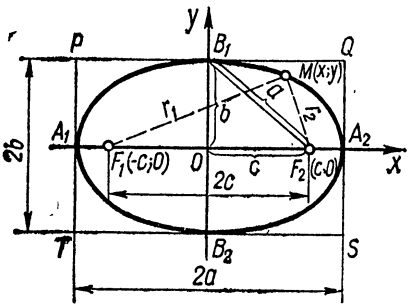


Рис. 38.

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ или } a^2 = c^2 + b^2. \quad \text{(II.8)}$$

Фокусы эллипса обладают одним замечательным свойством, которое мы сейчас и покажем. Найдем расстояния r_1 и r_2 произвольной точки $M(x; y)$ эллипса от его фокусов F_1 и F_2. Величины r_1 и r_2 называются *фокальными радиусами* точки M. Согласно формуле (I.2) квадраты расстояний между двумя заданными точками будут

$$(F_1M)^2 = r_1^2 = (x + c)^2 + y^2$$

и

$$(F_2M)^2 = r_2^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Преобразуем первое выражение. Так как точка $M(x; y)$ есть точка эллипса, то для нее

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ откуда } y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Внесем этот результат в выражение для r_1^2:

$$r_1^2 = (x + c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Раскрыв скобки и перегруппировав члены, получим

$$r_1^2 = c^2 + b^2 + 2cx + \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2.$$

Но согласно (II.8) $c^2 + b^2 = a^2$, $a^2 - b^2 = c^2$, так что

$$r_1^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей полученного равенства корень и обозначив отношение $\frac{c}{a}$ греческой буквой ε («эпсилон»), окончательно имеем

$$r_1 = a + \varepsilon x \quad \text{(II.9)}$$

и, вполне аналогично,

$$r_2 = a - \varepsilon x. \quad \text{(II.10)}$$

* Фокус — *focus*, латинское слово, означающее очаг. Если в точке F_1 поместить источник света (и тепла), то после отражения от эллипса все лучи соберутся в точке F_2 и помещенное там воспламеняющееся вещество загорится. Это зрелище поражало зрителей, поэтому слово «фокус» получило тот смысл, в котором его ныне употребляют в обиходе.

Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \qquad \text{(II.11)}$$

характеризующая степень вытянутости эллипса, называется его *эксцентриситетом*.

Сложив теперь уравнения (II.9) и (II.10), получим замечательное свойство эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a = \text{const}. \qquad \text{(II.12)}$$

Сумма расстояний точки, принадлежащей эллипсу, от его фокусов постоянна для всех его точек.

Пример 1. Найти величины осей $2a$ и $2b$, координаты фокусов и эксцентрисисет ε эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение. Сравнив заданное уравнение с уравнением (II.7), видим, что

$$a^2 = 25, \quad b^2 = 16, \text{ так что } a = 5, \quad b = 4.$$

В таком случае большая ось эллипса $A_1A_2 = 2a = 10$, а малая $B_1B_2 = 2b = 8$.

Для того чтобы найти координаты фокусов эллипса, надо прежде всего определить величину $OF_2 = c$. Из равенства (II.8) имеем

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Следовательно, координаты фокусов эллипса — F_1 (—3; 0) и F_2 (3; 0), а координаты его вершин — A_1 (—5; 0), A_2 (5; 0), B_1 (0; 4), B_2 (0; —4). Эксцентриситет эллипса определяем согласно формуле (II.11) по известным a и c:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Построив вершины A_1, A_2, B_1, B_2, мы получим грубое представление об эллипсе. Дальнейшее уточнение легко выполнить, задавшись рядом значений $-a < x < a$ и определив по исходному уравнению соответствующие y. Например, при $x = 3$ (или $x = -3$) имеем

$$y^2 = 16\left(1 - \frac{x^2}{25}\right) = 16\,\frac{25 - 9}{25} = \left(\frac{16}{5}\right)^2; \quad y = \pm\frac{16}{5} = \pm 3{,}2,$$

что позволяет построить четыре точки эллипса M, M_1, M_2, M_3 (рис. 39). Продолжив этот процесс, мы можем найти любое число точек эллипса и построить его как угодно точно.

Упражнение 1. Построить рис. 39 на миллиметровой бумаге (в масштабе 1 = 10 *мм*), определив дополнительно точки с абсциссами $x = \pm 1$; ± 2; ± 4. При помощи циркуля-измерителя найти для точки M (3; 3,2) фокальные радиусы r_1 и r_2, а затем полученные результаты проверить по формулам (II.9) и (II.10) при $a = 5$; $\varepsilon = 0{,}6$; $x = 3$, а также по формуле (I.2) § 2. Тем же путем определить r_1 и r_2 для ряда других точек эллипса и проверить, выполняется ли для них условие (II.12).

Пример 2. Согласно первому закону Кеплера каждая из планет движется не по окружности, а по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Найти, насколько в нашем северном полушарии зимою Земля ближе к Солнцу, чем летом, если большая полуось земной орбиты $a = 149{,}7$ млн. *км*, а ее эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}0167$.

Решение. Кратчайшим (минимальным) расстоянием точки, движущейся по эллипсу, от его фокуса является расстояние от одной из его вершин *, равное $r_1 = r_{\min} = a - c$. Наиболее удаленная от этого же фокуса точка — вторая вершина, для которой $r_2 = r_{\max} = a + c$.

В рассматриваемом случае согласно формуле (II.11)

$$c = \varepsilon a = 0{,}0167 \cdot 149{,}7 = 2{,}50 \text{ млн. } км$$

и, следовательно,

$$r_{\min} = 149{,}7 - 2{,}5 = 147{,}2 \text{ млн. } км, \quad r_{\max} = 149{,}7 + 2{,}5 = 152{,}2 \text{ млн. } км.$$

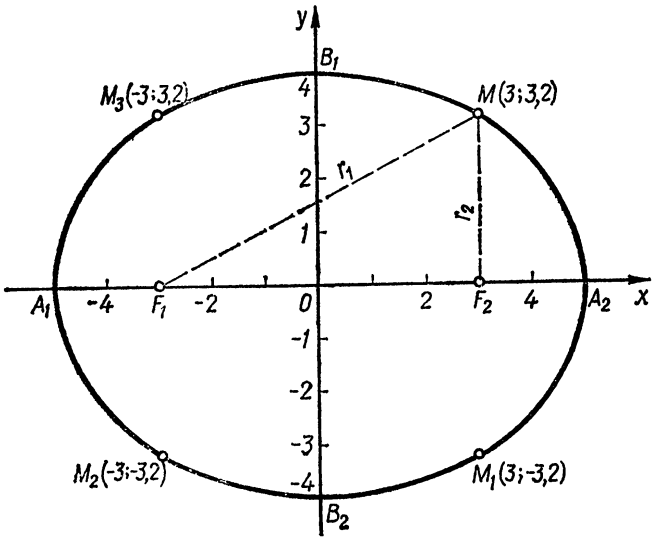


Рис. 39.

Как ни велика эта разность по абсолютному значению, но в процентном отношении к общему расстоянию это изменение незначительно и не может существенно влиять на температуру поверхности Земли и ее атмосферы, а лишь несколько смягчает климат северного полушария, по сравнению с климатом южного полушария. Смена же времен года на Земле обусловлена тем, что ось суточного вращения Земли наклонена к плоскости ее орбиты (под углом 66° 33′ 40″).

Упражнения

2. Написать уравнение эллипса, зная, что $a = 7$, $b = 5$, и определить затем c и ε.

3. Найти длину осей $2a$, $2b$, эксцентриситет ε и расстояние между фокусами $2c$ для эллипса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$, а затем построить этот эллипс по точкам.

4. Вывести формулу $r_2 = a - \varepsilon x$.

Выше, исходя из уравнений эллипса (II.7), мы получили основное свойство (II.12), которому удовлетворяют его точки. Однако для полной строгости надо еще пока-

* Точка орбиты небесного тела (планеты, кометы, искусственного спутника и т. д.), обращающегося вокруг Солнца, в которой это тело находится ближе всего к Солнцу, называется *перигелием* (от греческих слов περι — около и Ἥλιος — Солнце). Точка орбиты, наиболее удаленная от Солнца, называется *афелием* (греческое ἀφ от ἀπο — вдали). Свой перигелий Земля проходит в начале января, а афелий — в начале июля.

зать, что других точек, кроме тех, которые удовлетворяют условию (II.12), эллипс иметь не может.

Возможен также и другой путь, состоящий в том, что мы свойство эллипса (II.12) примем в качестве определяющего, а затем выведем из него соответствующее уравнение кривой.

Определение. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная* *.

Для того чтобы согласно определению составить уравнение кривой, примем в качестве оси x прямую, соединяющую две данные точки F_1 и F_2, а начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего точки F_1 и F_2 (рис. 38). Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами, тогда координаты точек F_1 и F_2 будут соответственно $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Обозначая через x и y координаты произвольной точки $M(x; y)$ эллипса, выразим длины отрезков $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ по формуле расстояния между двумя точками (I.2):

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса сумма $F_1M + F_2M$ есть величина постоянная. Обозначая ее через $2a$, имеем

$$F_1M + F_2M = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad \text{(II.13)}$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Упростим его, уединив первый радикал:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части в квадрат, найдем

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

или, после приведения подобных членов,

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

т. е.

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Возведя снова в квадрат, имеем

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

или

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2, \text{ т. е. } (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Отсюда, разделив обе части на $a^2(a^2 - c^2)$, находим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как по условию $c < a$, то $a^2 - c^2$ есть положительная величина, которую принято обозначать b^2. Введя это обозначение, мы и придадим уравнению эллипса окончательный вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b^2 = a^2 - c^2. \qquad \text{(II.14)}$$

* Эта постоянная должна быть больше расстояния между фокусами, так как ломаная F_1MF_2 не может быть меньше прямой F_1F_2 (см. рис. 38). Если же она будет равна расстоянию между фокусами, то рассматриваемым геометрическим местом точек будет сам отрезок прямой, ограниченный данными точками F_1 и F_2.

Уравнение (II.14) полностью совпадает с уравнением (II.7). Значит, линия, введенная при помощи определения (II 12), действительно тождественна с линией, названной эллипсом в начале параграфа. Уравнение (II.14) называется *каноническим* уравнением эллипса* или уравнением эллипса, отнесенным к его осям симметрии. При другом выборе осей координат уравнение эллипса будет более сложным.

При выводе уравнения (II.14) из (II.13) мы дважды избавлялись от радикалов, возводя обе части уравнения в квадрат. Как известно, такая операция может привести к уравнению, не равносильному с исходным, т. е. к уравнению, которому удовлетворяют не только точки уравнения (II.13), но еще и другие, «лишние», точки, не принадлежащие эллипсу. Читателю будет полезно самостоятельно показать эквивалентность уравнений (II.13) и (II.14), т. е. что каждое из этих уравнений есть следствие другого, а затем результат проконтролировать по книге Н. В. Ефимова [39, стр. 72—73], где данный вопрос хорошо изложен.

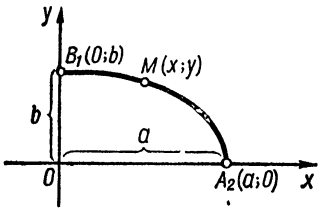


Рис. 40.

Продолжим изучение эллипса, анализируя его каноническое уравнение. Из того, что уравнение (II.14) содержит только члены с квадратами текущих координат, следует, что эллипс симметричен как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy. Действительно, если точка $(x; y)$ удовлетворяет уравнению (II.14), то и точки $(\pm x; \pm y)$ будут также ему удовлетворять. Для определения формы эллипса разрешим уравнение (II.14) относительно ординаты y:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \text{ или } y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

откуда

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad \text{(II.15)}$$

Совершенно аналогично можно получить формулу, определяющую абсциссу любой точки эллипса через ее ординату:

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}. \qquad \text{(II.16)}$$

Поскольку эллипс симметричен относительно координатных осей, нам достаточно рассмотреть лишь его часть, расположенную в первом квадранте, в котором $x \geqslant 0$ (рис. 40). Следовательно, в формуле (II.15) у радикала надо брать знак «$+$». Таким образом, мы должны построить график функции

$$y = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

при условии, что $x \geqslant 0$.

Возьмем сначала $x = 0$, тогда $y = b$ и, следовательно, самой левой точкой рассматриваемого графика будет точка $B_1(0; b)$. Далее, при увеличении x подкоренное выражение в формуле (II.15) будет уменьшаться, а с ним будет уменьшаться и ордината y. При $x = a$ мы получим $y = 0$, так что точка $M(x; y)$, начав свое движение из точки $B_1(0; b)$, перемещаясь вправо $(0 \leqslant x \leqslant a)$ и вниз $(b \geqslant y \geqslant 0)$, достигнет точки $A_2(a; 0)$, лежащей на оси Ox. При дальнейшем увеличении x, т. е. при $x > a$, подкоренное выражение в формуле (II.15) становится отрицательным, а значит, y — мнимым. Отсюда следует, что точка $A_2(a; 0)$ является самой крайней точкой графика, правее которой нет больше ни одной точки эллипса. Аналогично из формулы (II.16) следует, что эллипс не может иметь точек, для которых $|y| > b$.

* От греческого слова κανών — канон, правило, норма, образец. Таким образом, название «каноническое» означает: принятое в качестве образца, типовое.

Итак, частью эллипса, расположенной в первом квадранте, является дуга B_1A_2. Зеркальное отражение дуги B_1A_2 относительно координатных осей даст нам полный эллипс, изображенный на рис. 38.

Отрезок прямой, соединяющий две произвольные точки эллипса, называется его *хордой*. Оси симметрии эллипса называют обычно просто его *осями*, а точку пересечения осей — *центром эллипса*. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, как уже отмечалось, называют его *вершинами*. Заметим, что осями эллипса принято называть также отрезки $A_1A_2 = 2a$ и $B_1B_2 = 2b$. Ось, на которой расположены фокусы $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, называется *фокальной осью*. Если $a > b$, то согласно (II.8), величина $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ будет действительная и фокальной осью будет ось $2a$. Если же $b > a$, то величина

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{-(b^2 - a^2)} = i\sqrt{b^2 - a^2}$$

будет чисто мнимой, следовательно, фокусы будут расположены на оси ординат, а фокальной осью в этом случае будет ось $2b$. Поэтому, введенные раньше названия «большая полуось a» и «малая полуось b» относятся только к случаю $a > b$.

Форма эллипса, как мы видели, зависит от его эксцентриситета ε. При $\varepsilon = 1$, согласно (II.11) $b = 0$ и эллипс переходит в разрез F_1F_2. При $\varepsilon = 0$ согласно (II.11) $c = 0$; $a = b$, так что уравнение (II.14) переходит в уравнение окружности радиуса $R = a = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ или } x^2 + y^2 = a^2.$$

Таким образом, окружность есть частный случай эллипса, у которого фокусы слились в одну точку и совпали с его центром (0; 0), в силу чего эксцентриситет окружности равен нулю. Окружность имеет бесконечное число осей симметрии — любой диаметр окружности одновременно является и ее осью симметрии. Операция растяжения $x^* = \frac{b}{a}x$; $y^* = y$ сохранила это свойство только для двух взаимно перпендикулярных диаметров эллипса, совпадающих с его осями (свойство произвольных диаметров эллипса будет рассмотрено в § 21).

Итак, при изменении величины эксцентриситета от нуля до единицы ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$) эллипс будет из окружности ($\varepsilon = 0$), постепенно сжимаясь, трансформироваться во все более и более вытянутую замкнутую кривую, пока не перейдет в отрезок прямой F_1F_2, соединяющий его фокусы ($\varepsilon = 1$).

Пример 3. Прямая $2x - 3y - 6 = 0$ пересекает эллипс $x^2 + 4y^2 = 100$. Найти величину осей и эксцентриситет эллипса, а также длину хорды, отсекаемой этой прямой.

Решение. Разделив обе части уравнения эллипса на 100 и тем самым приведя его к каноническому виду, имеем

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Отсюда $a^2 = 100$, $b^2 = 25$, $a = 10$, $b = 5$ и, следовательно,

$$2a = 20,\ 2b = 10,\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{75} \approx 8{,}860;\ \varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}8860.$$

Определив оси и эксцентриситет эллипса, переходим к решению второй части задачи. Для того чтобы найти точки пересечения эллипса и прямой, надо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y - 6 &= 0, \\ x^2 + 4y^2 &= 100, \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} 2x &= 3y + 6 \\ x^2 &= -4y^2 + 100. \end{aligned}\right\}$$

Возведя первое уравнение системы в квадрат и вычтя из него учетверенное второе уравнение, находим

$$\begin{array}{rl} 4x^2 = 9y^2 + 36y + 36 & \mid +1 \\ x^2 = -4y^2 + 100 & \mid -4 \\ \hline 0 = 25y^2 + 36y - 364 & \end{array}$$

Решая найденное квадратное уравнение и ограничиваясь при этом точностью до трех десятичных знаков, получаем *

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 25 \cdot 364}}{25} = \frac{-18 \pm \sqrt{9424}}{25} = \frac{-18 \pm 97{,}077}{25}.$$

Отсюда, учтя, что согласно первому уравнению системы $x = 1{,}5y \mp 3$, мы и находим координаты искомых точек:

$$y_1 = \frac{-18 + 97{,}077}{25} = \mp 3{,}163; \quad x_1 = \mp 7{,}745; \quad x_1^2 + 4y_1^2 = 100{,}003;$$

$$y_2 = \frac{-18 - 97{,}077}{25} = -4{,}603; \quad x_2 = -3{,}905; \quad x_2^2 + 4y_2^2 = 99{,}999.$$

С целью контроля вычислений мы также подставили найденные x и y в исходное уравнение эллипса и убедились, что оно удовлетворяется с той точностью, с которой были выполнены вычисления.

Для того чтобы завершить решение примера, нам остается подставить координаты найденных точек в формулу (1.2) и вычислить длину хорды эллипса, отсекаемого заданной прямой:

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \mp (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(11{,}650)^2 + (7{,}766)^2} = \sqrt{196{,}033} = 14{,}001.$$

Упражнения

5. Дан эллипс $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Определить его оси, расстояние между фокусами и эксцентриситет.

6. Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A_1(-8; 0)$ и $A_2(8; 0)$, а координаты фокусов $(\pm 5; 0)$.

7. Написать уравнение эллипса, у которого координаты фокусов $(0; \pm 5)$, а эксцентриситет равен $\frac{2}{3}$.

8. Проверить, лежат ли на эллипсе $\frac{x^2}{9} \mp \frac{y^2}{4} = 1$ точки $A(0; \pm 2)$, $B(\pm 3; 0)$, $C(1; 2)$.

9. Даны эллипс $\frac{x^2}{36} \mp \frac{y^2}{12} = 1$ и точка на нем с абсциссой $x = 3$. Найти ординаты двух соответствующих точек эллипса и расстояние между ними.

10. В эллипс $9x^2 \mp 36y^2 = 324$ вписан правильный треугольник, одна из вершин которого совпадает с правой вершиной эллипса. Найти координаты двух других вершин треугольника и длину его стороны.

§ 16. Построение эллипса. Применение эллипса в технике

Рассмотрим некоторые, наиболее простые способы построения эллипса.

I. Способ садовников. Закрепим в точках F_1 и F_2 две булавки и набросим на них петлю из нерастяжимой нити (рис. 41). Если теперь, натягивая нить при помощи карандаша, перемещать его, то нить принудит карандаш пройти только через те точки плоскости, сумма расстояний которых $r_1 \mp r_2$ от двух заданных точек F_1 и F_2 постоянна (суммарная длина нити $r_1 \mp r_2 \mp 2c$ постоянна, но расстояние $2c$ не изменяется, так что $r_1 \mp r_2 = \text{const}$).

Следовательно, карандаш, замкнув свой путь, вычертит на бумаге эллипс. Этим способом обычно пользуются садовники при вычерчивании эллипсовидных клумб, откуда и произошло его название.

* Корни удобно определять при помощи таблицы Барлоу [135].

Упражнения

1. Вычертите некоторый эллипс большого размера. Не трогая булавок, вычертите еще несколько эллипсов, уменьшая размер нитяного треугольника. Полученная совокупность кривых называется *семейством софокусных эллипсов.*

2. Вычертите какой-либо эллипс, у которого $2c = 100$ *мм*. При помощи той же нити вычертите ряд эллипсов, зафиксировав F_1 и приближая к нему все более

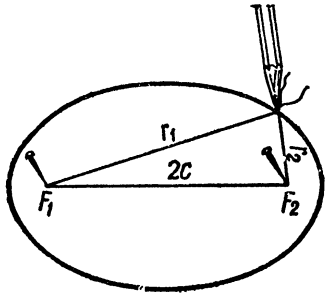


Рис. 41.

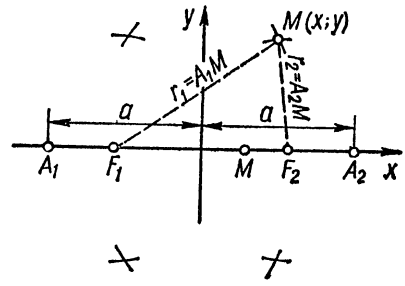


Рис. 42.

и более F_2, пока в пределе оба фокуса не сольются в одну точку. Для каждого эллипса определите циркулем-измерителем a и c, после чего вычислите с точностью до 0,01 величину эксцентриситета $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

II. Построение эллипса по точкам. Пользуясь определяющим равенством для эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

любое число его точек легко построить при помощи циркуля (рис. 42). На отрезке A_1A_2 длиною $2a$ из заданных фокусов F_1 и F_2, как из центров, радиусом $r_2 = A_2M < a$ делаем засечки. Отрезок A_1M будет, очевидно, равен $r_1 = 2a - r_2$, так что, сделав снова засечки из фокусов F_1 и F_2 радиусом $r_1 = A_1M > a$, получим одновременно четыре точки, для которых $r_1 + r_2 = 2a$. Построив достаточное число таких точек, вычерчиваем эллипс при помощи лекала.

Упражнение 3. Решить пример 3 § 15 графическим путем и сопоставить результаты с результатами, полученными ранее аналитически. Построить также по точкам эллипс $4x^2 + y^2 = 100$, найдя предварительно его вершины и фокусы, а затем найти длину хорды, отсекаемой от этого эллипса прямой $2x - 3y - 6 = 0$.

Указание. В случае $b > a$ фокусы эллипса находятся на оси ординат.

III. Построение эллипса циркулем и линейкой. Пусть дан эллипс (рис. 43)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a > b.$$

Из его центра начертим две окружности, одну — радиусом a, другую — радиусом b (считая, что $a > b$). Проведем через центр эллипса произвольный луч и обозначим буквой t угол, который этот луч образует с осью Ox. Проведенный луч пересечет наши окружности в точках P и Q. Из точки Q опустим перпендикуляр на ось Ox, а из точки P проведем отрезок PM, параллельный этой оси. Покажем, что точка M будет лежать на эллипсе. Для этого выразим координаты точки $M(x; y)$ через t. Согласно построениям, выполненным на рис. 43, легко видеть, что

$$x = OQ_1 = OQ \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = Q_1M = P_1P = OP \cdot \sin t = b \sin t.$$

Таким образом, для рассматриваемой точки

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.17)}$$

Подставив эти координаты в исходное уравнение эллипса, имеем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t\equiv 1,$$

т. е. координаты (II.17) действительно удовлетворяют уравнению эллипса, и притом в силу известного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\equiv 1$ удовлетворяют

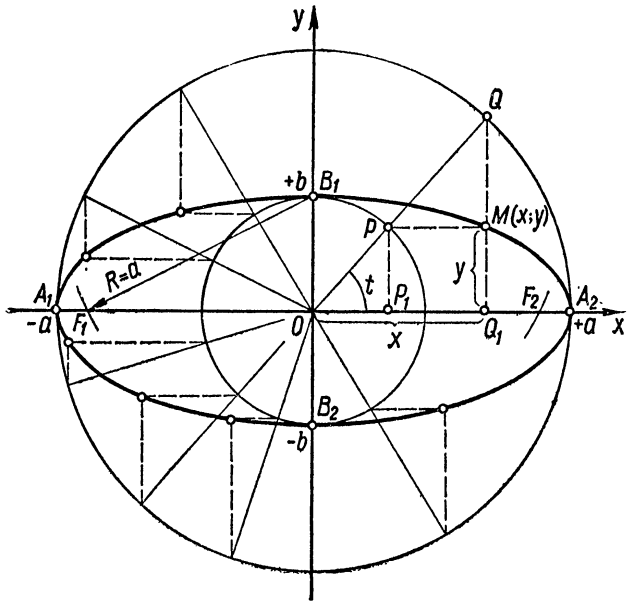


Рис. 43.

ему при любом значении t. Следовательно, точка $M(x; y)$ принадлежит данному эллипсу. Проводя ряд других лучей и производя указанное построение, мы можем найти столько точек эллипса, сколько пожелаем.

Фокусы построенного эллипса F_1 и F_2 также легко найти графическим путем. Для этого надо только из вершины $B_1(0; b)$ радиусом $R=a$ сделать две засечки на оси абсцисс (если $a>b$; если же $b>a$, засечки делаем на оси ординат из вершины $A_1(-a; 0)$ радиусом $R=b$).

Отметим попутно, что уравнения (II.17) выражают координаты произвольной точки эллипса как функции вспомогательной переменной t, которую можно считать параметром. Благодаря этому уравнения (II.17) называют *параметрическими уравнениями эллипса.*

IV. Построение эллипса при помощи эллипсографа. В технике для построения эллипсов часто пользуются так называемым *эллиптическим циркулем*, или *эллипсографом* (рис. 44).

В пазах прямоугольной крестовины скользят ползушки, шарнирно соединенные с линейкой. Длина отрезка линейки PQ во время движения сохраняется постоянной. Карандаш можно укрепить в любой точке линейки, как внутренней $M(x; y)$, так и внешней $M_1(x_1; y_1)$. При этом будем считать во всех случаях, что $PM=a$

и $MQ = b$. Убедимся, что точка $M(x; y)$ при таком движении описывает эллипс. Из подобия треугольников PMK и MQN следует

$$\frac{y}{b} = \frac{m}{a}.$$

Для того чтобы найти уравнение линии, которую описывает точка $M(x; y)$, в полученное равенство надо ввести x и исключить из него m. Треугольник PMK прямоугольный, так что

$$m^2 = a^2 - x^2.$$

Тогда, возведя первое равенство в квадрат и заменив в нем m^2 равной величиной $a^2 - x^2$, получим

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}, \text{ или } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

что и доказывает наше утверждение.

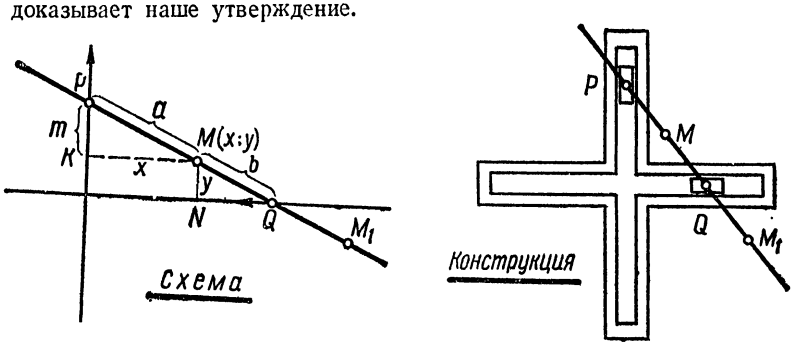


Рис. 44.

Удобство эллипсографа заключается в том, что с его помощью можно вычерчивать эллипсы с наперед установленными полуосями a и b.

Упражнения

4. Доказать, что внешняя точка $M_1(x_1; y_1)$ (см. рис. 44) также описывает эллипс с полуосями $a = PM_1$; $b = QM_1$.

5. Можно ли при помощи эллипсографа вычертить окружность? Какими при этом должны быть a и b?

6. Построить эллипсограф, склеив (или скрепив винтами) его крестовину из плексигласа толщиной 3—4 *мм*. Резьба в плексигласе легко нарезается самим винтом или метчиком.

Идея конструкции эллипсографа может быть использована и в других направлениях. Например, в технике, для обточки тел эллиптического сечения применяют специальный патрон, называемый *эллиптическим*.

Эллиптический патрон получим, обратив схему эллипсографа, т. е. закрепив неподвижно линейку (и на ней резец) и приведя крестовину во вращение. В результате резец проточит эллипс на теле, вращающемся вместе с крестовиной, так как существенно не абсолютное движение, а относительное.

В технике применяют и другой вид обращения эллипсографа. Перемещая точку M по эллипсу или, в частности, по окружности, тем самым вынуждают ползушки совершать прямолинейное движение назад и вперед. Эти механизмы получили название *прямил*; они превращают эллиптическое или круговое движение в прямолинейное.

Из других применений эллипса в технике укажем на эллиптические шестерни (рис. 45).

Два эллипса с равными полуосями ($a' = a''$; $b' = b''$) посажены на оси, проходящие соответственно через фокусы F_2' и F_2'' первого и второго эллипсов. Совместное вращение двух тел возможно лишь в том случае, если сумма расстояний от осей вращения точек, которым надлежит войти в соприкосновение, постоянна и равна расстоянию между осями $F_2'F_2''$. Если эта сумма больше $F_2'F_2''$, произойдет заклинение, если же она меньше $F_2'F_2''$, не наступит сцепление.

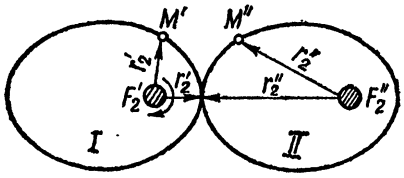


Рис. 45.

Это условие выполняется для двух кругов любых радиусов и, как легко убедиться, для двух одинаковых эллиптических колес $a' = a''$; $b' = b''$, для которых в любой момент вращения

$$r_2' + r_2'' = 2a' = 2a'' = \text{const}.$$

Но при вращении эллиптических колес, если увеличивается r_2', то r_2'' уменьшается, и наоборот. Так что, приведя в равномерное вращение колесо *I*, получим периодически ускоряющееся и замедляющееся вращение колеса *II*. Этим свойством эллиптических колес пользуются в станках (или других устройствах), где необходим медленный, но мощный рабочий ход и ускоренный холостой ход, как, например, в строгальных и долбежных станках, в прессах и т. д.

§ 17. Гипербола и ее асимптоты

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная *. Эту постоянную принято обозначать $2a$.

Исходя из этого определения, мы сможем вывести уравнение гиперболы, а по уравнению установить затем ее свойства.

Пусть заданы две точки F_1 и F_2 — фокусы будущей гиперболы (рис. 46). Примем середину отрезка F_1F_2 за начало координат и ось x проведем через фокусы. Расстояние фокусов от начала пусть будет c, тогда их координаты будут $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Уравнение гиперболы получим, если в определяющем условии

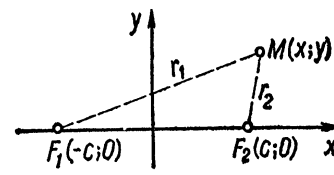


Рис. 46.

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \qquad \text{(II.18)}$$

величины r_1 и r_2 выразим через текущие координаты точки $M(x; y)$ и параметры гиперболы a и c. Для этого перенесем r_2 в правую часть равенства и возведем обе его части в квадрат:

$$r_1^2 = (r_2 \pm 2a)^2 = 4a^2 \pm 4ar_2 + r_2^2.$$

Тогда согласно формуле расстояния между двумя точками (I.2)

$$r_1^2 = [x - (-c)]^2 + (y - 0)^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2,$$
$$r_2^2 = (x - c)^2 + (y - 0)^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Внося эти результаты в наше уравнение, имеем

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4ar_2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

так что, приведя подобные члены и сократив обе части равенства на четыре, получим

$$cx = a^2 \pm ar_2. \qquad \text{(II.19)}$$

* Постоянная a должна быть положительной и меньше расстояния между фокусами, но не должна равняться нулю.

Теперь остается еще исключить r_2. Снова изолируем член, содержащий r_2, и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(cx - a^2)^2 = (\pm ar_2)^2,$$

или

$$c^2x^2 - 2a^2cx \pm a^4 = a^2r_2^2.$$

Заменяя здесь r_2^2 его значением, имеем

$$c^2x^2 - 2a^2cx \pm a^4 = a^2(x^2 - 2cx \pm c^2 + y^2),$$

или после очевидных упрощений

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Разделив все уравнение на $a^2(c^2 - a^2)$, находим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Обозначив

$$c^2 - a^2 = b^2, \tag{II.20}$$

получаем уравнение гиперболы*, отличающееся от уравнения эллипса только знаком при y^2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II.21}$$

Уравнение (II.21) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Изучим ее свойства. Для этого неприведенное уравнение гиперболы

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

решим относительно y^2:

$$y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}.$$

Извлекая корень, имеем

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{II.22}$$

и совершенно аналогично

$$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}. \tag{II.23}$$

Проанализируем полученные результаты. Из (II.22) следует, что величина y будет действительной только в том случае, если выполняется условие

$$|x| \geqslant a.$$

Уравнение (II.21) не накладывает на координаты $(x; y)$ больше никаких ограничений. Ордината y может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, принимая при $x = a$ свое наименьшее значение (по модулю), $y = 0$. Затем, при дальнейшем увеличении $|x|$ будет также расти и $|y|$, стремясь к бесконечности. Но на кривой не существует ни одной точки, для которой абсцисса x по модулю была бы меньше a, так как при $|x| < a$ согласно (II.22) $y = \pm i\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

* Для полной строгости надо, как и при выводе уравнения эллипса, доказать равносильность уравнений (II.18) и (II.21), что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Проведем теперь через начало координат две прямые:

$$y = +\frac{b}{a}x,\quad y = -\frac{b}{a}x$$

и сравним ординаты прямых

$$y_{\text{пр}} = \pm\frac{b}{a}x \tag{II.24}$$

с ординатами гиперболы

$$y_{\text{гип}} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

при одном и том же значении абсциссы x.

Имеем $|y_{\text{гип}}| < |y_{\text{пр}}|$, так как

$$\left|x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\right| < |x|$$

для любых значений $|x| > a > 0$, поскольку при этих условиях $\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}$ есть правильная дробь.

Рассмотрим, кроме того, разность ординат этой прямой и гиперболы, ограничиваясь случаем $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (т. е. случаем, когда исследуемые линии расположены в I квадранте):

$$y_{\text{пр}} - y_{\text{гип}} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Умножив и разделив выражение в скобках на $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, преобразуем его к виду

$$\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - a^2})^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$
$$= \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Таким образом, исследуемая разность ординат

$$y_{\text{пр}} - y_{\text{гип}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \tag{II.25}$$

по мере роста x становится сколь угодно малой. Например, для $a = b = 1$, $x = 10$

$$y_{\text{пр}} - y_{\text{гип}} = \frac{1}{10 + \sqrt{99}} = 0{,}0501\ldots .$$

Все сказанное выше остается справедливым для любого квадранта, что читатель легко может проверить самостоятельно. Таким образом, по мере увеличения $|x|$ гипербола приближается к прямым $y = \pm\frac{b}{a}x$ как угодно близко, но никогда не может их достичь. Эти прямые называются *асимптотами гиперболы* *.

Имея асимптоты гиперболы, точку $x = a$; $y = 0$ и вычислив ряд промежуточных, ее точек, можем построить нашу кривую (рис. 47).

Согласно уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* Асимптоты встречаются не только у гиперболы, и мы вернемся к этому вопросу в § 48 гл. IV.

гипербола должна быть симметрична относительно обеих осей и начала, так как перемена знака «+» на «—» у абсциссы x, или у ординаты y, или одновременно у обеих координат не нарушает правильности уравнения.

Таким образом, кривая, расположенная только в I и IV квадрантах ($x \geqslant 0$), не исчерпывает всех точек плоскости, удовлетворяющих уравнению гиперболы. Этому уравнению будут также удовлетворять все точки, которые получим из уже построенных, заменив x на $-x$. Эти точки образуют вторую ветвь гиперболы, являющуюся зеркальным отражением первой ветви относительно оси Oy. Отметим попутно, что саму первую ветвь можно построить, отразив в оси Ox, как в зеркале, только часть гиперболы A_2M, расположенную в I квадранте, после чего второе отражение в оси Oy завершает построение всей гиперболы (см. рис. 47).

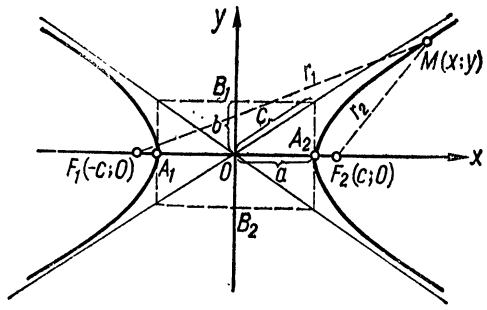


Рис. 47.

Конечно, обе ветви гиперболы вполне равноправны, и здесь мы имеем образец кривой, состоящей из двух самостоятельных ветвей.

Как и для эллипса, степень сжатия гиперболы характеризуется *эксцентриситетом*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \tag{II.26}$$

но для нее $\varepsilon > 1$, так как $a < c$.

Строить гиперболу можно, как и эллипс, непрерывным движением *, но проще всего ее строить при помощи циркуля и линейки по отдельным точкам. Для этого по заданным a и b строим прямоугольник $PQST$ со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными координатным осям (рис. 48). Затем из точки O радиусом $OP = OQ = c$ делаем засечки на оси Ox и согласно формуле (II.20) получаем фокусы $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$. Из фокусов F_1 и F_2 произвольным радиусом $R = r_1 > c + a = F_1A_2 = F_2A_1$ делаем четыре засечки. Не меняя радиуса R, из точки A_2, как из центра, делаем также засечку N на оси абсцисс. Далее, уменьшив радиус R на величину $2a$, т. е. перейдя к радиусу

$$r_2 = A_1N = A_2N - A_2A_1 = R - 2a = r_1 - 2a,$$

делаем вторые засечки. Пересечение засечек и дает точку $M(x; y)$ и еще три симметричные M точки гиперболы, поскольку для каждой из них выполняется условие (II.18)

$$r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Изменяя величину $R = r_1$ и повторяя необходимые построения, мы можем найти сколько угодно точек гиперболы, а диагонали прямоугольника $PQST$ будут являться ее асимптотами.

Оси симметрии гиперболы называют обычно просто ее *осями*, а точку пересечения осей — *центром* гиперболы (в данном параграфе мы имеем дело с гиперболой, оси которой совмещены с осями координат, в результате чего ее уравнение приняло наиболее простой вид). Одна из двух осей пересекает гиперболу, другая ее не пересекает. Точки $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$, в которых гипербола пересекается с осью Ox, называются ее *вершинами*. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, диагонали которого совпадают с асимптотами, называют *основным прямоугольником*

*См., например, [105].

гиперболы. Отрезки $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ — *фокальные радиусы* точки M. Фокальные радиусы произвольной точки гиперболы $M(x; y)$ рационально выражаются через абсциссу x и параметры гиперболы:

$$r_1 = \varepsilon x + a, \tag{II.27}$$

$$r_2 = \varepsilon x - a. \tag{II.28}$$

Действительно, разделив обе части равенства (II.19) на a и введя эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$, получаем формулу (II.28). Заменив в ней согласно (II.18) $r_2 = r_1 \mp 2a$, приходим к формуле (II.27).

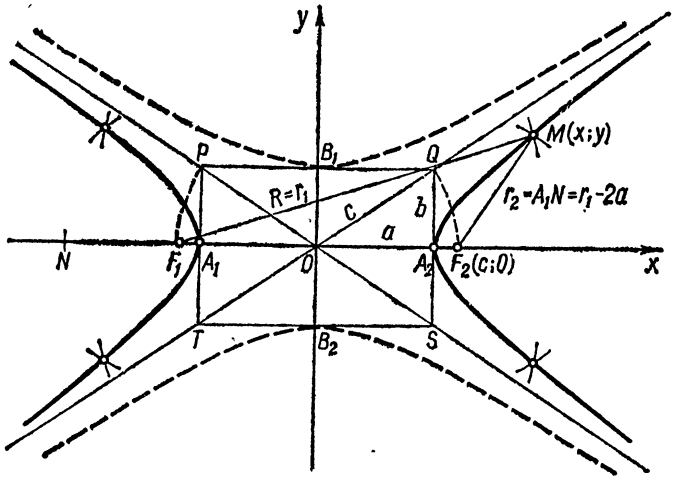


Рис. 48.

Заметим, что в математической литературе принято также называть осями гиперболы отрезки длиною $2a$ и $2b$, соединяющие середины противоположных сторон основного прямоугольника. Соответственно этому говорят, что *уравнение* (II.21)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

определяет гиперболу с полуосями a и b. При этом отрезок $A_1A_2 = 2a$ носит название *действительной* или *вещественной* оси гиперболы в отличие от оси $B_1B_2 = 2b$, называемой *мнимой* *. Последнее название обусловлено тем, что на оси B_1B_2 нет ни одной точки гиперболы, так как при $x = 0$ из уравнения (II.21) получаем $y = \sqrt{-b^2} = \pm ib$.

Гипербола, определяемая уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{II.29}$$

в качестве своих вершин будет иметь точки $B_1(0; b)$ и $B_2(0; -b)$, ординаты которых $y = \pm b$ получим, положив в уравнении (II.29) $x = 0$. Поэтому и фокусы $F_1^*(0; c)$, $F_2^*(0; -c)$ гиперболы (II.29), где, как и прежде, $c^2 = a^2 + b^2$, будут расположены на оси B_1B_2.

* Действительная ось гиперболы называется также *фокальной* осью, поскольку фокусы гиперболы могут находиться только на действительной оси.

Две гиперболы, которые определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

при одних и тех же значениях параметров a и b называются *сопряженными*. Сопряженные гиперболы имеют одни и те же асимптоты, но у них действительные и мнимые оси как бы поменялись ролями. На рис. 48 гипербола (II.29) показана пунктиром.

Пример 1. Найти величины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы

$$64x^2-25y^2=1600.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на 1600 и тем самым приведя его к каноническому виду, имеем

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{64}=1.$$

Отсюда

$$a^2=25;\ b^2=64;\ a=5;\ b=8;\ c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{89}\approx 9{,}434$$

и, следовательно,

$$2a=10;\ 2b=16;\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{89}}{5}\approx 1{,}8868.$$

Асимптотами рассматриваемой гиперболы согласно (II.24) будут прямые

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 1{,}6x,$$

а ее фокусы, которые, как уже отмечалось, всегда расположены на действительной оси гиперболы, будут находиться в точках

$$F_1(-\sqrt{89};\ 0)\ \text{ и }\ F_2(+\sqrt{89};\ 0).$$

Пример 2. Найти точки пересечения эллипса $9x^2+25y^2=232$ и гиперболы $3x^2-8y^2=12$, а также полуоси, фокусы и эксцентриситеты этих кривых.

Решение. Для того чтобы найти точки пересечения заданных кривых, надо решить систему их уравнений. В данном примере, вычтя из первого уравнения утроенное второе, получим

$$\begin{array}{l|l} 9x^2+25y^2=232 & +1 \\ 3x^2-8y^2=12 & -3 \end{array}$$

$$49y^2=196;\ y^2=4;\ y=\pm 2.$$

Подставив значение y^2 в первое уравнение, получаем

$$9x^2+25\cdot 4=232;\ x^2=\frac{132}{9};\ x=\frac{\pm\sqrt{132}}{3}\approx\pm 3{,}830,$$

так что искомыми будут следующие четыре точки:

$$M_1\left(\frac{+\sqrt{132}}{3};\ +2\right),\ M_2\left(\frac{+\sqrt{132}}{3};\ -2\right),\ M_3\left(\frac{-\sqrt{132}}{3};\ -2\right),\ M_4\left(\frac{-\sqrt{132}}{3};\ +2\right).$$

Далее, приведя к каноническому виду оба уравнения, имеем

$$\frac{x^2}{\left(\frac{232}{9}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{232}{25}\right)}=1,\quad \frac{x^2}{\left(\frac{12}{3}\right)}-\frac{y^2}{\left(\frac{12}{8}\right)}=1.$$

Следовательно, для эллипса

$$a^2_{эл} = \frac{232}{9};\ b^2_{эл} = \frac{232}{25};\ a = \frac{\sqrt{232}}{3} \approx 5{,}077;\ b = \frac{\sqrt{232}}{5} \approx 3{,}046;$$

$$c_{эл} = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{4}{15}\sqrt{232};\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

и, соответственно, для гиперболы

$$a^2_{гип} = \frac{12}{3};\ b^2_{гип} = \frac{12}{8};\ a = \sqrt{4} = 2;\ b = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}225;$$

$$c_{гип} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{11}{2}};\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{11}{8}} \approx 1{,}173.$$

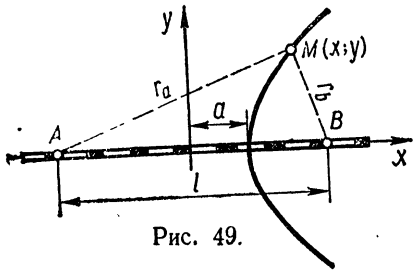


Рис. 49.

Пример 3. Две железнодорожные станции A и B находятся на расстоянии l *км* одна от другой. В точку M груз можно доставить со станции A либо по прямой автотранспортом, либо по железной дороге до станции B, а оттуда автомобилями (рис. 49). При этом железнодорожный тариф (цена перевозки 1 m на 1 *км*) составляет m рублей, погрузка — разгрузка обходится в k рублей (за 1 m) и тариф автотранспорта — n рублей ($n > m$). Определим так называемую зону влияния железнодорожной станции B, т. е. ту зону, в которую дешевле доставлять груз из A смешанным путем: по железной дороге и затем автотранспортом.

Решение. Стоимость доставки 1 m груза по пути AM составляет $r_a n$, где $r_a = AM$, а по пути ABM она будет равна $lm + k + r_b n$. Нам надо решить двойное неравенство $r_a n \gtrless lm + k + r_b n$ и определить, как распределятся точки на плоскости $(x; y)$, в которые дешевле доставлять груз либо первым, либо вторым путем.

Найдем уравнение линии, образующей границу между этими двумя зонами, т. е. геометрическое место точек, для которых оба пути «равно выгодны»:

$$r_a n = lm + k + r_b n.$$

Из этого условия получаем

$$r_a - r_b = \frac{lm + k}{n} = \text{const}.$$

Следовательно, линия раздела — гипербола. Для всех внешних точек этой гиперболы более выгоден первый путь, а для внутренних — второй. Поэтому гипербола и очертит зону влияния станции B. Вторая ветвь гиперболы очертит зону влияния станции A (груз доставляется со станции B). Найдем параметры нашей гиперболы. Ее большая ось

$$2a = \frac{lm + k}{n},$$

а расстояние между фокусами (которыми являются станции A и B) в данном случае $2c = l$.

Таким образом, условие возможности этой задачи, определяемое соотношением $a < c$, будет

$$\frac{k + lm}{n} < l, \text{ или } l > \frac{k}{n - m},\ n > m.$$

Упражнения

1. Написать уравнение гиперболы с полуосями $a = 5$, $b = 12$ и определить для нее c и ε.

2. Лежат ли на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$ следующие точки: $M_1(-8;\ 6\sqrt{3})$, $M_2(6;\ 3\sqrt{5})$, $M_3(-3;\ 2\sqrt{6})$, $M_4(5;\ -7)$? Лежат ли точки $A(3;\ 2)$, $B(2;\ -3)$, $C(5;\ 6)$ на одной из асимптот этой гиперболы?

3. Написать уравнение гиперболы, у которой:

а) фокусы имеют координаты $(\pm 3;\ 0)$ и вещественная ось равна 4;

б) фокусы имеют координаты $(0;\ \pm 4)$ и вещественная ось равна 6;

в) фокусы имеют координаты $(\pm 3;\ 0)$ и вещественная ось равна 8.

4. Построить по точкам гиперболу, рассмотренную в примере 1, а также сопряженную с ней гиперболу (II.29).

5. Найти величину осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$.

6. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ и ее асимптот с прямой $2x + 3y = 0$.

7. Найти точки пересечения эллипса $2x^2 + 3y^2 = 16$ с гиперболой $x^2 - 2y^2 = 1$ и ее асимптотами.

8. Построить по точкам эллипс и гиперболу, рассмотренные в примере 2, и проверить графическим путем ранее полученные результаты. Сравнить, сколько времени требуют графический и аналитический методы и какую точность может обеспечить каждый из этих методов.

При определении гиперболы мы потребовали, чтобы постоянная a удовлетворяла условиям

$$0 < a < c.$$

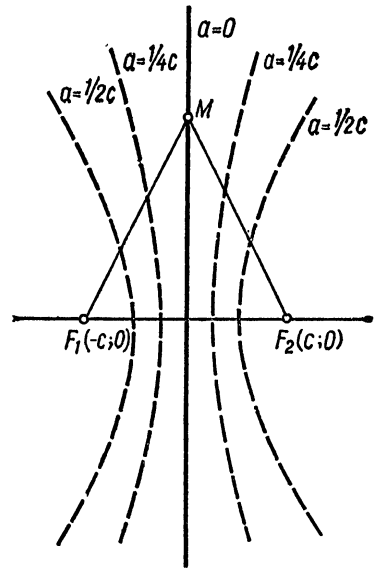


Рис. 50.

Исследуем теперь, какие геометрические места точек будут соответствовать предельным случаям $a = 0$ и $a = c$.

Если разность расстояний от некоторой точки M (рис. 50) до точек F_1 и F_2 равна нулю ($2a = 0$; $a = 0$), то эта точка равноудалена от F_1 и F_2. Следовательно, геометрическое место точек, разность расстояний которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 равна нулю, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F_2 и проходящую через его середину.

Если $a = c$, то очевидно, что геометрическое место точек M, для которых $|F_1M - F_2M| = 2a = 2c$, будет состоять только из самих точек F_1, F_2 и всех точек, находящихся на одном из продолжений отрезка F_1F_2 (рис. 51).

Таким образом, при $0 \leqslant a \leqslant c$, т. е. когда параметр a пробегает все значения от $a = c$ до $a = 0$, соответствующие гиперболы, непрерывно изменяя свою форму (и эксцентриситет от $\varepsilon = 1$ до $\varepsilon = \infty$), покрывают всю плоскость (x, y), причем через каждую точку плоскости проходит только одна гипербола. При этом для $a = 0$ две ветви гиперболы сливаются, переходя в ось Oy. Сам отрезок F_1F_2, не принадлежащий к семейству гипербол, является предельным случаем эллипса $a = c$; $b = 0$.

Некоторые из этих гипербол показаны на рис. 50 и 51 пунктирными линиями. Читателю будет полезно дополнить эти рисунки, построив еще несколько гипербол при фиксированном c, но при различных a (по образцу рис. 48).

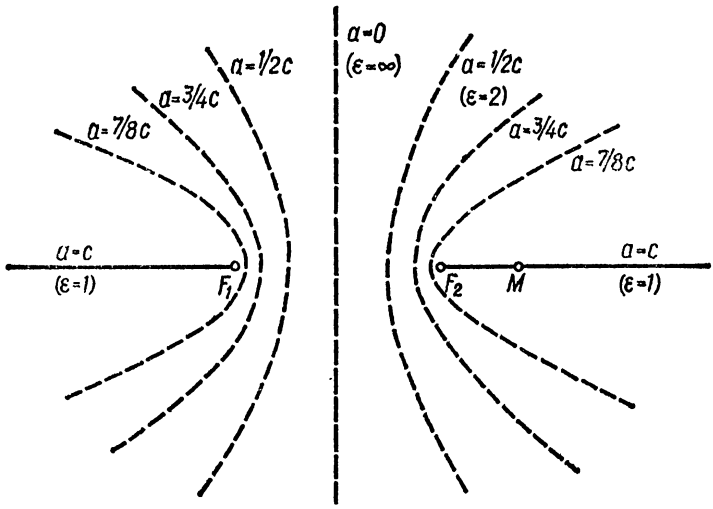


Рис. 51.

§ 18. Общее преобразование координат. Равносторонняя гипербола

Одна и та же линия в различных системах координат представляется различными уравнениями. Часто возникает необходимость, зная уравнение некоторой линии в одной системе координат («старой»), найти уравнение той же линии в другой системе («новой»). Для этой цели служат *формулы преобразования координат* которые устанавливают связь между старыми и новыми координатами произвольной точки M.

Любую новую систему прямоугольных декартовых координат $X^*O^*Y^*$ можно получить из любой старой системы XOY с помощью двух движений (рис. 52): 1) параллельным переносом совмещаем начало O с точкой O^*, сохраняя неизменным направление осей, в результате чего получаем вспомогательную систему $X'O^*Y'$ (обозначенную на рисунке пунктиром); 2) поворотом вспомогательной системы вокруг точки O^* до совмещения с новой системой $X^*O^*Y^*$.

Эти же два движения можно выполнить и в обратном порядке, как показано на рис. 53,— сначала поворот вокруг O, дающий вспомогательную систему $X'OY'$, а затем параллельный перенос в точку O^*, дающий новую систему $X^*O^*Y^*$.

Формулы преобразования координат при параллельном переносе осей мы уже вывели в § 5 гл. I; переходим к выводу формул преобразования координат при повороте осей.

Возьмем в системе координат xOy точку M (рис. 54) с координатами

$$x = OP;\ y = PM.$$

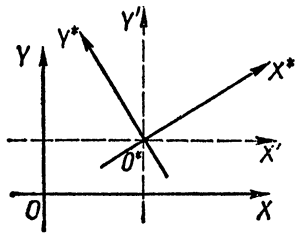


Рис. 52.

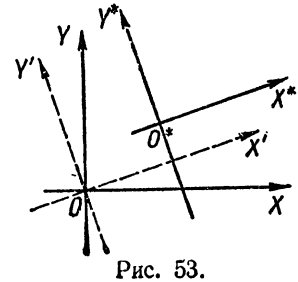


Рис. 53.

Повернем эту систему вокруг начала координат O против движения часовой стрелки на угол α. Как и прежде, угол α будем считать положительным, если он образован поворотом осей против движения стрелки часов. В результате поворота осей получится новая система координат x^*Oy^*, относительно которой та же точка M имеет координаты

$$x^* = OP^*; \quad y^* = P^*M.$$

Найдем соотношения между координатами точки M в старой и новой системах. Проведем прямые $P^*A \parallel Ox$ и $P^*B \parallel Oy$. В таком случае

$$x = OP = OB - PB = OB - AP^* = OP^* \cos\alpha - P^*M \sin\alpha,$$
$$y = PM = PA + AM = BP^* + AM = OP^* \sin\alpha + P^*M \cos\alpha,$$

поскольку $\angle AMP^* = \angle BOP^* = \alpha$, как углы, образованные взаимно перпендикулярными сторонами.

Заменяя теперь в полученных равенствах $OP^* = x^*$, $P^*M = y^*$, мы и приходим к формулам, позволяющим найти старые координаты точки по известным новым*:

$$\left.\begin{aligned} x &= x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha, \\ y &= x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.30)}$$

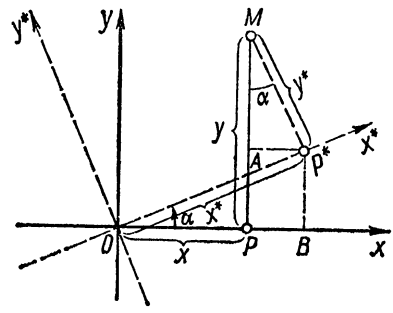


Рис. 54.

Решив систему уравнений (II.30) относительно x^* и y^* (что читателю полезно выполнить в виде упражнения), получим формулы

$$\left.\begin{aligned} x^* &= x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y^* &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.31)}$$

с помощью которых находятся новые координаты точки по известным ее старым координатам. Эти же формулы можно получить и непосредственно из формул (II.30) при помощи следующего рассуждения. Если новая система получается поворотом старой на угол α, то старая система получается поворотом новой на угол $-\alpha$. Поэтому, поменяв в равенствах (II.30) местами старые и новые координаты и заменив одновременно α на $-\alpha$, получим формулы (II.31).

Вернемся теперь к дальнейшему изучению свойств гиперболы. В предыдущем параграфе мы видели, что мнимая ось гиперболы $2b$ может быть больше, меньше или равна действительной оси $2a$. Если действительная и мнимая оси равны ($a = b$), то гипербола называется *равносторонней* (или *равнобочной*).

Асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны и образуют с осями углы по 45° каждый, так как ее основной прямоугольник (при $a = b$) переходит в квадрат, диагонали которого взаимно перпендикулярны и направлены к сторонам под углами в 45°. Естественно, возникает мысль принять взаимно перпендикулярные асимптоты за новые оси координат, выполнив преобразование поворота осей. Повернем оси координат на угол $\alpha = -45°$, тогда ось Oy^* совпадет с асимптотой $y = +x$, а ось Ox^* — с асимптотой $y = -x$. Асимптоты станут новыми осями координат. Придав им обычное положение (т. е. направив ось абсцисс горизонтально), получим рис. 55, на котором новые оси обозначены Ox^*, Oy^* (и в отличие от рис. 54 изображены не пунктирными, а сплошными линиями).

---

* Для того чтобы легче было запомнить формулы (II.30), заметьте, что в выражении для y имеем «полный порядок» (синус стоит раньше косинуса, а между членами правой части стоит знак плюс). Напротив, в выражении для x мы имеем «полный беспорядок» (сначала косинус, потом синус, а между членами — знак минус).

В старой системе координат уравнению гиперболы (II.21) при $a = b$ можно придать такой вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

или

$$(x - y)(x + y) = a^2. \tag{II.32}$$

Каким же будет уравнение равносторонней гиперболы в новой системе координат?

Подставив в формулы (II.31) заданное значение угла поворота осей $\alpha = -45°$, получаем

$$x^* = x\cos(-45°) + y\sin(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y),$$

$$y^* = -x\sin(-45°) + y\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y).$$

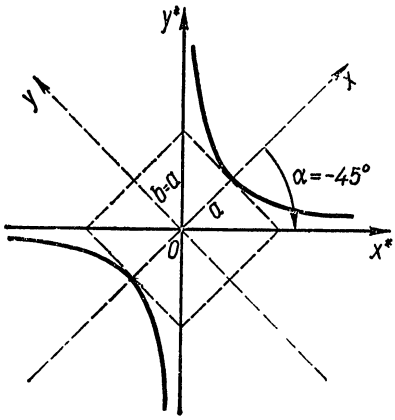


Рис. 55.

Отсюда

$$x - y = \sqrt{2}x^*, \quad x + y = \sqrt{2}y^*.$$

Внося эти значения в (II.32), имеем

$$\sqrt{2}x^* \cdot \sqrt{2}y^* = a^2, \text{ или } x^*y^* = \frac{a^2}{2}.$$

Положив для краткости $\frac{1}{2}a^2 = k$, придаем этому уравнению окончательный вид:

$$x^*y^* = k, \tag{II.33}$$

где k — постоянная величина.

Итак, равносторонняя гипербола, отнесенная к своим асимптотам $x^* = 0$; $y^* = 0$, представляет собой график обратной пропорциональности, которому (меняя роли старых и новых осей координат, т. е. опуская звездочки) можно придать его обычный вид

$$y = \frac{k}{x}. \tag{II.34}$$

В частности, закон Бойля—Мариотта

$$PV = \text{const}$$

(в системе координат давление P, объем V) описывается уравнением равносторонней гиперболы.

Общий случай дробно-линейной функции

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

который легко привести к виду

$$y = n + \frac{k}{cx + d}, \text{ или } y - n = \frac{k}{cx + d},$$

преобразованием параллельного переноса

$$x' = x \mp \frac{d}{c}, \quad y' = y - n$$

может быть сведен к равносторонней гиперболе.

Эксцентриситет равносторонней гиперболы не зависит от постоянной k (т. е. от $a = \sqrt{2k}$) и всегда равен $\sqrt{2}$, так как при $a = b$ согласно формулам (II.20) и (II.26) имеем

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp a^2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Пример 1. Найти уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку (2; 4), а затем определить величину ее действительной полуоси.

Решение. Подставив координаты заданной точки $x = 2$, $y = 4$ в уравнение (II.34), находим, что $k = xy = 8$ и, следовательно, уравнение искомой гиперболы

$$y = \frac{8}{x}.$$

Воспользовавшись соотношением $\frac{1}{2}a^2 = k$, по известному k определяем полуось $a\sqrt{2k} = \sqrt{16} = 4$. Мнимая полуось b равна действительной, поскольку по условию гипербола равносторонняя ($a = b$).

Пример 2. Решить графическим путем общее квадратное уравнение *

$$ax^2 \mp bx \mp c = 0, \tag{II.35}$$

воспользовавшись для упрощения построений свойствами равносторонней гиперболы.

Решение. Общее квадратное уравнение имеет два независимых параметра (отношения двух любых его коэффициентов к третьему, не равному нулю). Прямая и гипербола $\left(\frac{x^*}{a^*}\right)^2 - \left(\frac{y^*}{b^*}\right)^2 = 1$ совместно определяются четырьмя параметрами, так что мы можем двумя из них распорядиться по своему усмотрению. Эту возможность выбора двух параметров лучше всего используем, взяв простейшую из гипербол $y = \frac{1}{x}$. Разделив общее квадратное уравнение на x, имеем

$$ax \mp b \mp \frac{c}{x} = 0.$$

Произведя замену $\frac{1}{x} = y$, получим $ax \mp b \mp cy = 0$ — уравнение прямой линии, точки пересечения которой с простейшей равносторонней гиперболой и дают корни квадратного уравнения (рис. 56):

$$\left.\begin{aligned} ax \mp cy \mp b &= 0, \\ y &= \frac{1}{x}, \end{aligned}\right\} \tag{II.36}$$

поскольку система (II.36) эквивалентна исходному уравнению (II.35).

Для большего удобства гиперболу $y = \frac{1}{x}$ строим один раз навсегда, а прямую $ax \mp cy \mp b = 0$ проще всего определить отрезками, отсекаемыми ею на осях, т. е. двумя точками

$$\left(x = 0;\ y = -\frac{b}{c}\right) \text{ и } \left(y = 0;\ x = -\frac{b}{a}\right).$$

* Обратите внимание на то, что значения букв a, b, c здесь уже совершенно иные, чем в § 15—18.

Тогда, проведя через эти точки прямую и прочтя абсциссы точек ее пересечения с гиперболой, мы найдем искомые корни x_1 и x_2 уравнения (II.35). На рис. 56 приведено графическое решение уравнения

$$100x^2 + 110x - 126 = 0,$$

корни которого $x_1 = -1{,}80$ и $x_2 = +0{,}70$, а отрезки на осях (вычисленные с тремя значащими цифрами): $\left(x = 0;\ y = -\frac{b}{c} = \frac{110}{126} = 0{,}873\right)$ и $\left(y = 0;\ x = -\frac{b}{a} = -\frac{110}{100} = -1{,}10\right)$.

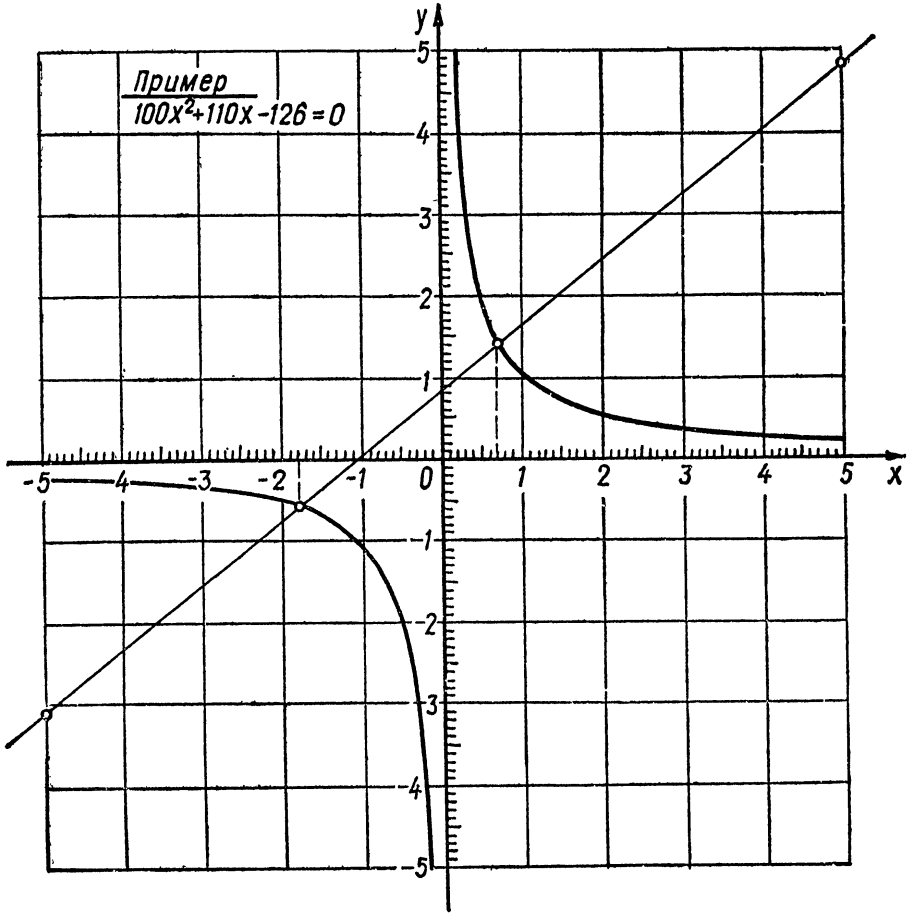


Рис. 56.

Точность построений можно увеличить, если прямую задать точками с достаточно большими абсциссами, скажем, $x = \mp 5$, тогда прямая $ax + cy + b = 0$ будет определяться следующими двумя точками:

$\left(x = -5;\ y = \frac{5a - b}{c} = -3{,}10\right)$ и $\left(x = 5;\ y = -\frac{5a + b}{c} = 4{,}84\right)$. На рис. 56, кон-

кратности ради, приведены также данные для рассматриваемого примера $a = 100$, $b = 110$, $c = -126$. Определяющие точки показаны кружочками.

Саму прямую реализуем в виде черты, проведенной острой иглой на линейке (или угольнике, параллельно его гипотенузе) из прозрачного материала. Такая черта хорошо видна на фоне графика, а при желании ее легко подкрасить, пройдясь по ней авторучкой с анилиновыми чернилами. Во избежание ошибки, вызванной параллаксом, линейку на рисунок следует класть чертой вниз *.

Исследуем теперь частные случаи квадратного уравнения (II.35). При $a = 0$ квадратное уравнение вырождается в линейное $bx + c = 0$, и в полном соответствии с этим прямая

$$bx + c = 0, \text{ или } x = -\frac{c}{b},$$

параллельная оси ординат, пересекает гиперболу только в одной точке, а вторую точку пересечения можно мыслить удаленной в бесконечность. Таким образом, приходим к выводу: *один из корней квадратного уравнения, по мере приближения a к нулю, будет* (по абсолютной величине) *беспредельно увеличиваться*, что сокращенно можно записать $|x_2| \to \infty$ при $a \to 0$.

При $b = 0$ получаем прямую $y = -\frac{a}{c}x$, проходящую через начало координат и пересекающую обе ветви гиперболы в симметричных относительно начала точках.

При $c = 0$ (аналогично случаю $a \to 0$) пересечение во второй точке наступит только при $y \to \infty$, т. е. при $x = \frac{1}{y} = 0$.

Возможно, что прямая $ax + cy + b = 0$ совсем не пересечет гиперболу. Это будет означать, что уравнение (II.35) имеет комплексные корни. Графические методы позволяют находить корни и в этом случае, однако объем книги не разрешает нам рассмотреть этот вопрос.

Если же прямая будет только касаться одной из ветвей гиперболы, то оба корня x_1 и x_2 совпадут. Читателю полезно выполнить рис. 56 на миллиметровой бумаге в масштабе 1 = 10 *мм* (или в большем), а затем проверить на конкретных примерах все случаи, рассмотренные выше.

Упражнения

1. Найти формулы преобразования координат, начало которых перенесено в точку (4; 5), а оси повернуты на угол $\alpha = 30°$.

2. Определить, какие из точек $M_1(-2; 3)$; $M_2(-1; -5)$, $M_3(10; -5)$ лежат на гиперболе $y = \frac{5}{x}$?

3. Построить равностороннюю гиперболу $y + 3 = \frac{k}{x + 4}$, проходящую через точку (—3; —2), и найти ее оси.

4. Решить графическим путем следующие квадратные уравнения: а) $100x^2 - 110x - 126 = 0$, б) $126x^2 - 100x - 100 = 0$, в) $173x^2 + 89x - 137 = 0$, а затем проверить результаты, вычислив их корни по формуле $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

5. Найти точки пересечения гиперболы $xy = 1$ с эллипсом $16x^2 + 9y^2 = 144$.

---

* Решение квадратного уравнения — задача очень простая, и мы так подробно остановились на технике работы с «подвижной прямой» лишь потому, что в дальнейшем будем неоднократно пользоваться этим приемом при решении более сложных задач.

§ 19. График квадратичной функции

Общий вид квадратичной функции:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \tag{II.37}$$

Как видим, в состав этой функции непременно должны входить квадрат аргумента ax^2 ($a \neq 0$), а в общем случае также его первая степень bx и свободный член c. Если $a = 0$, то квадратичная функция вырождается в линейную $y = bx + c$.

Наше изучение начнем с простейшего частного случая

$$y = x^2 \quad (a = 1,\ b = 0,\ c = 0). \tag{II.38}$$

Так как в уравнение (II.38) входит только четная степень x, то график функции $y = x^2$ симметричен относительно оси y (ордината точек с абсциссами $-x$ и $+x$ одна и та же, $y = (-x)^2 = (+x)^2$). При возрастании $|x|$ неограниченно растет также и y, так что рассматриваемая кривая является разомкнутой, или, как говорят, уходит в бесконечность.

Вся кривая расположена над осью абсцисс, поскольку $y > 0$ при любом $x \neq 0$. При $x = 0$ y также равен нулю (одну точку кривой мы, следовательно, получили). Остальные точки в любом требуемом количестве можно вычислить из уравнения $y = x^2$, задаваясь произвольными значениями x, что мы сделали в следующей таблице:

x	0	0,5	1,0	1,5	2	3	4	5	. . .
y	0	0,25	1,00	2,25	4	9	16	25	. . .

Отметив эти точки на плоскости и соединив их плавной кривой, получаем график функции $y = x^2$, известный под названием *параболы* (точнее, *квадратичной параболы*, или *параболы Аполлония*, о чем мы скажем более подробно в § 20).

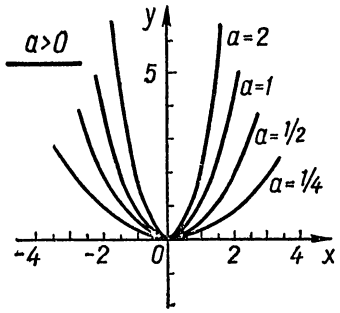


Рис. 57.

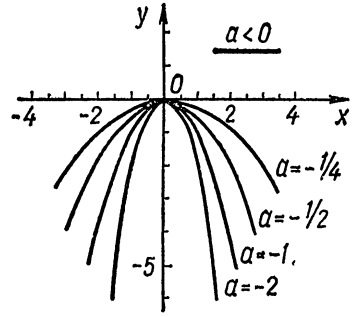


Рис. 58.

Ось симметрии параболы называется просто ее *осью* (в данном случае она совмещена с осью Oy). Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ее *вершиной*. В рассматриваемом частном случае вершина совпадает с началом координат, т. е. с точкой $x = 0$, $y = 0$.

Подобный же график имеет и функция

$$y = ax^2, \tag{II.39}$$

с той оговоркой, что при $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз и расположена целиком над осью Ox, а при $a < 0$ она обращена вершиной вверх, как показано на рис. 57 и 58. На этих же рисунках проиллюстрировано и влияние абсолютной

величины коэффициента a: чем меньше $|a|$, тем больше «раствор» параболы, и наоборот.

Упражнение 1. Вычертить графики следующих парабол:

$$y = 5x^2;\ y = \frac{1}{3}x^2;\ y = -3x^2;\ y = -\frac{1}{4}x^2.$$

К рассмотренному виду легко привести также функцию $y = ax^2 + c$. Для этого осуществим параллельный перенос старой оси абсцисс на величину c, сохранив ось ординат неизменной, согласно формулам

$$x = x^*;\quad y = y^* + c.$$

Перейдя к новым значениям, имеем

$$y^* + c = a(x^*)^2 + c,$$

или, приведя подобные,

$$y^* = ax^{*2}.$$

Вычертив теперь в новой системе координат $(x^*; y^*)$ простейшую параболу $y^* = ax^{*2}$ (что читатель легко выполнит как упражнение), мы и заканчиваем исследование функции $y = ax^2 + c$.

Очевидно, что и в случае общего квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c$$

параллельным переносом оси абсцисс можно прийти к форме, не содержащей свободного члена. С этой целью изучим, как влияет на квадратный трехчлен параллельный перенос оси ординат. Начнем с простейшего случая $y = x^2$ и произведем какое-либо преобразование переноса оси ординат при неподвижной оси абсцисс, например

$$x = x^* + 5;\quad y = y^*.$$

Внося новые значения в исходное уравнение, имеем

$$y^* = (x^* + 5)^2 = x^{*2} + 10x^* + 25,$$

т. е. форму, содержащую аргумент в первой степени и свободный член.

Естественно, возникает мысль: путем параллельного переноса осей

$$x = x^* + m;\quad y = y^* + n$$

общую форму

$$y = ax^2 + bx + c$$

привести к наиболее простой

$$y^* = ax^{*2}.$$

Надо только надлежащим образом выбрать координаты $(m; n)$ начала новой системы координат. Для этого внесем новые значения в исходное уравнение $y = ax^2 + bx + c$ и получим

$$y^* + n = a(x^* + m)^2 + b(x^* + m) + c.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, имеем

$$y^* = ax^{*2} + (2am + b)x^* + (am^2 + bm + c - n).$$

Для того чтобы прийти к форме $y^* = ax^{*2}$, мы должны потребовать, чтобы каждое из выражений в скобках обратилось в нуль:

$$\left.\begin{aligned} 2am + b &= 0,\\ am^2 + bm + c - n &= 0, \end{aligned}\right\}$$

и из этих условий определить m и n, которые вначале были совершенно произвольными величинами.

Решив последнюю систему, находим

$$m = -\frac{b}{2a},$$

$$n = am^2 + bm + c = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, общий квадратичный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ в системе координат, отнесенной к началу $m = -\frac{b}{2a}$; $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$, будет иметь своим графиком параболу $y^* = ax^{*2}$.

Другими словами: *графиком трехчлена* $y = ax^2 + bc + c$ *служит парабола* $y^* = ax^{*2}$ *с вершиной в точке*

$$m = -\frac{b}{2a}; \quad n = \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{II.40}$$

и с осью симметрии, параллельной оси ординат.

Точки пересечения этой параболы с осями Ox и Oy найдем, положив в уравнении (II.37) соответственно $y = 0$ или $x = 0$. В результате получим одну точку $(0; c)$ на оси ординат Oy и две точки $\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; 0\right)$ на оси Ox, так как в последнем случае абсциссы этих точек являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Если $b^2 < 4ac$, то парабола (II.37) не пересекает ось Ox, так как корни рассматриваемого квадратного уравнения будут комплексными. Если $b^2 = 4ac$, обе точки на оси абсцисс сливаются в одну, и в полном соответствии с этим вершина параболы лежит на оси Ox (т. е. ось Ox лишь касается параболы), поскольку при $b^2 = 4ac$, $a \neq 0$ из (II.40) следует, что $n = 0$.

Пример 1. Построить параболу $y = 2x^2 - 7x + 3$ и определить точки ее пересечения с осями Ox и Oy.

Решение. В данном примере $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$. По известным коэффициентам a, b, c согласно формулам (II.40) находим координаты вершины параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{4}; \quad n = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 3 - 49}{4 \cdot 2} = -3\frac{1}{8}.$$

Проведя через эту вершину оси координат, параллельные данным, строим в новой системе параболу $y^* = 2x^{*2}$ (рис. 59). Далее, положив в заданном уравнении $x = 0$, находим $y = 3$, что и дает точку пересечения параболы с осью ординат. Значению $y = 0$ соответствуют значения $x = \frac{1}{2}$ и $x = 3$, которые определяем как корни квадратного уравнения $2x^2 - 7x + 3 = 0$, так что наша парабола пересекает ось абсцисс в двух точках: $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $(3; 0)$.

Упражнение 2. Построить графики следующих трехчленов:

$$y = x^2 + 2x + 3; \quad y = 3x^2 + 5x - 8; \quad y = 2x^2 - 7x + 10$$

и найти для соответствующих им парабол вершины и точки пересечения с осями Ox и Oy.

Все изложенное выше остается в силе и для квадратичного трехчлена

$$x = ay^2 + by + c \quad (a \neq 0). \tag{II.41}$$

Только при этом оси x и y меняются ролями, т. е. ось параболы (II.41) будет параллельна оси абсцисс, а сама парабола при $a>0$ будет обращена вершиной влево, а при $a<0$ — вправо. Остальные исследования уравнения (II.41) читателю полезно выполнить в виде упражнения, построив и все необходимые рисунки.

Пример 2. Определить длину хорды, которую отсекает прямая $\frac{x}{4}-\frac{y}{9}=1$ от параболы $x=\frac{4}{3}(y^2+5y+4)$.

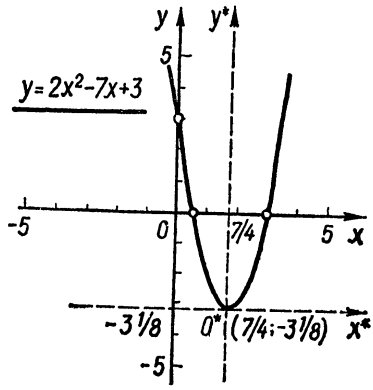


Рис. 59.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой $9x-4y=36$, исключив x из системы (умножив первое уравнение на $+9$, а второе на -1 и сложив результаты):

$$\begin{array}{l|l} x=\frac{4}{3}(y^2+5y+4) & +9 \\ 9x=4y+36 & -1 \end{array}$$

$$0=12y^2+56y+12 \text{ или } 3y^2+14y+3=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение и определяя затем x_1 и x_2 по найденным значениям y_1 и y_2 из уравнения прямой, имеем:

$$y_{1;\,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49-9}}{3}=\frac{-7\pm\sqrt{40}}{3}=\frac{-7\pm 6{,}325}{3};\quad x_{1;\,2}=\frac{4}{9}y_{1;\,2}+4.$$

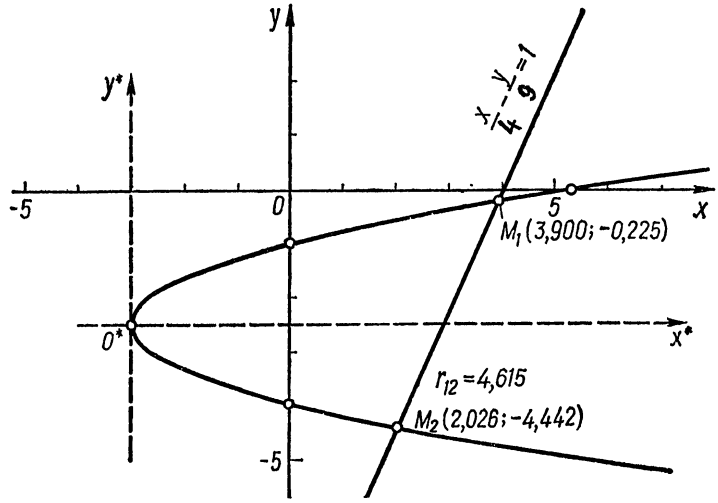


Рис. 60.

Выполнив (с тремя десятичными знаками) необходимые вычисления, находим координаты точек пересечения прямой и параболы (рис. 60):

$$y_1=\frac{-7+6{,}325}{3}=-\frac{0{,}675}{3}=-0{,}225;\quad x_1=+3{,}900;$$

$$y_2=\frac{-7-6{,}325}{3}=-\frac{13{,}325}{3}=-4{,}442;\quad x_2=+2{,}026.$$

Подставив теперь координаты точек $M_1(3{,}900;\ -0{,}225)$ и $M_2(2{,}026;\ -4{,}442)$ в формулу (I.2), определяем длину искомой хорды M_1M_2:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1{,}874)^2 + (-4{,}217)^2} = \sqrt{21{,}295} = 4{,}615.$$

На этом и кончается решение поставленной задачи, но для полноты картины на рис. 60 указаны также вершина параболы и точки ее пересечения с осями Ox и Oy, которые читателю полезно определить в виде упражнения.

Вершину параболы (II.37) или (II.41) можно найти также, выделив в трехчлене полный квадрат. Например, если задана парабола

$$x = y^2 - 4y - 5,$$

то, прибавив к обеим частям уравнения по 9, приводим его к виду

$$x + 9 = y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2.$$

Отсюда непосредственно следует, что вершина данной параболы находится в точке $(-9;\ 2)$. Эти же результаты получим согласно формулам (II.40) по известным $a = 1$, $b = -4$, $c = -5$:

$$m_1 = n = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-20 - 16}{4} = -9;\quad n_1 = m = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2.$$

Замечание. Формулы (II.40) были выведены для определения вершины $(m;\ n)$ параболы (II.37), а в данном случае мы ищем вершину $(m_1;\ n_1)$ параболы (II.41). Так как у этих парабол оси x и y поменялись ролями, то, применяя формулы (II.40) к определению вершины $(m_1;\ n_1)$, мы должны также поменять ролями координаты m и n, т. е. ввести новые координаты вершины параболы (II.41):

$$m_1 = n;\quad n_1 = m.$$

Упражнения

3. Определить, какие из заданных точек $M_1(2;\ -3)$, $M_2(2;\ 1)$, $M_3(34;\ -3)$ $M_4(7;\ 0)$ лежат на параболе $x = y^2 - 6y + 7$.

4. При помощи способа выделения полного квадрата построить параболы

$$y = -x^2 + 8x - 13;\quad x = 3y^2 - 15y + 16;\quad x = -y^2 + 8y - 13,$$

а затем проверить результаты по формулам (II.40). Для рассматриваемых парабол найти точки пересечения с осями Ox и Oy и построить их графики на миллиметровой бумаге.

5. Определить длину хорд, которые отсекает от параболы $3x = 4y^2 + 20y + 16$ каждая из следующих прямых:

а) $6x = y + 9$; б) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1$; в) $y = x + 1$.

Полученные результаты проверить графическим путем, проведя на рис. 60 заданные прямые и определив затем длину хорд при помощи циркуля-измерителя.

§ 20. Парабола и ее директриса

Парабола, как и некоторые другие кривые, была известна еще древним грекам. При изучении свойств кривых второго порядка особенно крупных успехов достиг греческий математик Аполлоний Пергский (ок. 260 — 170 гг. до н. э.).

В поисках способа более совершенного вычерчивания параболы греки обнаружили одно ее замечательное свойство. Если на оси симметрии параболы взять точку F, лежащую на некотором расстоянии (которое еще надо определить) $\frac{p}{2}$ от

вершины, и по другую сторону вершины на том же расстоянии $\frac{p}{2}$ провести прямую ST, перпендикулярную к оси, то каждая из точек параболы будет находиться на одинаковом расстоянии как от точки F, так и от прямой ST (рис. 61).

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая ST — ее *директрисой* (от латинского *directrix* — направляющая).

Действительно, найдем, какой функциональной зависимостью связаны координаты произвольной точки $M(x; y)$, равноудаленной от фокуса F и от директрисы ST, т. е. точки, для которой

$$MN = MF.$$

Согласно рис. 61

$$MN = x + \frac{p}{2};$$

$$(MF)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2,$$

так что, возведя обе части нашего равенства в квадрат и заменив MN и MF их значениями, получим:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Отсюда, выполнив очевидные упрощения, имеем

$$y^2 = 2px, \text{ или } y = \pm\sqrt{2px}. \quad \text{(II.42)}$$

Как видим, это уравнение тождественно с уравнением параболы $x = ay^2$, если положить

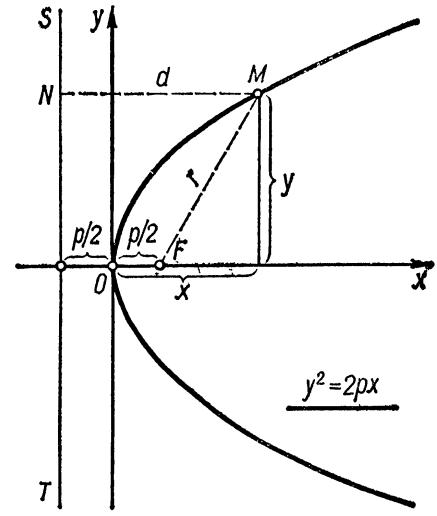


Рис. 61.

$$|a| = \frac{1}{2p}, \text{ или } p = \frac{1}{|2a|}. \quad \text{(II.43)}$$

Замечание. В формулах (II.43) надо брать абсолютную величину коэффициента a, поскольку параметр p, равный расстоянию между фокусом и директрисой параболы, всегда должен быть величиной положительной. Случай $a < 0$ рассмотрим несколько позже.

Проделав всю выкладку в обратном порядке, убеждаемся, что если координаты какой-либо точки удовлетворяют уравнению (II.42), то эта точка лежит на равном расстоянии от фокуса F и от директрисы ST. Другими словами, выполнив это, докажем равносильность уравнений $MN = MF$ и $y^2 = 2px$. В результате покажем (как и при выводе уравнений эллипса или гиперболы), что возведение уравнения $MN = MF$ в квадрат не дало никаких «посторонних точек», удовлетворяющих уравнению (II.42), к чему, вообще говоря, операция возведения обеих частей уравнения в квадрат может привести.

Уравнение (II.42) называется *каноническим уравнением параболы*, а величина p — расстояние фокуса от директрисы, характеризующая «раствор» параболы, называется ее *параметром*. Величину r (рис. 61) называют *фокальным радиусом* точки M.

Итак, *парабола есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной заданной точки* (фокуса) *и от данной прямой* (директрисы). При этом предполагается, что директриса не проходит через фокус, т. е. что $p > 0$.

Пользуясь этим свойством, легко вычертить параболу непрерывным движением — точку за точкой. Для этого укрепим нерастяжимую нить в фокусе будущей параболы и положим вдоль ее директрисы линейку (рис. 62). Второй конец нити

укрепим в точке M_1 треугольника, выбрав эту точку так, чтобы длина нити M_1F равнялась отрезку M_1N_1.

Если теперь острием карандаша натянуть нить, прижимая ее к треугольнику, а последний удерживать на директрисе, то мы и вычертим параболу. В самом деле, во время движения

$$MN = MF,$$

так как от равных в начале движения величин M_1N_1 и M_1F все время вычитается один и тот же отрезок M_1M (величина которого непрерывно изменяется).

Если требуется найти лишь несколько точек параболы, то можно воспользоваться циркулем и линейкой. Для этого параллельно директрисе правее оси y проводим линию с произвольной абсциссой $x = OP > 0$ (рис. 63), а затем из фокуса, как из

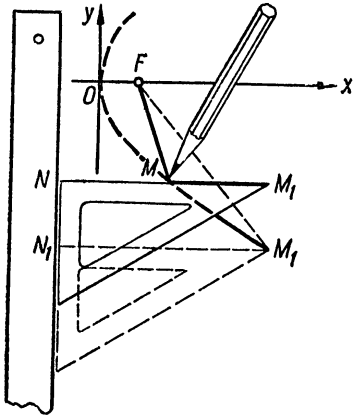


Рис. 62.

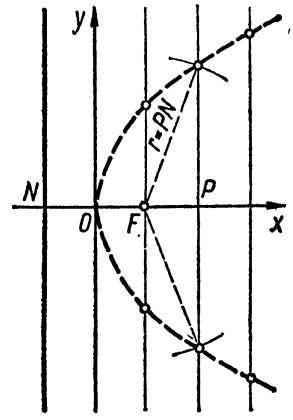


Рис. 63.

центра, делаем на ней засечки радиусом $r = PN$, равным расстоянию между директрисой и прямой. В результате получаем одновременно две точки параболы, и таких точек можно построить сколько угодно.

Если директрису ST параболы поместить справа от начала координат, то ее фокус F и сама парабола $MM_1OM_2M_3$ расположатся так, как показано на рис. 64. При этом абсциссы точек параболы будут удовлетворять условию $x \leqslant 0$, а потому ее уравнение примет вид

$$y^2 = -2px. \qquad \text{(II.44)}$$

Парабола может быть симметрична и относительно оси Oy, в этом случае фокус ее будет лежать на оси ординат, а директриса будет параллельна оси Ox. Как видно, при этом условии координатные оси меняются ролями и уравнение параболы принимает вид

$$x^2 = 2py, \qquad \text{(II.45)}$$

если парабола обращена вершиной вниз (см. рис. 57), и

$$x^2 = -2py, \qquad \text{(II.46)}$$

если она обращена вершиной вверх (см. рис. 58).

Заменив в уравнениях (II.45) и (II.46) параметр p его значением (II.43), приходим к рассмотренной в § 19 параболе (II.39)

$$y = ax^2.$$

Семейство таких парабол при различных значениях коэффициента $a \lesseqgtr 0$ представлено на рис. 57 и 58. В качестве упражнения читателю полезно вычертить эти

рисунки и дополнительно построить на них фокус F и директрису ST парабол (II.45) и (II.46) при различных значениях параметра p.

Влияние параметра p на «раствор» параболы очень наглядно показано также на рис. 64, на котором выделены симметричные точки $M_1\left(-\frac{p}{2}; +p\right)$ и $M_2\left(-\frac{p}{2}; -p\right)$. В этих точках параболу $y^2 = -2px$ пересекает хорда, проходящая через фокус F перпендикулярно к ее оси симметрии Ox, так что длина

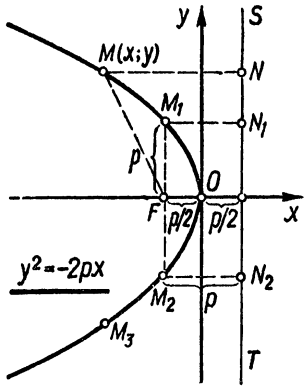


Рис. 64.

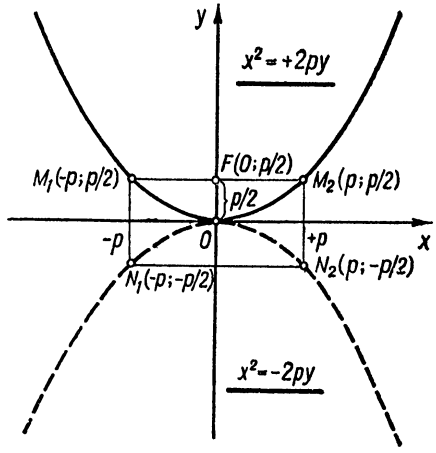


Рис. 65.

хорды M_1M_2, равная $2p$, и характеризует собой величину раствора параболы. Отметим также, что согласно определению параболы отрезок

$$M_1N_1 = M_1F = M_2N_2 = p$$

и, следовательно, четырехугольник $M_1N_1N_2M_2$ есть прямоугольник со сторонами p и $2p$.

Сравнив рисунки 61 и 64, легко видеть, что они являются зеркальным отражением один другого в оси Oy, как и должно быть, поскольку на этих рисунках изображены параболы $y^2 = \pm 2px$. В частности, парабола (II.42) будет проходить через точки N_1 и N_2, симметричные точкам M_1 и M_2, а вершиной для парабол $y^2 = \pm 2px$ служит одна и та же точка O — центр прямоугольника $M_1N_1N_2M_2$, совпадающая с началом координат.

В заключение отметим, что под каноническим уравнением параболы следует понимать любое из четырех уравнений: $y^2 = \pm 2px$, $x^2 = \pm 2py$, а не только уравнение (II.42).

Для того чтобы по заданному значению параметра p построить любую из этих парабол, надо прежде всего построить прямоугольник * со сторонами p и $2p$, совместив его центр с началом координат и направив сторону $2p$ параллельно оси Oy в случае парабол $y^2 = \pm 2px$ или параллельно оси Ox в случае парабол $x^2 = \pm 2py$. В результате мы определим ось параболы, ее вершину, фокус и директрису, а также две точки $M_1\left(-p; \frac{p}{2}\right)$ и $M_2\left(p; \frac{p}{2}\right)$, характеризующие собой раствор параболы. Имея фокус и директрису, легко построить любое необходимое количество точек параболы, как было описано выше. На рис. 65 выполнены эти построения для

* Прямоугольник $(p; 2p)$, по аналогии со случаем гиперболы, можно назвать *основным прямоугольником параболы*, поскольку он однозначно определяет собой данную параболу.

параболы $x^2 = +2py$, директриса которой совпадает со стороной N_1N_2 основного прямоугольника $(p;\ 2p)$. На этом же рисунке пунктиром показана парабола $x^2 = -2py$.

Пример 1. Дана парабола

$$x^2 = -16y.$$

Найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

Решение. Данная парабола симметрична относительно оси Oy и расположена в нижней полуплоскости $y \leqslant 0$. Из заданного уравнения находим

$$2p = 16, \text{ откуда } p = 8.$$

Расстояние фокуса от начала координат равно $\frac{p}{2}$, поэтому его ордината $-\frac{p}{2} = -\frac{8}{2} = -4$, а сам фокус находится в точке $F(0;\ -4)$.

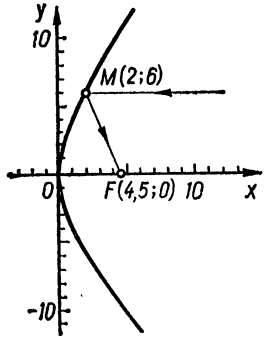


Рис. 66.

Директрисой служит прямая, параллельная оси Ox и отстоящая от последней на расстояние $\frac{p}{2} = 4$. Следовательно, уравнением директрисы нашей параболы будет $y = 4$. Для большей наглядности сделайте рисунок.

Пример 2. Луч, параллельный главной оптической оси параболического зеркала, отразился от точки M (2; 6) зеркала *. Найти уравнение отраженного луча, если осевое сечение зеркала есть парабола $y^2 = 18x$.

Решение. Как известно (см., например [103, стр. 58]), все лучи, параллельные оптической оси параболического зеркала, отразившись от него, пересекаются в фокусе параболы (рис. 66). Поэтому нужно найти уравнение прямой, проходящей через точку M (2; 6) и через фокус F (4,5; 0) параболы $y^2 = 18x$. Воспользовавшись формулой (I.18), находим уравнение искомого луча:

$$\frac{x-2}{4{,}5-2} = \frac{y-6}{0-6}, \text{ или } 12x + 5y - 54 = 0.$$

Отмеченным выше оптическим свойством параболического зеркала пользуются при создании зеркальных телескопов, различных солнечных нагревательных установок, а также прожекторов. Поместив в фокусе параболического зеркала мощный точечный источник света, мы получим плотный поток отраженных лучей, параллельных оси зеркала.

Пример 3. Найти высоту арки моста длиной 24 *м*, если арка имеет вид параболы, уравнение которой $x^2 = -48y$.

Решение. Вершина рассматриваемой параболы находится в начале координат (0; 0), а точки, определяющие собой начало и конец арки, должны иметь абсциссы $x = \pm\frac{24}{2} = \pm 12$. Определив согласно уравнению параболы $x^2 = -48y$ соответствующую им ординату $y = -\frac{(\pm 12)^2}{48} = -3$, находим, что высота арки $h = 0 - y = 3$ *м*. Сделайте рисунок.

Пример 4. Решить графическим путем при помощи параболы $y = x^2$ полное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

* Если параболу вращать вокруг ее оси, то полученная поверхность будет называться *параболоидом вращения*. Параболоид, выполненный из стекла (или металла), отшлифованный и покрытый тонким слоем серебра или алюминия, называется *параболическим зеркалом*.

Решение. Произведем в заданном квадратном уравнении замену $y = x^2$. Тогда исходное уравнение будет эквивалентно системе

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2, \\ ay + bx + c &= 0, \end{aligned}\right\}$$

и его корни найдем как точки пересечения прямой $ay + bx + c = 0$ и параболы $y = x^2$, одной и той же для любого квадратного уравнения.

Таким образом, для определения действительных корней квадратного уравнения надо только вычертить один раз навсегда параболу $y = x^2$. Тогда все решение будет сводиться к построению прямой $ay + bx + c = 0$, что выполняется аналогично тому, как это было описано при решении примера 2 § 18. На рис. 67 в качестве иллюстрации определены корни $x_1 = -1{,}80$ и $x_2 = +0{,}70$, рассмотренного в § 18 уравнения $100x^2 + 110x - 126 = 0$.

Разрешающую прямую

$$100y + 110x = 126$$

в данном примере проще всего провести по точкам

$$x = -3;\ y = \frac{3b - c}{a} = \frac{456}{100} = 4{,}56 \text{ и } y = -1;\ x = \frac{a - c}{b} = \frac{226}{110} = 2{,}06,$$

как показано на рис. 67.

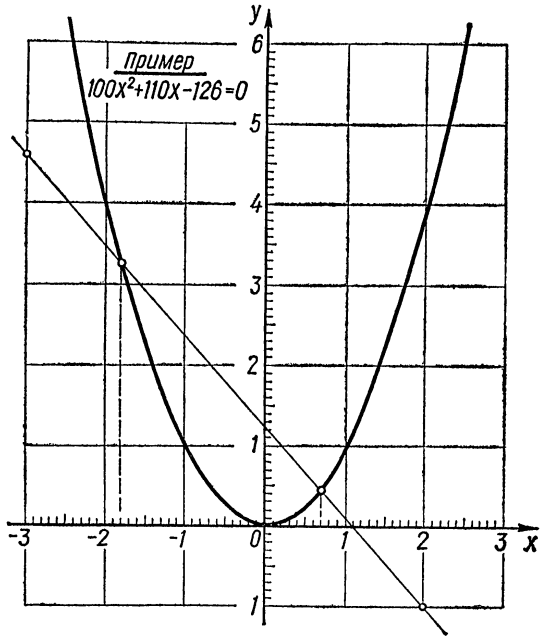


Рис. 67.

Если прямая $ay + bx + c = 0$ не пересекает параболу $y = x^2$, это значит, что корни исходного квадратного уравнения комплексные, если же она только касается параболы — корни x_1 и x_2 совпадают между собой.

Упражнения

1. Найти координаты фокуса параболы $4y^2 - 15x = 0$.
2. Директрисой параболы с вершиной в начале координат служит прямая $3x + 7 = 0$. Написать уравнение параболы и определить координаты ее фокуса.
3. Найти на параболе $x^2 = 4y$ точки, абсциссы и ординаты которых равны.
4. Через фокус параболы $y^2 = -8x$ проведена хорда перпендикулярно к ее оси. Найти длину хорды.
5. Составить уравнение параболы, если известно, что парабола симметрична относительно оси Ox, фокус лежит в точке (3; 0), а вершина — в начале координат.
6. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy, проходящей через точку (4; —6), с вершиной в начале координат.
7. Найти точки пересечения параболы $x^2 = -8y$ с прямой $6x + y - 6 = 0$.
8. Вычислить длину сторон правильного треугольника, вписанного в параболу $x^2 = 2py$, если одна из вершин треугольника находится в начале координат.
9. Через фокус параболы $y^2 = -2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

10. Через точку $M(1; 2)$ провести такую хорду параболы $x^2 = 4y$, которая делилась бы в данной точке пополам.

11. Найти точки пересечения параболы $x^2 = 12y$ с эллипсом

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

12. Арка моста имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что пролет арки равен 24 *м*, а высота — 6 *м*.

13. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой $p = 0{,}1$. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии двух метров от места выхода.

14. Найти геометрическое место центров окружностей, проходящих через данную точку и касающихся данной прямой.

§ 21. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения. Полярные координаты и единое уравнение конических сечений

В следующем параграфе будет показано, что общее уравнение второй степени (II.2) в зависимости от его коэффициентов может представлять собой только эллипс (в частности, окружность), параболу или гиперболу. Правда, оно может также вырождаться в две различные или совпадающие прямые, в точку или мнимое геометрическое место точек, как, например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

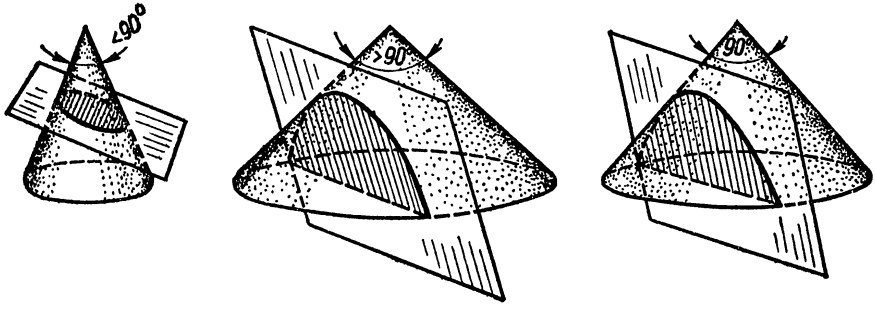


Рис. 68.

В силу такого «аналитического родства» эти три кривые имеют ряд общих свойств. В частности, если одну из них пересекает прямая, то точек пересечения будет только две (касательную можно рассматривать также как линию, пересекающую кривую в двух совпадающих точках).

Естественно предположить у кривых второго порядка существование и «геометрического родства». Действительно, еще в глубокой древности греки получали эти кривые, пересекая прямой круговой конус плоскостью. Так, если взять остроугольный конус и разрезать его перпендикулярно к образующей, то сечение будет иметь форму эллипса. Тупоугольный конус при этом дает гиперболу, а прямоугольный — параболу (рис. 68).

Отсюда произошли и названия кривых, которые были введены Аполлонием Пергским; эллипс (ἔλλειψις) означает изъян, недостаток (угла конуса до прямого), гипербола (ὑπέρβωλη) — преувеличение, перевес (угла конуса над прямым), парабола (παραβολη) — приближение, равенство (угла конуса прямому углу).

Позже греки увидели, что все три кривые можно получить на одном конусе, изменяя наклон секущей плоскости. При этом конус следует брать двуполостный (рис. 69) и мыслить, что он простирается в обе стороны бесконечно далеко.

Последнюю модель легко осуществить таким образом. Если взять настольную лампу, снять с нее абажур и поместить над ней несколько наклонно круглое кольцо

из проволоки, то тень, отбрасываемая в пространство кольцом, будет иметь форму конуса. Этот конус пересекает плоскости стен и потолка под различными углами. Таким путем легко получить все рассматриваемые кривые. Но поскольку конус в данном случае однополостный, то и гипербола будет иметь только одну ветвь. Точно так же граница тени, отбрасываемой круглым абажуром на вертикальную стену, будет иметь форму параболы или гиперболы (рис. 70).

Докажем теперь, что при сечении кругового конуса плоскостью образуются рассматриваемые нами кривые. Наиболее наглядно это удалось сделать бельгийскому математику Пьеру Данделену (*Pierre Dandelin*, 1794—1847), доказательство которого мы и приводим.

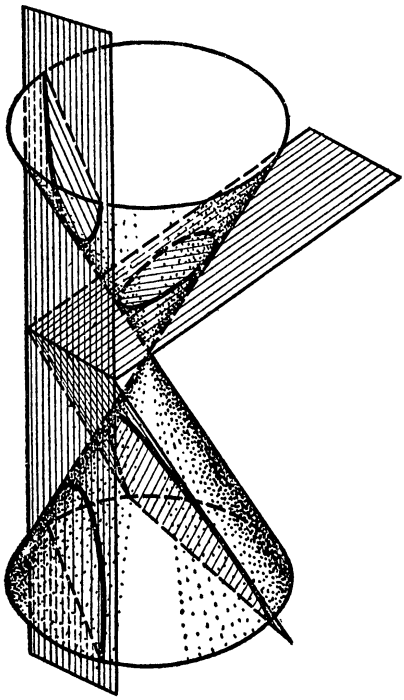


Рис. 69.

Поместим внутри одной из полостей конуса (который для наглядности считаем прозрачным) два шара разных диаметров и пересечем конус плоскостью P, касающейся обоих шаров* в точках F_1 и F_2 (рис. 71).

Покажем, что полученная в результате сечения кривая есть эллипс. Проведем через точку M кривой образующую конуса LM. Тогда отрезки MF_1 и MT_1 равны, как две касательные (F_1M лежит в касательной к шару плоскости P, отрезок MT_1 лежит на

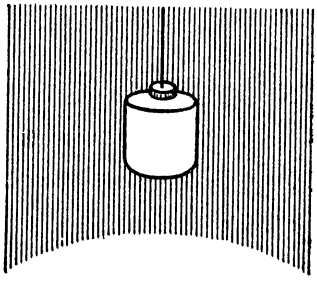


Рис. 70.

конусе, также касательном к шару), проведенные из одной точки к одному и тому же шару (т. е. к окружности, полученной от сечения шара плоскостью F_1MT_1). Аналогичным путем доказываем, что

$$MF_2 = MT_2.$$

Следовательно, сумма расстояний точки M от заданных точек F_1 и F_2

$$MF_1 + MF_2 = MT_1 + MT_2 = T_1T_2 = \text{const}$$

равна величине T_1T_2 (отрезку образующей, заключенной между двумя параллельными окружностями, по которым шары соприкасаются с конусом), постоянной для любой точки M нашей кривой, что и требовалось доказать.

Увеличивая диаметр верхнего шара, будем получать в сечении все более и более вытянутые эллипсы, пока в пределе не получим параболу при положении плоскости P, параллельном одной из образующих конуса. При этом сам шар мыслим удаленным в бесконечность.

* Такую плоскость можно провести следующим образом: проводим произвольную плоскость между шарами, опускаем ее, пока она не коснется малого шара, а затем путем вращения приводим нашу плоскость в соприкосновение со вторым шаром.

Если теперь нижний шар поместить во второй полости конуса *, то в сечении получим гиперболу (рис. 72).

Действительно, в этом случае

$$MF_2 - MF_1 = T_2M - MT_1 = T_2T_1 = \text{const}.$$

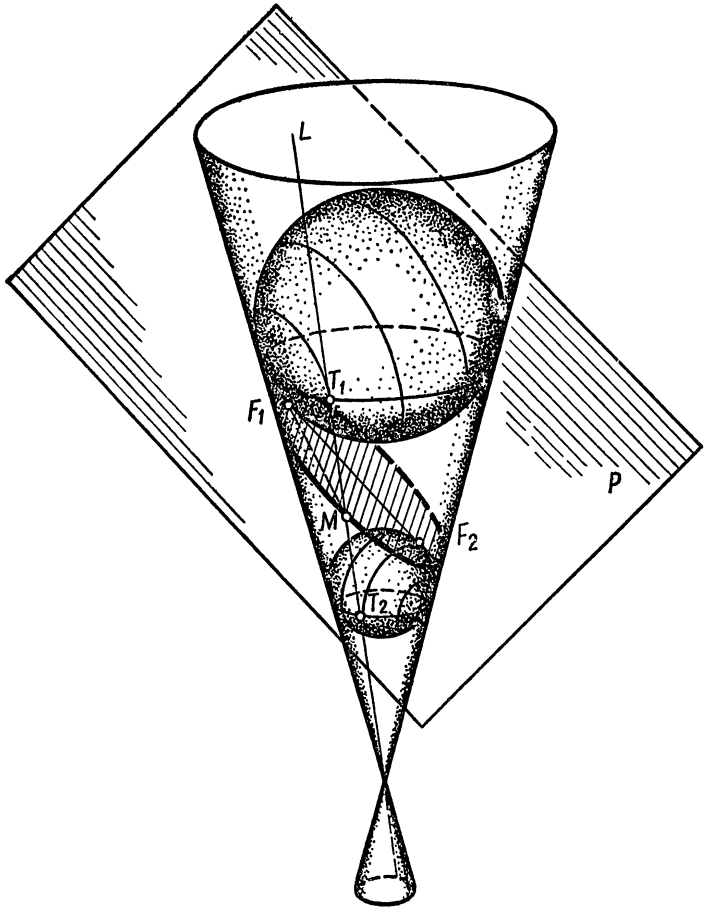


Рис. 71.

Доказательство для случая параболы предлагаем выполнить читателю с целью проверки усвоения изложенного в данном параграфе.

Если секущая плоскость P проходит через вершину конуса (что в начале параграфа было исключено), то вместо эллипса мы получим точку, вместо гиперболы — пару пересекающихся прямых, а вместо параболы — прямую касания плоскости с конусом. Эту прямую можно рассматривать как две прямые, слившиеся в одну.

Кривые второго порядка обладают рядом общих свойств. Так, например, середины параллельных хорд линий второго порядка лежат на одной прямой, называемой *диаметром*. Все диаметры эллипса или гиперболы проходят через центр, поскольку центр является серединой всякой проходящей через него хорды. Все диаметры параболы параллельны ее оси.

* Одновременно мы изменили и диаметры шаров.

Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть k — угловой коэффициент какого-нибудь его диаметра. Проведем параллельно этому диаметру хорды эллипса. Геометрическое место их середин есть другой диаметр эллипса, который называется *сопряженным* первому. Можно показать, что угловой коэффициент k_1 сопряженного диаметра будет определяться равенством

$$kk_1=-\frac{b^2}{a^2}. \qquad \text{(II.47)}$$

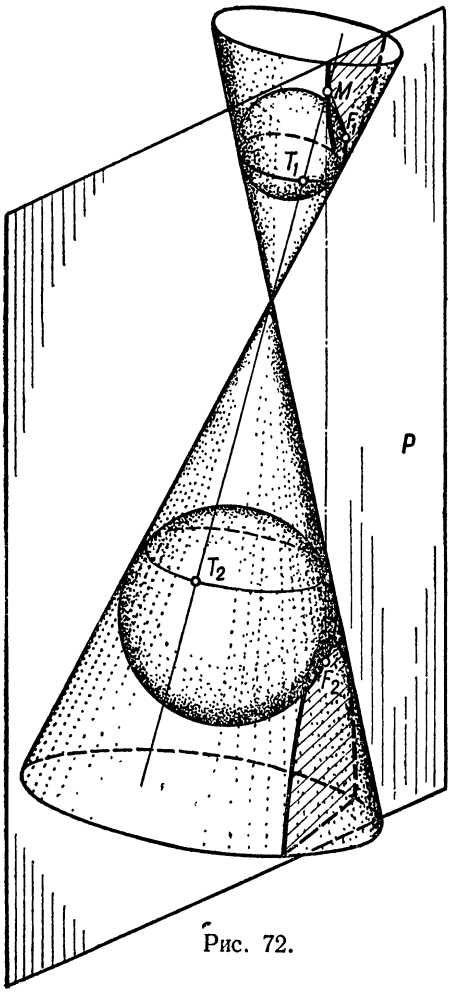


Рис. 72.

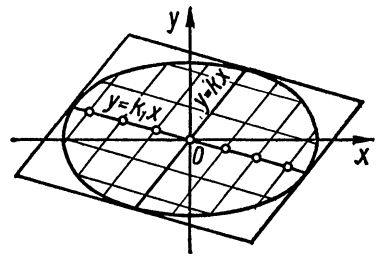


Рис. 73.

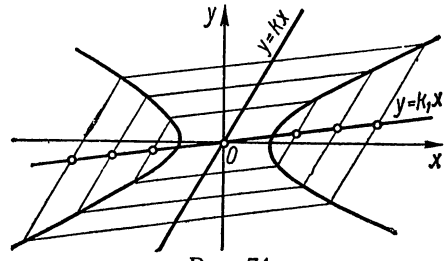


Рис. 74.

Так как это равенство симметрично относительно угловых коэффициентов k и k_1, то определяемые им диаметры будут взаимно сопряженными. Другими словами: *если один из двух диаметров эллипса делит пополам хорды, параллельные второму диаметру, то последний делит пополам хорды, параллельные первому* (рис. 73). Отсюда вытекает, в частности, что касательные к эллипсу в концах его диаметра параллельны между собой и параллельны сопряженному диаметру.

Все сказанное о диаметрах эллипса непосредственно переносится и на диаметры гиперболы. Только условие сопряженности диаметров гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ будет иметь следующий вид:

$$kk_1=\frac{b^2}{a^2}. \qquad \text{(II.48)}$$

На рис. 74 показана одна пара взаимно сопряженных диаметров гиперболы.

Два диаметра, сопряженных друг с другом и вместе с тем взаимно перпендикулярных, называются *главными диаметрами*. У окружности всякий диаметр — главный. У эллипса и гиперболы есть лишь по одной паре главных диаметров — их оси симметрии, т. е. большая и малая оси у эллипса, действительная и мнимая — у гиперболы.

В предыдущем параграфе мы изучили свойства директрисы параболы. Оказывается, что помимо параболы директрисы имеют все остальные кривые второго порядка.

Рассмотрим эллипс, отнесенный к своим осям симметрии,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

и проведем прямую $x=l$, $l>a$, параллельную оси Oy. Найдем расстояние r_2 произвольной точки $M(x;\ y)$ эллипса от его правого фокуса F_2 и расстояние d_2 этой же точки M от прямой $x=l$, а затем вычислим отношение этих расстояний (рис. 75). Так как $d_2=l-x$, а согласно формуле (II.10) § 15 $r_2=a-\varepsilon x$, то

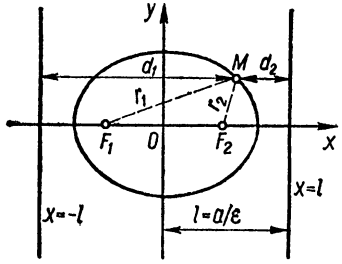


Рис. 75.

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{l-x}=\varepsilon\frac{\frac{a}{\varepsilon}-x}{l-x}.$$

Если взять $l=\frac{a}{\varepsilon}$, то отношение $\frac{r_2}{d_2}$ будет при любом x сохранять постоянное значение, равное ε, поскольку при выбранном l числитель и знаменатель взаимно сократятся.

В силу симметрии то же заключение можно сделать относительно левого фокуса F_1 и прямой с уравнением $x=-\frac{a}{\varepsilon}$.

Эти две прямые

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}, \tag{II.49}$$

перпендикулярные к фокальной оси эллипса и отстоящие на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$ от его центра, называются *директрисами эллипса* *. Как мы выяснили, они обладают следующим свойством: *отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса* ε.

Пример 1. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса

$$16x^2+25y^2=400.$$

Решение. Написав уравнение эллипса в каноническом виде

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,$$

заключаем, что $a^2=25$, $b^2=16$. Следовательно, $c^2=a^2-b^2=9$, откуда

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

* Окружность не имеет директрис, поскольку согласно (II.49) при $\varepsilon=0$ величина $\frac{a}{\varepsilon}=\infty$, так что директрисы окружности удаляются в бесконечность.

Согласно формуле (II.49) директрисы проходят на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}$ от центра эллипса (начала координат), т. е. на расстоянии равном $\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$. Уравнение директрис:

$$x=+\frac{25}{3};\quad x=-\frac{25}{3}.$$

Повторив все сказанное выше в случае гиперболы (а это читателю полезно выполнить в виде упражнения), приходим к выводу, что прямые (II.49) являются ее директрисами. Так как в данном случае $\varepsilon>1$, то $\frac{a}{\varepsilon}<a$ и, следовательно, директрисы гиперболы расположены между ее вершинами (рис. 76).

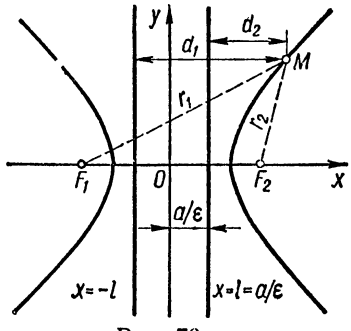


Рис. 76.

Пример 2. Найти эксцентриситет и директрисы гиперболы

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Решение. В данном примере $a^2=16$, $b^2=9$, так что согласно (II.20) $c^2=a^2+b^2=25$ и

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}=1{,}25;\quad \frac{a}{\varepsilon}=\frac{a^2}{c}=\frac{16}{5}=3{,}2.$$

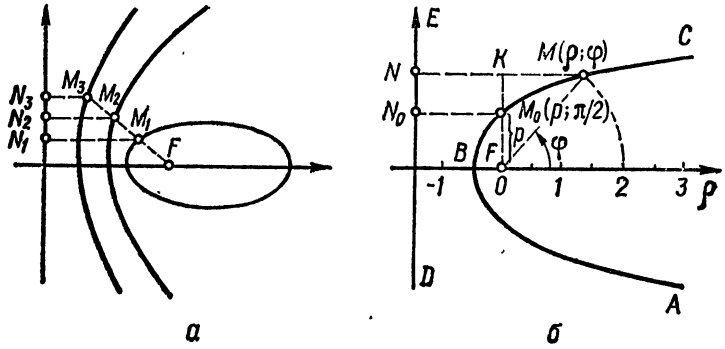


Рис. 77.

Следовательно, директрисами рассматриваемой гиперболы являются прямые

$$x=\pm 3{,}2;\quad x=-3{,}2.$$

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему общему определению конического сечения (эллипса, гиперболы и параболы): *коническое сечение есть геометрическое место точек, отношение расстояний которых до данной точки (фокуса) и до данной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная эксцентриситету* ε. При этом (рис. 77, *а*)

$$\text{эксцентриситет эллипса } \frac{FM_1}{M_1N_1}=\varepsilon<1,$$

эксцентриситет параболы $\frac{FM_2}{M_2N_2} = \varepsilon = 1,$

эксцентриситет гиперболы $\frac{FM_3}{M_3N_3} = \varepsilon > 1.$

Введем теперь полярную систему координат и покажем, что в этой системе все конические сечения могут быть записаны при помощи одного уравнения.

Проведем из произвольной точки O на плоскости полупрямую $O\rho$ и зададим некоторое направление отсчета углов. Каждой точке M плоскости можно сопоставить два числа: ρ — расстояние точки M до O, φ — угол, образуемый полупрямой OM с полупрямой $O\rho$ (рис. 77, *б*).

Число $\rho = OM$ называется *полярным радиусом* точки M, угол φ — ее *полярным углом*, точка O — *полюсом*, а полупрямая $O\rho$ — *полярной осью*. На полярной оси мы должны также указать единицу масштаба. Кроме того, условимся угол φ брать в границах $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Тогда, очевидно, каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел ρ, φ (исключением является полюс, для которого $\rho = 0$, а φ произвольно). Обратно, каждой паре чисел ρ, φ ($\rho \geqslant 0$; $-\pi < \varphi \leqslant \pi$) соответствует единственная точка плоскости, для которой ρ является полярным радиусом, а φ — полярным углом. Полярный радиус и полярный угол точки будем называть ее *полярными координатами*. Как и в случае декартовых координат, полярные координаты условимся записывать в скобках после буквы, обозначающей точку: $M(\rho; \varphi)$, указывая сначала ρ, а потом φ.

Пример 3. Построить точку $M\left(2; \frac{1}{4}\pi\right)$ в полярной системе координат.

Решение. Проведем через полюс полупрямую под углом $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ к полярной оси $\left($другими словами, повернем полярную ось $O\rho$ на угол $\frac{1}{4}\pi = 45°\right)$ и отложим от полюса в положительном направлении оси отрезок OM, равный по длине двум единицам (см. рис. 77, *б*). Конец M этого отрезка и будет искомой точкой $M(\rho; \varphi) = M\left(2; \frac{1}{4}\pi\right)$.

Между декартовыми и полярными координатами одной и той же точки $M(x; y) = M(\rho; \varphi)$ легко установить связь, которая выражается формулами

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.50)}$$

Для того чтобы найти полярные координаты точки, зная ее декартовы координаты, возведем обе части каждого из равенств (II.50) в квадрат и затем сложим их почленно. В результате получим

$$x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

или, поскольку $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$,

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

откуда

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \text{(II.51)}$$

Далее, разделив второе из равенств (II.50) на первое, находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \qquad \text{(II.52)}$$

По формуле (II.52) определяется тангенс полярного угла φ, причем получается два значения (напомним, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), лежащие в разных четвертях. Так как

$y = \rho \sin \varphi$, то из этих двух значений угла φ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и ордината y.

Пример 4. Даны декартовы координаты точки $M: x = 2;\ y = -2$. Найти ее полярные координаты.

Решение. Согласно формулам (II.51) и (II.52) имеем

$$\rho = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2};\ \operatorname{tg} \varphi = -1.$$

Из двух значений $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ и $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ нужно взять $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, так как в данном случае $\sin \varphi$ должен иметь отрицательный знак. Таким образом, полярные координаты данной точки

$$\rho = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83;\ \varphi = -\frac{1}{4}\pi.$$

Постройте эту точку в декартовой и полярной системах координат.

Упражнение 1. Вывести формулы (II.50).

Подобно тому, как и в случае декартовых координат, можно говорить об уравнении кривой в полярных координатах. Именно уравнение

$$\Phi(\rho; \varphi) = 0$$

называется *уравнением кривой в полярных координатах*, если полярные координаты каждой точки кривой ему удовлетворяют. И обратно, любая пара чисел ρ, φ, удовлетворяющая этому уравнению, представляет собой полярные координаты одной из точек кривой.

В качестве примера выведем уравнение конического сечения в полярных координатах, принимая за полюс O один из его фокусов и за полярную ось — фокальную ось этого конического сечения.

Пусть ABC (см. рис. 77, *б*) — дуга конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы), B — вершина, F — фокус и DE — соответствующая директриса.

Совместим фокус F с полюсом O системы координат, а прямую BF с полярной осью $O\rho$, направив ее в сторону, противоположную директрисе. Эксцентриситет кривой, как обычно, обозначим через ε. Пусть M_0 — точка дуги BC конического сечения, лежащая на перпендикуляре к полярной оси, проходящем через фокус F. Обозначим длину FM_0 через p и будем называть ее *фокальным параметром* конического сечения. Тогда полярными координатами точки M_0 будут $\rho = p$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $M_0 = M\left(p; \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка кривой. Составим уравнение, выражающее зависимость между ее полярными координатами ρ, φ и заданными числами ε, p, которые примем в качестве параметров рассматриваемой кривой. По общему свойству всех точек конического сечения имеем

$$\frac{FM}{NM} = \varepsilon. \tag{II.53}$$

При любом расположении точки M на коническом сечении

$$FM = \rho \quad \text{и} \quad NM = N_0M_0 + \rho \cos \varphi.$$

Так как $\frac{FM_0}{N_0M_0} = \varepsilon$, а $FM_0 = p$, то $N_0M_0 = \frac{p}{\varepsilon}$. Следовательно,

$$NM = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi. \tag{II.54}$$

Равенство (II.53) можно переписать в виде

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} \mp \rho \cos \varphi} = \varepsilon,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \qquad \text{(II.55)}$$

Уравнение (II.55) определяет эллипс, если $\varepsilon < 1$, параболу — при $\varepsilon = 1$, гиперболу, когда $\varepsilon > 1$.

В уравнении (II.55) величина p для параболы имеет, очевидно, прежнее значение, то же, что и в уравнении $y^2 = 2px$. В самом деле, для параболы $p = FM_0 = M_0N_0$, т. е. p совпадает с введенным в § 20 параметром параболы, равным расстоянию от фокуса до директрисы.

Для эллипса и гиперболы фокальный параметр p легко выразить через полуоси a и b.

В случае эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ подставим в это уравнение декартовы координаты одной из его точек, а именно, точки $M_0 = M(-c; p)$, после чего получим

$$\frac{c^2}{a^2} \mp \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\frac{p^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Аналогичным путем в случае гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, подставив в уравнение декартовы координаты ее точки $M_0 = M(c; p)$, находим

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1, \text{ или } \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда снова имеем

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2} \quad \text{и} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Итак, уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах (при указанном выше выборе полюса и полярной оси) имеют одинаковый вид (II.55):

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

причем для эллипса и гиперболы фокальный параметр p связан с параметрами a и b формулой

$$p = \frac{b^2}{a}. \qquad \text{(II.56)}$$

Уравнение (II.55) выведено для одной ветви гиперболы, но легко убедиться в том, что ему также удовлетворяют координаты любой точки, расположенной на другой ветви гиперболы.

При $\varepsilon = 0$, как уже отмечалось в § 15, эллипс переходит в окружность. Поэтому, положив в формуле (II.55) $\varepsilon = 0$, находим уравнение окружности в полярных координатах:

$$\rho = p = \text{const}, \tag{II.57}$$

которое имеет более простой вид, чем в случае декартовых координат. При этом центр окружности совмещен с полюсом O, а $p = R$.

Ряд других кривых в полярных координатах также имеет более простые уравнения, чем соответствующие уравнения в декартовых координатах, но эти вопросы выходят за рамки данной книги.

Упражнение 2. Построить в полярной системе координат семейство конических сечений при следующих значениях параметров: $p = 2$; $\varepsilon = 0$, $^1/_2$, $^3/_4$, 1, $^3/_2$, 2.

§ 22. Исследование общего уравнения второй степени

При исследовании общего уравнения второй степени (II.2) для получения более симметричных формул несколько видоизменим обозначения коэффициентов и придадим ему вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{II.58}$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Например, в уравнении $3x^2 - 4xy + y^2 + 6x - 5 = 0$ коэффициенты A, B, C D, E, F имеют следующие значения: $A = 3$, $B = -2$, $C = 1$, $D = 3$, $E = 0$, $F = -5$

Выясним, что представляет собой кривая, описываемая уравнением (II.58), т. е кривая второго порядка *.

Отнесем рассматриваемую кривую к новой системе координат $(x^*; y^*)$, связанной с системой $(x; y)$ формулами (II.30)

$$\begin{aligned} x &= x^* \cos\alpha - y^* \sin\alpha, \\ y &= x^* \sin\alpha + y^* \cos\alpha. \end{aligned}$$

Уравнение кривой, сохраняя при этом форму (II.58), будет иметь новый коэффициент $2B^*$ при x^*y^*:

$$\begin{aligned} 2B^* = -2A \sin\alpha \cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C \sin\alpha \cos\alpha = \\ = (C - A)\sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

так как $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ и $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$.

Очевидно, что всегда можно подобрать угол поворота новой системы координат α так, чтобы этот коэффициент был равен нулю. Поэтому не ограничивая общности, можно считать, что в преобразованном уравнении (II.58) $B^* = 0$.

Будем различать два случая: 1) оба коэффициента, A^* и C^*, отличны от нуля; 2) один из коэффициентов, A^* или C^*, равен нулю.

В первом случае переходом к новой системе координат $(x'; y')$, где

$$x' = x^* + \frac{D}{A}, \quad y' = y^* + \frac{E}{C},$$

приводим исходное уравнение к виду

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0, \tag{II.59}$$

и различаем следующие подслучаи:

1а. $F' \neq 0$, знаки A' и C' одинаковы и противоположны знаку F'. Кривая представляет собой, очевидно, эллипс или окружность, если $A' = C'$;

* Наиболее четко этот вопрос изложен в курсе А. В. Погорелова [103, гл. III, § 8], откуда мы и заимствуем (с небольшими изменениями) данный параграф.

1б. $F' \neq 0$, знаки A' и C' противоположны. Кривая есть гипербола;

1в. $F' \neq 0$, знаки A', C' и F' одинаковы. Уравнению не удовлетворяет ни одна вещественная точка. Кривая, как уже отмечалось в § 13, называется мнимой.

1г. $F' = 0$, знаки A' и C' различны. Кривая распадается на пару прямых, так как уравнение (II.59) можно записать в виде

$$\left(x' - \sqrt{-\frac{C}{A}}\, y'\right)\left(x + \sqrt{-\frac{C}{A}}\, y'\right) = 0;$$

1д. $F' = 0$, знаки A' и C' одинаковы. Уравнение (II.59) можно записать в виде

$$\left(x' - i\sqrt{\frac{C}{A}}\, y'\right)\left(x' + i\sqrt{\frac{C}{A}}\, y'\right) = 0.$$

Кривая распадается на пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (0; 0).

Во втором случае (примем для определенности $A^* = 0$, что не ограничивает общности проводимого исследования) переходом к новой системе координат $(x'; y')$,

$$x' = x^*, \quad y' = y^* + \frac{E}{C}$$

приводим уравнение исследуемой кривой к виду

$$2D'x + C'y'^2 + F' = 0 \qquad \text{(II.60)}$$

и различаем такие подслучаи:

2а. $D' \neq 0$. Кривая есть парабола типа (II.41) с осью симметрии, параллельной оси абсцисс;

2б. $D' = 0$, знаки C' и F' противоположны. Кривая распадается на пару параллельных прямых

$$y = \pm\sqrt{-\frac{F'}{C'}};$$

2в. $D' = 0$, знаки C' и F' одинаковы. Кривая распадается на пару мнимых непересекающихся прямых

$$y' = \pm i\sqrt{\frac{F'}{C'}};$$

2г. $D' = 0$, $F = 0$. Кривая — пара совпадающих прямых.

Таким образом, *вещественная кривая второго порядка* (II.58) *представляет собой либо коническое сечение (эллипс, гиперболу, параболу), либо пару прямых, которые могут оказаться совпадающими.*

§ 23. Заключительные замечания

В первой части книги мы ограничились только тем минимумом сведений по аналитической геометрии, который необходим для понимания всего дальнейшего материала.

Однако, усвоив этот минимум, читатель, который пожелает углубить свои знания, получит возможность выполнить это самостоятельно, обратившись к одному из курсов аналитической геометрии, приведенных в списке литературы. При этом особое внимание надо уделить решению примеров и задач, так как рамки данной книги не позволили нам привести достаточное их количество. Большую помощь в этом может оказать очень хорошо составленный задачник О. Н. Цубербиллер [158], который выдержал уже 29 изданий, а также сборник задач Д. В. Клетеника [53], составленный в тесной связи с курсом аналитической геометрии Н. В. Ефимова]39] и И. И. Привалова [110]. Большое число упражнений и задач, удачно подобранных в методическом отношении, содержится также в курсе А. В. Погорелова [103], о котором мы говорили вначале первой части.

Контрольные упражнения

1. Написать уравнение окружности в декартовых и полярных координатах, зная, что центр окружности лежит в точке (—3; 5), а ее радиус равен 4 единицам длины.

2. Написать уравнение окружности, концы одного из диаметров которой имеют координаты (9; 3) и (3; 7).

3. Найти уравнение окружности, проходящей через точки (3; 9), (3; —3), (1; 11).

4. Определить координаты центра и радиус окружности, выражаемой уравнением:

$$\text{а) } x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0; \quad \text{б) } x^2 + y^2 + 6x = 0.$$

5. Какие значения должны иметь коэффициенты уравнения (II.58)

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

чтобы оно определяло окружность радиуса 5 с центром в точке (2; 3)?

6. Составить каноническое уравнение эллипса в декартовых и полярных координатах, зная, что его полуоси равны соответственно 7 и 3.

7. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением

$$x^2 + 9y^2 = 36.$$

8. Определить эксцентриситет эллипса, если его оси относятся как 3 : 2.

9. Найти каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равно 4 и расстояние между директрисами — 12.

10. Найти эксцентриситет эллипса, если расстояние между его директрисами в два раза больше расстояния между фокусами.

11. Дан эллипс $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{8} = 1$. Через точку (—1; 2) провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

12. Найти уравнение диаметров эллипса $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, длины которых равны $2\sqrt{5}$.

13. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Определить кривую, описываемую любой точкой M, лежащей на этом отрезке.

14. Если две одинаковые пластинки погружены в жидкость параллельно и на достаточно близком расстоянии друг от друга, то вследствие капиллярности жидкость между ними поднимается выше уровня в сосуде (рис. 78, *а*). При этом установлено, что высота поднятия h обратно пропорциональна расстоянию d между пластинками, т. е.

$$h = \frac{k}{d},$$

где k — постоянный множитель, зависящий от поверхностного натяжения и плотности жидкости. Если в ту же жидкость погрузить пластинки, образующие очень малый двугранный угол с вертикальным ребром, то жидкость между ними поднимется согласно приведенной формуле на разные высоты (рис. 78, *б*). Какую кривую образует край жидкости с внутренней стороны каждой пластинки [158, задача № 170]?

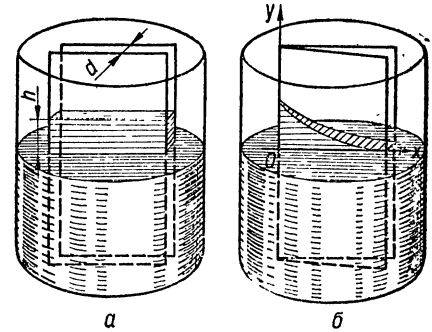


Рис. 78.

15. Составить каноническое уравнение гиперболы в декартовых и полярных координатах, зная, что расстояние между фокусами равно 28, а расстояние между вершинами — 24.

16. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы, заданной уравнением

$$9y^2 - 16x^2 = 144.$$

17. На гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ взята точка, абсцисса которой положительна и ордината равна 8. Вычислить фокальные радиусы этой точки.

18. Дан эллипс $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{8} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

19. Даны фокальный параметр $p = 5$ и эксцентриситет $\varepsilon = 2$ гиперболы. Найти ее полуоси.

20. Найти уравнения диаметров гиперболы $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$, длина которых равна $2\sqrt{5}$.

21. Найти уравнение гиперболы, если известно, что асимптоты даны уравнениями $y = \pm\frac{1}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 12.

22. Даны точки $A(0; -1)$ и $B(0; 2)$. Точка M движется так, что в треугольнике AMB угол B остается вдвое больше угла A. Определить траекторию движения.

23. Составить уравнение параболы, зная, что она симметрична относительно оси Oy, проходит через точку (5; 3) и вершина ее лежит в начале координат.

24. Составить уравнение параболы, зная, что вершина ее лежит в точке (—2; 1), направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а параметр p равен расстоянию между директрисами эллипса $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ [110, стр. 105, упр. № 78].

25. Показать, что любая прямая пересекается с коническим сечением не более чем в двух точках.

26. Найти точки пересечения эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ с прямой $y = 2x + 1$.

27. Показать, что если две кривые второго порядка имеют пять общих точек, то они тождественно совпадают.

28. Точка M задана полярными координатами:

$$\text{а)}\ \rho = 3,\ \varphi = \frac{\pi}{6} = 30°;\quad \text{б)}\ \rho = 5;\ \varphi = -\frac{3}{4}\pi = -135°.$$

Определить ее декартовы координаты.

29. Даны декартовы координаты точки M: $x = -3$; $y = 2$. Найти ее полярные координаты.

30. Построить по точкам кривую, уравнение в полярных координатах которой $\rho = \varphi$.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Элементарная математика, которая изучается в школе, формировалась в период от VI—V веков до н. э. и до середины XVII века, когда начался период высшей математики — математики, исследующей переменные величины. Фридрих Энгельс наиболее кратко и выразительно охарактеризовал новый период следующими словами: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем»*.

Основой высшей математики является математический анализ, охватывающий те разделы математики, которые опираются на понятие функции и на идеи исчисления бесконечно малых. Обычно под названием математического анализа объединяют дифференциальное и интегральное исчисление, основы теории функций и дифференциальные уравнения, а также ряд других разделов математики, которые возникли в систематической форме в результате работ математиков XVII—XVIII веков, а затем шлифовались и уточнялись вплоть до начала XX века. Как учебный предмет в высшей школе СССР математический анализ (который часто называют также анализом бесконечно малых) включает в себя дифференциальное и интегральное исчисление с элементами геометрических и технических приложений, а также дифференциальные уравнения и элементы теории функций.

В данной работе мы ограничимся изучением основ этих предметов, что позволит читателю в дальнейшем расширить свои знания, обратившись к более подробной литературе [9; 16; 17; 41; 42; 59; 63; 66; 69; 82; 94; 102; 114; 115; 125; 138; 140; 149; 150; 155; 162; 171].

---

* Фридрих Энгельс. Диалектика природы. Госполитиздат, М., 1969, стр. 224.

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 24. Функциональная зависимость

Понятие функции, наряду с понятием числа и переменной величины, является одним из главнейших понятий современной математики. С этим же понятием мы очень часто встречаемся в природе и в технике, изучая различные процессы и явления. Поэтому остановимся на нем подробнее и для простоты изложения начнем с рассмотрения понятия функции действительного переменного.

Выражение, подобное

$$x^3 - 5x + 7,$$

не имеет определенного численного значения, пока не указано значение x. Говорят, что значение этого выражения есть функция значения x, и пишут

$$x^3 - 5x + 7 = f(x).$$

Термин «функция» впервые был введен в 1692 г. Готфридом Вильгельмом Лейбницем (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716). Лейбницу же принадлежат и термины «координаты», «дифференциал», «дифференциальное уравнение», «алгоритм» и т. д.

Величина x называется *независимым переменным* или *аргументом*. Например, если $x = 4$, то $x^3 - 5x + 7 = 64 - 20 + 7 = 51$, так что $f(4) = 51$. Таким же образом непосредственной подстановкой можно найти значение функции $f(x)$ при любом целом, дробном или иррациональном значении x.

Число простых чисел, меньших чем n, есть функция $f(n)$ целого числа n. Когда задано значение числа n, то значение функции $f(n)$ определено, несмотря на то, что до сегодняшнего дня неизвестно никакой формулы для подсчета $f(n)$. Например, для $n = 10$ имеем $f(n) = 5$, так как среди первых десяти чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 простых чисел только пять: 1, 2, 3, 5, 7. Для $n = 16$ имеем $f(n) = 7$, для $n = 62$ $f(n) = 19$, для $n = 100$ $f(n) = 26$, для $n = 600$ $f(n) = 110$ и т. д. Продолжив метод перебора, можно составить таблицы простых чисел, и в настоящее время такие таблицы составлены до $n \leqslant 12\,000\,000$.

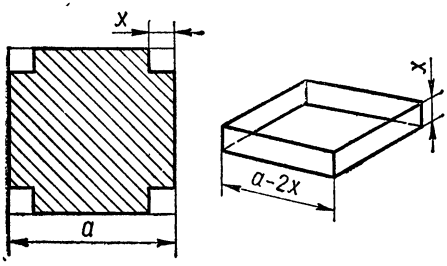


Рис. 79.

С понятием функции мы также встречаемся каждый раз, когда величины связаны каким-либо физическим соотношением. Например, можно утверждать, что скорость самолета v есть функция мощности w его моторов: $v = f(w)$. Для того чтобы конкретизировать эту функцию, необходимо либо теоретически установить, какая именно связь существует между величинами v и w, либо путем соответствующих экспериментов составить достаточно подробную таблицу измеренных значений v для различных w. Эти же результаты можно представить затем в виде графика.

В качестве еще одного примера рассмотрим такой. Из квадрата со стороной a сделана открытая прямоугольная коробка высотой x (рис. 79). Объем V коробки будет вычисляться по формуле

$$V = x(a - 2x)^2.$$

Эта формула позволяет для каждой высоты x, удовлетворяющей, очевидно, нера-

венству $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, найти объем коробки. Так, при $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}a$ имеем $V = 0$. При $x = \frac{1}{10}a$ объем $V = \frac{a}{10}\left(a - \frac{2}{10}a\right)^2 = \frac{8}{125}a^3 = 0{,}064a^3$. При $x = \frac{1}{8}a$ получим $V = \frac{9}{128}a^3 = 0{,}0703125a^3$. При $x = \frac{1}{5}a$ объем $V = \frac{9}{125}a^3 = 0{,}072a^3$.

Упражнения

1. Вычислить (в долях от a^3) объем V при $x = 0{,}05a$; $x = 0{,}10a$; $x = 0{,}15a$; $x = 0{,}20a$; ...; $x = 0{,}45a$; $x = 0{,}50a$.

2. По данным, полученным в упражнении 1, построить график для функции V и показать путем непосредственных вычислений, что свое максимальное значение объем V примет при $x = \frac{1}{6}a$, для которого $V = \frac{a}{6}\left(a - \frac{2a}{6}\right)^2 = \frac{2a^3}{27} \approx 0{,}074a^3$.

Начиная с XVII века понятие функции прошло сложный и трудный путь развития, пока не было точно сформулировано в 1834 г. великим русским геометром Николаем Ивановичем Лобачевским (1793—1856) и независимо от него известным немецким математиком Леженом Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805—1859) в виде следующего определения.

Определение 1. *Величина $y = f(x)$ называется функцией независимой переменной x, если каждому допустимому значению x можно привести каким-либо способом в соответствие одно или несколько значений y.*

Независимую переменную, как уже отмечалось, называют также *аргументом*.

Если каждому значению аргумента x соответствует одно единственное значение y, то функция $y = f(x)$ называется *однозначной функцией* от x, в противном случае y называют *многозначной функцией*. В дальнейшем, если в тексте специально не оговорено, что функция многозначная, подразумевается, что она однозначная.

Переменная величина x считается заданной, если указано множество $X = \{x\}$ значений, которые она может принимать. Это множество называется *областью изменения переменной x*. Областью изменения x чаще всего является один или несколько «промежутков», т. е. отрезков оси x-ов с концами или без концов.

Открытым промежутком, или *интервалом*, (a, b) называется совокупность чисел x, заключенных между числами a и b. В записи (a, b) первая буква обычно означает меньшее число, а вторая большее, так что

$$a < x < b.$$

Числа a и b называются *концами промежутка* и в случае интервала (a, b) исключаются из рассмотрения. Промежуток, к которому присоединены оба конца,

$$a \leqslant x \leqslant b$$

называется *замкнутым промежутком* или *сегментом* и обозначается квадратными скобками $[a, b]$, в отличие от интервала, для обозначения которого применяют круглые скобки (a, b). Часто к совокупности точек промежутка присоединяют только один из концов, т. е. рассматривают полузамкнутый промежуток (*полусегмент*, или *полуинтервал*) $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$, который обозначают соответственно $[a, b)$ и $(a, b]$.

Областью изменения x может быть также и вся ось x-ов $-\infty < x < \infty$ или ее полубесконечная часть $-\infty < x \leqslant b$; $a \leqslant x < \infty$, или только совокупность некоторых ее точек, как, например, целых чисел $x = n$ в случае функции $f(n)$, определяющей число простых чисел, меньших чем n. В последнем случае функция называется *целочисленной*.

Совокупность всех значений аргумента x, которым в силу данного правила $f(x)$ соответствуют определенные значения функции y, называется *областью изменения*

аргумента x, а также *областью определения* или *областью существования функции* y. Совокупность всех значений функции y называется *областью изменения функции*.

Пример 1. Функция

$$y = x^2 + \ln x$$

есть однозначная функция с областью определения $0 < x < \infty$ и областью изменения $-\infty < y < \infty$.

Пример 2. Функция

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

есть многозначная (двузначная) функция с областью определения $-1 \leqslant x \leqslant +1$ и областью изменения $-1 \leqslant y \leqslant +1$, так как каждому значению x соответствуют два возможных значения функции:

$$y = +\sqrt{1 - x^2} \quad \text{и} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Примером бесконечнозначных функций могут служить обратные тригонометрические функции: $y = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \operatorname{Arccos} x$ и др.

Многозначные функции обычно можно расчленить на однозначные, или, как говорят, из данной многозначной функции можно выделить ее «однозначные ветви». Например, $y = +\sqrt{1 - x^2}$ и $y = -\sqrt{1 - x^2}$ суть две однозначные ветви функции y, определяемой уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Пример 3. Продолжительность месяца y (для невисокосного года) в зависимости от его номера x есть функция, которую можно определить следующей таблицей:

x	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
y	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

Областью определения в данном случае является множество первых 12 целых чисел $\{x\} =$ I, II, III, ..., XII, а область изменения $\{y\} = 28; 30; 31$ состоит всего из трех чисел: 28, 30 и 31. Функция $y = y(x)$ — однозначная, так как каждому допустимому значению x соответствует только одно значение y. Однако, указав продолжительность месяца, мы не сможем однозначно определить его название (кроме февраля), т. е. обратная функция $x = x(y)$ в данном случае будет уже многозначной.

Замечание. Буква f, входящая в равенство*

$$y = f(x), \tag{III.1}$$

в отличие от букв x и y, обозначает не переменную величину, а то правило, тот закон, который определяет y как функцию от x. Например, в случае функции $S = \pi R^2$, определяющей собой площадь круга, если записать ее равенством $S = f(R)$, буква f означает, что для того, чтобы по заданному R определить площадь круга S, надо R возвести в квадрат и полученный результат умножить на число $\pi = 3{,}14159\ldots$. В формулах $y = \sqrt{x}$, $y = \ln x$, $y = \cos x$ знаки $\sqrt{\ }$, ln, cos играют ту же роль, что и знак f в формуле (III.1). Единственное различие заключается в том, что знаки $\sqrt{\ }$, ln, cos изобретены для обозначения определенных функций, а знак f может употребляться для обозначения любой, в том числе

* Это равенство читается так: игрек равен эф от икс. Обозначение $f(x)$ принадлежит Леонарду Эйлеру (Leonhard Euler, 1707—1783).

и неизвестной нам, функции. Очевидно, что в равенстве (III.1) вместо буквы f можно употребить любую другую букву, например

$$y = F(x); \quad y = \varphi(x); \quad y = y(x),$$

вполне аналогично тому, как в алгебре для обозначения чисел употребляют разные буквы: a, b, x, z.

Функцию можно задать аналитически, графически, при помощи таблицы или любым другим способом, устанавливающим соответствие между x и y, например при помощи алгоритма, с чем мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем. Каждый из этих способов имеет свои преимущества и недостатки.

Табличный способ сразу, при минимальной затрате труда, дает численные значения функции, но таблицу трудно обозреть в целом и она часто не содержит всех нужных значений аргумента.

Графический способ наиболее нагляден, но имеет малую точность (обычно 2—3 знака), которую можно повысить только путем значительного увеличения масштаба. В качестве примера на рис. 80 приведен график функции, однозначной на интервалах $(-\infty, a)$,

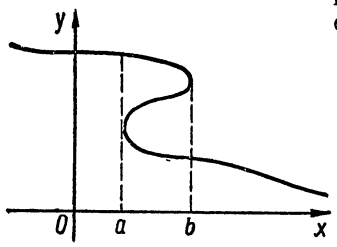


Рис. 80.

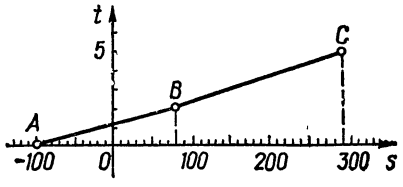


Рис. 81.

(b, ∞) и многозначной на сегменте $[a, b]$. Если функциональная зависимость изучается экспериментально при помощи каких-либо самопишущих приборов, то результаты могут быть получены только в графическом виде.

Аналитический способ состоит в задании функции одной или несколькими формулами. Если зависимость между x и y выражена уравнением, разрешенным относительно y, например $y = x^3 + 2x \sin x + 5$, то величина y называется *явной функцией* аргумента x, в противном случае — *неявной*. Другими словами, функция называется неявной, если мы имеем не непосредственное аналитическое выражение ее через зависимую переменную $y = f(x)$, а только уравнение $F(x, y) = 0$, которое связывает ее значение со значением аргумента. Так, например, если y и x связаны уравнением

$$x^3 - 2y + \sin(x + y) = 0,$$

то y есть неявная функция. В отдельных случаях неявную функцию, заданную уравнением $F(x, y) = 0$, удается представить в явном виде, если это уравнение можно разрешить относительно y. Например, решая уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

относительно y, получаем функцию y в явном виде: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Пример 4. Расстояние по шоссе между пунктами A и C составляет 390 *км*. Через два часа пути автомобиль, ехавший со средней скоростью 90 *км/час*, достиг пункта B. Оставшийся участок пути он прошел за 3 *ч* при средней скорости 70 *км/час*. Время t пребывания автомобиля в пути есть функция аргумента s. Эту функцию, которая на графике представлена ломаной линией (рис. 81), аналитически можно задать следующими двумя формулами:

$$t = \frac{100 + s}{90} \text{ при } -100 \leqslant s \leqslant 80,$$

$$t = 2 + \frac{s - 80}{70} \text{ при } 80 \leqslant s \leqslant 290.$$

В точке B $(s = 80)$ обе формулы дают одно и то же значение $t = 2$.

В приведенном выше определении 1 не требуется, чтобы различным значениям аргумента x непременно соответствовали различные значения функции y. В частности, все значения y могут быть одинаковыми и, тем не менее, мы вправе и в этом случае рассматривать y как функцию от x. Примером такого рода может служить функция $y = 5(\sin^2 x + \cos^2 x)$, равная 5 при всех значениях x. Следовательно, *постоянную C можно рассматривать как функцию $y = C$, сохраняющую неизменным свое значение при всех значениях аргумента.*

Функция называется *четной*, если при изменении знака аргумента значение функции не меняется:

$$f(-x) = f(x).$$

Такова четная степень $x^2, x^4, \ldots, x^{2n}$ (откуда произошел и термин «четная функция»), таковы функции $\cos x$, $x \sin x$ и т. д.

Функция называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента меняется только знак функции, а абсолютное значение остается тем же:

$$f(-x) = -f(x).$$

Такова нечетная степень $x, x^3, \ldots, x^{2n-1}$, таковы функции $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $x \cos x$ и т. д.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной — относительно начала координат.

В заключение приведем необходимое нам для дальнейшего определение числа, которое было дано Исааком Ньютоном (*Isaak Newton*, 1642—1727) в 1707 г. в его сочинении «Arithmetica universalis».

Определение 2. *Число есть не столько собрание нескольких единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой, однородной с ней, принятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное. Целое число есть то, что измеряется единицей, дробное — кратной долей единицы, иррациональное число несоизмеримо с единицей.*

§ 25. Предельный переход

К основным операциям: сложению, вычитанию, умножению и делению, которые рассматриваются в элементарной математике, в математическом анализе присоединяют еще одну — операцию перехода к пределу, чем, собственно, и определяют, правда, весьма условно, границу между «элементарной» и «высшей» математикой.

С понятием предела мы встречались еще в средней школе, изучая сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии или определяя длину окружности. Но в курсе элементарной математики понятие предела встречается только эпизодически, а в математическом анализе этим понятием пользуются систематически как основным инструментом исследования переменной величины. Больше того, все фундаментальные понятия математического анализа — непрерывность функции, производная, интеграл, сумма ряда и др. — основаны на понятии предела переменной величины.

Поэтому математический анализ, который в начальный период своего развития не обладал достаточной строгостью *, превратился в строго обоснованную математическую теорию лишь после того, как в начале XIX века в работах ряда математиков и, главным образом, в работах знаменитого французского математика Огюстена Луи Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857), в частности, в его «Алгебраическом анализе», вышедшем в 1821 г., выяснилась фундаментальная важность понятия «предел переменной» и была построена соответствующая «теория пределов».

* В этом смысле характерна позиция Л. Эйлера, который в предисловии к «Трактату по дифференциальному исчислению» (1755 г.) совершенно четко говорит о пределе, но в самой книге этим понятием нигде не пользуется!

Переходя к конкретному изложению вопроса, мы начнем с простейшего частного случая, а именно, с предела функции x_n от натурального аргумента n. Как увидим, к этому случаю в принципе сводятся и все более сложные случаи.

Пусть аргумент n принимает все значения из натурального ряда чисел:

$$1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, n, \ldots, \tag{III.2}$$

члены которого мы представляем себе упорядоченными по возрастанию, так что большее число n следует за меньшим числом m, меньшее число m предшествует большему числу n.

Если задана функция x_n, то ее аргумент, или индекс n, можно рассматривать как номер соответствующего значения переменной. Таким образом, x_1 есть первое ее значение, x_2 — второе и т. д. Мы всегда будем представлять себе это множество значений $\{x_n\}$ *упорядоченным, наподобие натурального ряда* (III.2), по возрастанию номеров, т. е. в виде числовой последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, \ldots, x_n, \ldots. \tag{III.3}$$

При $n > m$ значение x_n следует за x_m (или x_m предшествует x_n) независимо от того, будет ли само число x_n больше, меньше или равно x_m.

Число a называется пределом переменной величины x_n, если последняя отличается от a сколь угодно мало, начиная с некоторого места последовательности, т. е. для достаточно большого номера n.

Записывается это так *:

$$x_n \to a, \text{ или } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Обе записи совершенно равноправны, хотя первая читается «x стремится к a», а вторая — «предел x равен a». Отметим также, что при второй форме записи иногда, краткости ради, пишут просто $\lim x_n = a$, опуская строку $n \to \infty$, уточняющую, что индекс n стремится к бесконечности.

В качестве пояснения к сказанному рассмотрим следующие последовательности переменных величин:

$$x_n = \frac{1}{n^2};\ y_n = -\frac{1}{n};\ z_n = \frac{(-1)^n}{n^3};\ u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n};\ v_n = (-1)^n$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что в последовательностях

$$\{x_n\} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots;$$
$$\{y_n\} = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots;$$
$$\{z_n\} = -1, +\frac{1}{8}, \frac{-1}{27}, \frac{+1}{64}, \frac{-1}{125}, \ldots$$

величины x_n, y_n, z_n с ростом n стремятся к нулю, причем первая из них стремится к нулю, монотонно убывая, вторая стремится к нулю, возрастая, так как принимает все время отрицательные значения, а третья стремится к нулю, колеблясь около него. Далее $u_n \to 1$, а v_n не имеет вообще предела, так как с ростом n не приближается ни к какому постоянному числу, а все время колеблется, принимая значения то -1, то $+1$.

Для полной строгости введенного понятия предела приведем его точное определение.

* Обозначение lim — сокращение латинского слова limes («лимес» — предел) и равнозначного французского limite (лимит).

Определение. *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, если абсолютная величина разности $x_n - a$, начиная с некоторого номера $n = N$, остается меньше любого наперед заданного положительного числа ε, сколь малым бы оно ни было* *:

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant N. \tag{III.4}$$

Номер $N = N_\varepsilon$ зависит от заданного значения величины ε, в связи с чем иногда для уточнения вместо N пишут N_ε.

Из неравенства (III.4) непосредственно вытекает, что

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

т. е. что все $\{x_n\}$, за исключением лишь нескольких начальных $x_1, x_2, \ldots, x_N$, принадлежат интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Пример 1. Определить предел последовательности

$$x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{III.5}$$

Решение. Давая индексу n последовательно значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, вычисляем по формуле (III.5) соответствующие члены последовательности $\{x_n\}$:

$$x_1 = 2 + \frac{(-1)^1}{1} = 1; \; x_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2\frac{1}{2}; \; x_3 = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3};$$

$$x_4 = 2\frac{1}{4}; \; x_5 = 1\frac{4}{5}; \ldots.$$

Поскольку величина $\frac{1}{n}$ с ростом n стремится к нулю, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[2 + \frac{(-1)^n}{n}\right] = 2,$$

т. е. предел последовательности (III.5) равен двум.

Докажем это более строго, исходя из приведенного выше определения. Действительно, для любого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое значение x_n, что все последующие члены последовательности $\{x_n\}$ будут удовлетворять неравенству

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

Но для того чтобы указать такое значение x_n, достаточно найти соответствующий ему номер n, а для этого достаточно решить неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$ относительно n. Заметив, что $|x_n - 2| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, получаем неравенство

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ откуда } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Например, если задано $\varepsilon = 0{,}2$, то из неравенства $n > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0{,}2} = 5$ следует, что, начиная с $n = 6$, значения x_n будут отличаться от 2 меньше чем на 0,2.

На рис. 82 показан график функции $y = x_n$ и проведены горизонтальные прямые $y = 2$, $y = 2 + 0{,}2$ и $y = 2 - 0{,}2$. Все точки графика, начиная с точки

* Напомним, что абсолютной величиной (или модулем) положительного числа называется само это число; абсолютной величиной отрицательного числа называется это же число, взятое с противоположным знаком. Абсолютная величина числа b обозначается так: $|b|$. Следовательно,

$$|b| = b, \text{ если } b \geqslant 0;$$
$$|b| = -b, \text{ если } b < 0.$$

$x_6 = 2\frac{1}{6}$, оказываются расположенными в заштрихованной полоске между прямыми $y = 2 \pm \varepsilon = 2 \pm 0{,}2$. Если мы возьмем другое значение ε, например $\varepsilon = 0{,}1$, то все точки последовательности $\{x_n\}$ будут находиться внутри полосы $y = 2 \pm \varepsilon$, начиная с номера $n = 11$. При $\varepsilon = 0{,}001$ согласно неравенству $n > \frac{1}{\varepsilon}$ получим $n = 1001$ и т. д. При безграничном же возрастании n точки последовательности $\{x_n\}$ будут неограниченно приближаться к прямой $y = 2$, никогда её не достигая. Однако такой характер приближения к пределу определяется только структурой функции (III.5), так что легко построить другие примеры, в которых характер приближения к пределу будет иным.

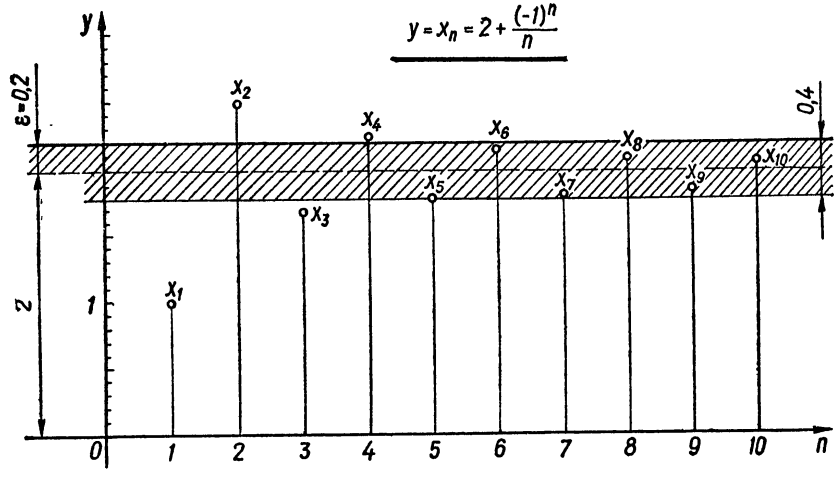


Рис. 82.

Пример 2. Дана функция натурального аргумента n

$$u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{III.6}$$

Определить ее предел при $n \to \infty$.

Решение. При $n = 1, 2, 3, \ldots$ членами последовательности $\{u_n\}$ будут

$$u_1 = \cos \frac{\pi}{2}, \; u_2 = \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{2}, \; u_3 = \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2}, \; u_4 = \frac{1}{4} \cos \frac{4\pi}{2}, \ldots$$

или, после очевидных упрощений,

$$u_1 = 0, \; u_2 = -\frac{1}{2}, \; u_3 = 0, \; u_4 = \frac{1}{4}, \; u_5 = 0, \; u_6 = -\frac{1}{6}, \ldots.$$

График функции (III.6) показан на рис. 83. При этом для наглядности мы взяли масштаб по оси ординат в три раза большим, чем по оси абсцисс, и соединили точки графика плавной пунктирной кривой (которую получим, если в формуле (III.6) натуральный аргумент n заменим непрерывным аргументом x). Так как $\cos \frac{\pi n}{2}$ по абсолютной величине никогда не превосходит единицы, $\left|\cos \frac{\pi n}{2}\right| \leqslant 1$, а $\frac{1}{n}$ с увеличением n стремится к нулю, то ясно, что при $n \to \infty$ величина $u_n \to 0$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi n}{2} = 0.$$

Однако мы видим, что, в отличие от примера 1, в данном случае переменная u_n, стремящаяся к пределу, бесконечное множество раз (при всех нечетных значениях $n = 1, 3, 5, \ldots$) принимает значение, точно равное пределу ($u_{2\nu+1} = 0$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$).

Выбрав произвольно малое положительное число ε, например $\varepsilon = 0{,}0001$, попытаемся определить в данном случае то значение $n = N$, начиная с которого отклонение от предела всех дальнейших членов последовательности $\{u_n\}$ будет меньше ε, т. е. начиная с которого будет выполняться условие

$$|u_n - 0| < \varepsilon, \text{ или } |u_n| < 0{,}0001.$$

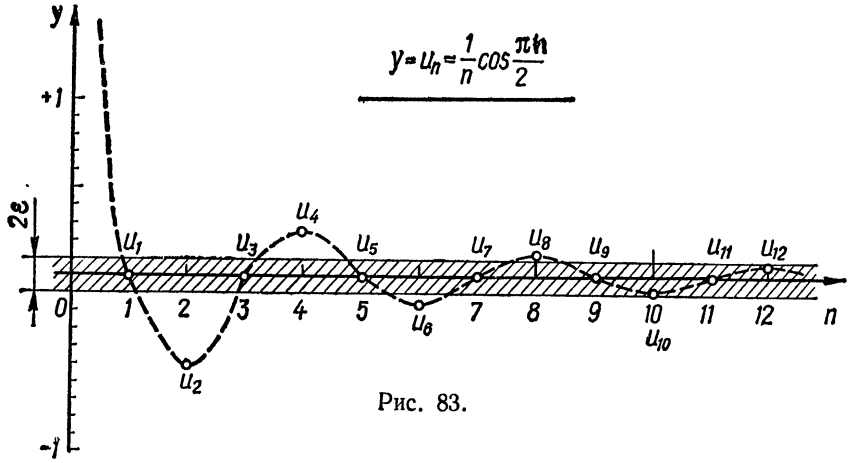


Рис. 83.

Так как при нечетных значениях n имеем $u_n = 0$, то достаточно рассмотреть лишь четные значения n. В этом случае $|u_n| = \frac{1}{n}$ и мы получаем неравенство

$$\frac{1}{n} < 0{,}0001, \text{ откуда } n > 10000.$$

Таким образом, $N = 10000$, т. е. только начиная с номера $n = 10001$ (включительно) все точки графика расположатся в полоске шириной $2\varepsilon = 0{,}0002$, построенной около оси абсцисс. При $\varepsilon = 0{,}1$ будем иметь соответственно $N = 10$ и т. д. (см. рис. 83).

Последовательности, которые имеют предел, называются *сходящимися*, а не имеющие его — *расходящимися*.

При рассмотрении переменной величины мы часто не можем найти ее предел, но хотим знать, существует ли он. Укажем один важный признак существования предела.

Предположим, что переменная величина x_n постоянно возрастает или убывает. В первом случае всякое значение величины не меньше всех предыдущих и не больше всех последующих, т. е. выполняются неравенства

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots .$$

Во втором случае оно не больше всех предыдущих и не меньше всех последующих, т. е.

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots .$$

В этих случаях говорят, что *величина x_n меняется монотонно*. Соответствующие ей точки на оси Ox будут перемещаться в одном направлении — в положительном,

если переменная возрастает, и в отрицательном, если она убывает. Непосредственно ясно, что имеют место лишь две возможности: или точки x_n беспредельно удаляются по прямой, уходя в бесконечность, или точки x_n беспредельно приближаются к некоторой определенной точке A, т. е. переменная x_n стремится к пределу (рис. 84). Если кроме монотонности изменения известно еще, что рассматриваемая переменная величина ограничена, т. е. при любом n

$$x_n \leqslant A \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то первая возможность отпадает, и можно утверждать, что величина x_n стремится к пределу.

Указанный признак существования предела более кратко формулируют следующим образом *.

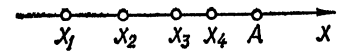


Рис. 84.

Признак Больцано — Вейерштрасса. *Если переменная величина ограничена и меняется монотонно, то она стремится к пределу.*

Этот признак был впервые сформулирован известным чешским математиком и философом Бернардом Больцано (Bernhard Bolzano, 1781—1848) в его фундаментальном труде «Учение о функциях», написанном в Праге в 1830 году, но увидевшем свет только через 100 лет, после распада австрийской империи, где его автор за свои прогрессивные взгляды подвергался преследованиям. Этот же признак (независимо от Больцано) был позже открыт знаменитым немецким математиком Карлом Вейерштрассом (Karl Weierstraß, 1815—1897).

Отметим, что приведенное выше рассуждение является лишь интуитивным и его нельзя рассматривать как доказательство. Строгое доказательство признака Больцано—Вейерштрасса (являющегося лишь достаточным признаком) читатель найдет в более полных курсах математического анализа, например в [63, т. I; 102, т. 1; 125, т. I; 149, т. 1; 162, ч. 1—2; 171], в которых рассматриваются также и другие признаки существования предела, в том числе необходимый и достаточный признак Коши **.

Здесь же мы приведем только его формулировку.

Признак Коши. *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}$ *имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого как угодно малого положительного числа* ε *существовал такой номер* $N = N_\varepsilon$, *при котором для любых* $n \geqslant N$ *и всех целых положительных* p *выполнялось неравенство*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

§ 26. Предел функции непрерывного аргумента

Понятие предела, рассмотренное в § 25, для последовательности $\{u_n\}$ и для функции целочисленного аргумента легко перенести и на функцию непрерывного аргумента.

Функция $y = f(x)$ имеет пределом число b при $x = a$, если для любой последовательности значений $\{x\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, принадлежащей к области задания функции и имеющей пределом число a, последовательность значений функций

$$\{y_n\} = f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

имеет предел. Этот предел b непременно должен быть общим для всех таких последовательностей, и он является пределом функции $f(x)$. Предел функции можно определить и непосредственно, не сводя его к пределу последовательности.

---

* В более полных курсах анализа обычно рассматривается теорема Больцано—Вейерштрасса, которая формулируется в других терминах.

** Признак, являющийся одновременно необходимым и достаточным, иногда называют более кратко *критерием*.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ имеет пределом число b при x, стремящемся к a, если для каждого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что*

$$|f(x) - b| < \varepsilon, \tag{III.7}$$

как только

$$|x - a| < \delta. \tag{III.8}$$

Записывают это так:

$$f(x) \to b \text{ при } x \to a \tag{III.9}$$

или

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{III.10}$$

Выясним геометрический смысл определения 1, воспользовавшись графиком функции $y = f(x)$ (рис. 85).

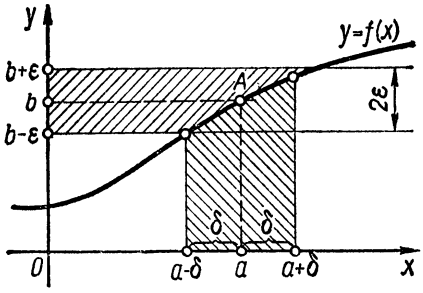


Рис. 85.

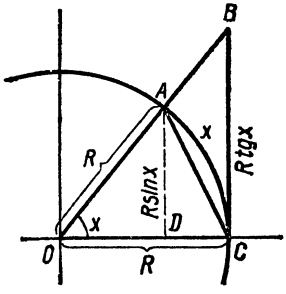


Рис. 86.

Допустим, что при x, стремящемся к a, функция $y = f(x)$ стремится к пределу b, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Согласно определению это значит, что для сколь угодно малого ε можно найти такое число δ, чтобы из неравенства (III.8) следовало неравенство (III.7). Но геометрический смысл неравенства $|x - a| < \delta$ состоит в том, что x отстоит от точки a не далее чем на δ, т. е. не выходит из окрестности $(a - \delta,\ a + \delta)$ точки a. С другой стороны, геометрический смысл неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$ заключается в том, что соответствующие значения функции $y = f(x)$ не выходят из интервала $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ на оси ординат. Таким образом, если выполняется равенство (III.10), то точка A графика функции $y = f(x)$ должна находиться в полоске шириною 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ для всех значений x, удаленных от точки a не далее чем на δ (рис. 85). При $\delta \to 0$, в случае непрерывных функций, величина ε будет также стремиться к нулю.

Пример 1. Найти предел функции

$$y = \frac{\sin x}{x} \tag{III.11}$$

для x, стремящегося к нулю.

Решение. Построим сектор AOC радиуса R и два треугольника AOC и BOC (рис. 86). Площадь сектора AOC больше площади вписанного в него треугольника AOC, но меньше площади треугольника BOC. У треугольника AOC основание $OC = R$ и высота $AD = R \sin x$, так что его площадь

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot AD = \frac{1}{2} R^2 \sin x.$$

Треугольник BOC прямоугольный с катетами $OC = R$ и $BC = R \operatorname{tg} x$, поэтому

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Площадь сектора AOC, дуга которого AC равна центральному углу x, будет равна

$$S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} R^2 x.$$

Следовательно, для всех отличных от нуля углов x первой четверти будут справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$$

или, после деления на $1/2R^2$,

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Отсюда, учтя, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, и разделив все части неравенства на $\sin x > 0$, получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Но так как с уменьшением x до нуля $\cos x$ стремится к единице, то и величина $\dfrac{\sin x}{x}$, заключенная между $\cos x$ и 1, стремится к единице, т. е.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \tag{III.12}$$

Искомый предел мы нашли, когда x стремился к нулю, оставаясь все время положительным. Этот же результат можно получить и для случая, когда x стремится к нулю, оставаясь отрицательным, что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Насколько быстро функция (III.11) стремится к своему пределу (III.12), видно из табл. 1, в которой угол x выражен шестью значащими цифрами. На рис. 87

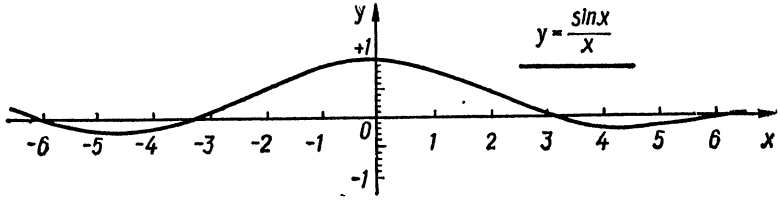


Рис. 87.

приведен график функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$, для которой ось ординат является осью симметрии, поскольку рассматриваемая функция четная, и, следовательно,

$$y(-x) = y(+x).$$

Таблица 1

x	1,00	0,50	0,25	0,10	0,05	0,01
$\sin x$	0,841471	0,479426	0,247404	0,0998334	0,0499792	0,00999983
$y = \dfrac{\sin x}{x}$	0,841471	0,958852	0,989616	0,998334	0,999584	0,999983

До сих пор, говоря о пределе функции (III.9), мы предполагали, что a есть некоторое конечное число. Однако часто приходится исследовать и тот случай, когда x стремится к бесконечности ($x \to +\infty$ или $x \to -\infty$), т. е. безгранично растет по абсолютной величине. Этот случай мы уже рассматривали для функции натурального аргумента при $n \to \infty$ и поэтому можем теперь дать определение предела функции непрерывно меняющегося аргумента при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ имеет пределом число b при x, стремящемся к $+\infty$ или $-\infty$, если для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число N, чтобы для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполнялось условие (III.7):*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to +\infty$, то пишут

$$f(x) \to b \text{ при } x \to +\infty, \text{ или } \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

и совершенно аналогично при $x \to -\infty$. Таким образом, равенство (III.9) или (III.10) остается справедливым и в том случае, когда $a = +\infty$ или $a = -\infty$.

Пределы функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ могут оказаться различными (например, для функции $y = e^x$ имеем $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, где $t = -x$), но могут оказаться и равными друг другу. Если они равны между собой, то общее значение предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ называется пределом функции при $x \to \pm\infty$, или просто при $x \to \infty$. Обозначается этот предел так:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b, \text{ или } \lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Пример 2. Дана функция

$$y = \frac{1}{x} \cos \frac{\pi x}{2} \tag{III.13}$$

в интервале $0 < x < +\infty$. Найти ее предел при $x \to +\infty$.

Решение. В примере 2 § 25 мы рассмотрели эту функцию при условии, что аргумент x принимает лишь натуральные значения 1, 2, 3, ... , и получили график, состоящий из отдельных точек (см. рис. 83). Теперь в случае непрерывного аргумента график функции будет представлять собой непрерывную линию, которая на том же рис. 83 показана пунктиром.

Так как при любом x (целом и нецелом) имеем $\left|\cos \frac{\pi x}{2}\right| \leqslant 1$, то, очевидно, что $y \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cos \frac{\pi x}{2} = 0.$$

Этот же результат получим, если заметим, что график функции (III.13) заключен между гиперболами

$$y = \pm \frac{1}{x},$$

каждая из которых стремится к оси абсцисс при $x \to \infty$. Действительно, заменяя в (III.13) $\cos \frac{\pi x}{2}$ его наибольшим или наименьшим значением равным ± 1, мы и придем к гиперболам $y = \pm \frac{1}{x}$.

Упражнения

1. Рассмотреть функцию (III.13) в интервале $-\infty < x < 0$ и найти ее предел при $x \to -\infty$.

2. Найти предел функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to \pm\infty$.

Определение 3. *Пределом постоянной величины $y = C$ называется сама величина C.*

Это определение вводится для того, чтобы основные теоремы о пределах были верны во всех случаях, без каких-либо исключений. Оно полностью согласуется с определением 1, так как величина $|C - C| = 0$ меньше любого положительного числа ε.

В заключение параграфа приведем основные теоремы о пределах, т. е. основные правила предельного перехода. При этом будем предполагать, что все рассматриваемые функции $u_1 = u_1(x)$, $u_2 = u_2(x)$, ..., $u_n = u_n(x)$ зависят от одного и того же аргумента x и обладают конечными пределами при $x \to a$ (или при $x \to \infty$).

Теорема 1. *Предел алгебраической суммы двух, трех и вообще любого неизменного числа слагаемых равен такой же алгебраической сумме их пределов:*

$$\lim (u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) = \lim u_1 \pm \lim u_2 \pm \cdots \pm \lim u_n. \qquad \text{(III.14)}$$

Здесь (и в дальнейшем) при всех знаках lim подразумевается, что $x \to a$ (читается: икс стремится к a) или $x \to \infty$.

Пример 3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2} = 5 + 0 - 0 = 5.$$

Теорема 2. *Предел произведения двух, трех и вообще любого неизменного числа сомножителей равен произведению их пределов:*

$$\lim (u_1 \cdot u_2 \cdots u_n) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdots \lim u_n. \qquad \text{(III.15)}$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 2} (7 - 2x)(3 + 5x^2) = \lim_{x\to 2} (7 - 2x) \lim_{x\to 2} (3 + 5x^2) = 3 \cdot 23 = 69.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие два следствия.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела*, т. е. если $C = \text{const}$, то

$$\lim (Cu) = C \lim u, \qquad \text{(III.16)}$$

поскольку $\lim C = C$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} 12 \sin x = 12 \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Следствие 2. *Предел целой положительной степени равен той же степени предела:*

$$\lim (u^n) = \underbrace{\lim u \cdot \lim u \cdots \lim u}_{n \text{ сомножителей}} = (\lim u)^n. \qquad \text{(III.17)}$$

Теорема 3. *Предел частного двух величин равен частному пределов делимого и делителя, если только предел делителя (знаменателя) не равен нулю:*

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \text{ если } \lim v \neq 0. \qquad \text{(III.18)}$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{3-x^3}=\frac{\lim(1+x)}{\lim(3-x^3)}=\frac{1-1}{3+1}=\frac{0}{4}=0.$$

Если предел знаменателя равен нулю, а предел числителя не равен нулю, то предел дроби $\frac{u}{v}$ равен бесконечности.

Пример 7.

$$\lim_{x\to 3}\frac{5x^2+7}{x-3}=\infty.$$

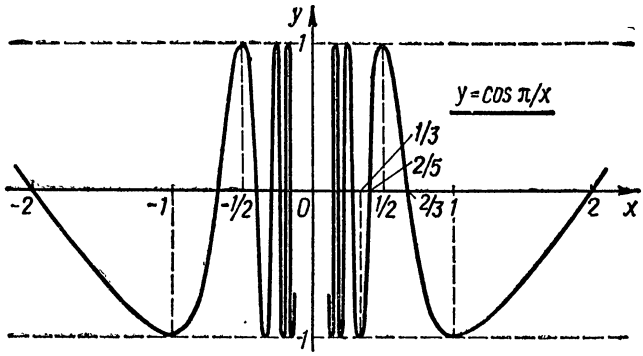


Рис. 88.

Замечание. Если и числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, то дробь $\frac{u}{v}$ может иметь как бесконечный, так и конечный предел. Она может также вообще не иметь предела.

Так, $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{\pi}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, но дробь $\dfrac{x\cos\frac{\pi}{x}}{\sin x}$ не имеет предела при $x\to 0$. Действительно, учтя, что согласно (III.12)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=1,$$

находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{\pi}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to 0}\cos\frac{\pi}{x},$$

а функция $y=\cos\frac{\pi}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$. Это ясно из графика, представленного на рис. 88: когда абсцисса x стремится к нулю, ордината y ни к чему не стремится, так как точка графика совершает бесконечные колебания с постоянной амплитудой ± 1.

Для того чтобы найти предел дроби, числитель и знаменатель которой стремятся к нулю, приходится искать обходные пути, сводящиеся в простейших случаях к подобному преобразованию данного выражения. В общем же случае

нахождение предела такой дроби называется «раскрытием неопределенности типа $\frac{0}{0}$» и будет рассмотрено в § 50.

Пример 8.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

Мы ограничимся доказательством только первой из сформулированных выше теорем, а остальные теоремы читателю будет полезно доказать самостоятельно. Хорошее доказательство этих теорем можно найти в книге Н. С. Пискунова [102, т. 1, гл. II. § 5].

Рассмотрим в теореме 1 сначала случай двух слагаемых. Пусть функции $u_1=u_1(x)$ и $u_2=u_2(x)$ стремятся соответственно к пределам b_1 и b_2:

$$\lim_{x\to a}u_1(x)=b_1;\quad \lim_{x\to a}u_2(x)=b_2.$$

Тогда при $x\to a$ согласно определению 1 (или определению 2, если $a\to\infty$) имеем

$$b_1-\varepsilon_1<u_1<b_1+\varepsilon_1,$$
$$b_2-\varepsilon_2<u_2<b_2+\varepsilon_2.$$

Отсюда вытекает, что

$$(b_1+b_2)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)<u_1\pm u_2<(b_1+b_2)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

или при другой форме записи

$$|(u_1\pm u_2)-(b_1\pm b_2)|<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

В таком случае, если $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ (а это всегда можно потребовать, поскольку согласно условию теоремы функции u_1 и u_2 имеют пределы), то и сумма их $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\to 0$, следовательно,

$$\lim(u_1\pm u_2)=b_1\pm b_2=\lim u_1\pm\lim u_2,$$

что и требовалось доказать.

Распространение этого доказательства на любое конечное число слагаемых не вызывает затруднений, например:

$$\lim(u_1\pm u_2\pm u_3)=\lim(u_1\pm u_2)\pm\lim u_3=\lim u_1\pm\lim u_2\pm\lim u_3$$

и т. д.

Упражнения

3. Вычислить следующие пределы, воспользовавшись теоремами 1, 2, 3:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x+4}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x^3-6x^2+3x)-(x-1)\sin(x-1)}{(x-1)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x+1}{5x^2-1}$.

4. Построить график функции

$$y=x\cos\frac{\pi}{x}.$$

§ 27. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Среди всех переменных величин особый интерес представляют те переменные, которые стремятся к нулю. Такие величины, названные «бесконечно малыми», играют настолько важную роль, что математический анализ часто называют также «анализом бесконечно малых величин». Это вполне закономерно, поскольку

понятие производной, лежащее в основе дифференциального исчисления, и понятие интеграла, являющееся основой интегрального исчисления, сводятся к рассмотрению пределов отношения бесконечно малых или, соответственно, пределов их сумм.

Определение 1. *Бесконечно малой величиной* (или просто *бесконечно малой*) *называется величина, предел которой равен нулю.*

Пример 1. Функция $y = x^2 - 9$ есть бесконечно малая величина при $x \to 3$ и при $x \to -3$. При $x \to 4$ или при $x \to a$, если $a \neq \pm 3$, та же функция не является бесконечно малой.

Пример 2. Целочисленная функция $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ при $n \to \infty$ есть бесконечно малая величина, так как предел последовательности

$$\{x_n\} = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

есть нуль.

Если в определении предела переменной x_n (см. § 25) положить $a = 0$, то неравенство (III. 4) примет вид

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \text{ при } n > N_\varepsilon.$$

Таким образом, данное выше определение бесконечно малой можно сформулировать и не прибегая к термину «предел».

Переменная x_n называется бесконечно малой, если она для достаточно больших номеров $n \geqslant N$ становится и остается по абсолютной величине меньше сколь угодно малого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$.

Замечание. Пользуясь этим определением бесконечно малой величины, можно через него выразить понятие предела, и такой подход встречается довольно часто в литературе. Однако надо применять только одно из этих определений. В противном случае мы придем к порочному кругу: предел будет определен через бесконечно малую, а бесконечно малая через предел.

Между переменной y, стремящейся к (конечному) пределу b, и бесконечно малой величиной существует самая тесная связь, которую можно выразить следующей теоремой.

Теорема 1. *Если переменная y стремится к (конечному) пределу b, то разность $\alpha = y - b$ есть величина бесконечно малая.* Обратно, *если разность $\alpha = y - b$ между переменной y и числом b есть величина бесконечно малая, то число b есть предел переменной y.*

Действительно, если $y \to b$, то по определению предела переменной это означает, что разность $y - b$ по абсолютной величине может стать как угодно малой, т. е. стремиться к нулю, а это согласно определению 1 и значит, что она является величиной бесконечно малой. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Из сказанного вытекает важное следствие, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Следствие. *Переменную y, стремящуюся к (конечному) пределу b, можно представить как сумму ее предела и некоторой бесконечно малой α:*

$$y = b + \alpha.$$

Обратно, *если переменную y можно представить как сумму некоторого числа b и бесконечно малой α, то значит $y \to b$.*

Необходимо подчеркнуть, что не совсем удачный исторически сложившийся термин «бесконечно малая величина» дает представление не о размере этой величины, а о характере ее изменения. Например, переменная $y = (x - 2)^7$ есть бесконечно малая при $x \to 2$. Между тем при $x = 12$ она имеет значение $y = 10^7 = 10\,000\,000$. «Бесконечная малость» переменной $y = (x - 2)^7$ заключается в том, что при $x \to 2$ абсолютное значение y может стать меньше любого наперед заданного положительного числа ε (и будет оставаться таковым, если x все больше и больше будет приближаться к 2).

Из постоянных величин существует только одно единственное число, которое является бесконечно малой величиной, — это число нуль, так как нуль, действительно, всегда меньше произвольно взятого числа ε. Поэтому ни в коем случае нельзя смешивать понятие бесконечно малой величины с часто встречающимся на практике понятием очень малой величины. Например, отрезок длиной 0,000001 *м* является чрезвычайно малой величиной по сравнению с расстоянием от Земли до Солнца, но этот же отрезок будет иметь гигантские размеры, если речь пойдет об атоме или атомном ядре.

С бесконечно малыми величинами тесно связаны величины бесконечно большие, к рассмотрению которых мы переходим.

Определение 2. *Бесконечно большой величиной (или величиной, стремящейся к бесконечности) называется переменная y, абсолютное значение которой в процессе своего изменения становится и в дальнейшем остается больше любого наперед заданного положительного числа N, как бы велико оно ни было.*

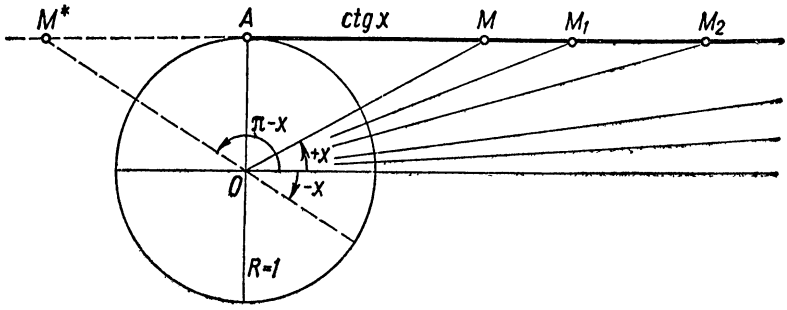


Рис. 89.

Если сформулированное в определении 2 требование $|y| > N$ выполняется, то условились записывать

$$y \to \infty$$

и читать: игрек стремится к бесконечности. Если, кроме того, переменная y, начиная с некоторого значения, остается все время положительной, то пишут $y \to +\infty$, если же отрицательной, то пишут $y \to -\infty$.

Пример 3. Целочисленная функция $y = u_n = n$ есть бесконечно большая величина, так как члены последовательности $\{u_n\} = 1, 2, 3, 4, \ldots$ неограниченно возрастают.

Пример 4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ есть бесконечно большая величина при $x \to 0$.

Действительно, взяв окружность радиуса $R = 1$ (рис. 89), имеем

$$\operatorname{ctg} x = \frac{AM}{R} = \frac{AM}{1} = AM.$$

Если угол x, находясь в первой четверти, приближается к нулю, то AM, а следовательно, и $\operatorname{ctg} x$ неограниченно растут, принимая последовательно значения AM_1, AM_2, ... В самом деле, какое бы большое положительное число N мы ни выбрали, найдется в первой четверти такой, стремящийся к нулю, угол, котангенс которого будет больше N, а потому $\operatorname{ctg} x$ останется и подавно больше N, если угол еще больше приблизится к нулю.

Итак, $\operatorname{ctg} x$ при $x \to 0$ есть бесконечно большая величина. Поскольку в первой четверти $\operatorname{ctg} x$ всегда положителен, то мы можем уточнить полученный результат и написать

$$\operatorname{ctg} x \to +\infty \text{ при } x \to +0.$$

Знак «+» при нуле и подчеркивает, что угол x, приближаясь к значению $x=0$, остается все время положительным.

Если же $x \to -0$ (или $x \to +\pi$), то и $\operatorname{ctg} x \to -\infty$. Докажите это, дополнив рис. 89 последовательностью лучей OM_1^*, OM_2^*, ..., соответствующих углам, стремящимся к развернутому углу ($x \to +\pi$) или к углу $x \to -0$, т. е. для тех случаев, когда x находится во втором или четвертом квадрантах.

Упражнение 1. Доказать, что $y = \operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая величина при $x \to \pm\frac{\pi}{2}$.

Термин «бесконечно большая» имеет те же недостатки, что и термин «бесконечно малая», так как он носит статический характер и не подчеркивает того основного

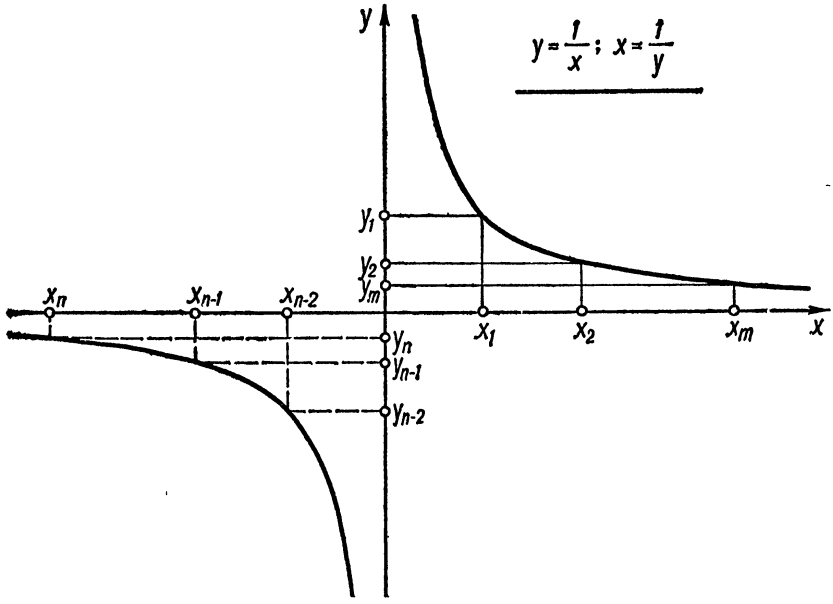


Рис. 90.

факта, что бесконечно большая величина это величина переменная. *Никакая постоянная величина не может быть бесконечно большой.* Так, число $M = 9^{9^9}$, которое больше, чем единица с 77 нулями (так как $9^{9^9} = 9^{81} = 10^{77} \cdot 1{,}950\ldots$), не является бесконечно большой величиной, поскольку легко указать число еще большее, например $N = M + 1$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами существует простая связь, которую можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Если x есть бесконечно малая величина (не принимающая нулевых значений), то обратная величина $y = \frac{1}{x}$ является бесконечно большой* (и наоборот, если первая есть бесконечно большая, то вторая является бесконечно малой).

Справедливость этой теоремы станет очевидной, если заметим, что из неравенства $|x| < \varepsilon$ следует неравенство $\left|\frac{1}{x}\right| > M = \frac{1}{\varepsilon}$ и что если ε сколь угодно мало, то $M = \frac{1}{\varepsilon}$ сколь угодно велико.

На рис. 90 показана связь между взаимно обратными величинами, удовлетворяющими уравнению $xy = 1$, графиком которого является равносторонняя гипер-

бола (см. § 18). Если последовательность $\{y\} = y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ будет стремиться к нулю, оставаясь все время положительной, то соответствующая ей последовательность $\{x\} = x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ будет стремиться к $+\infty$, и наоборот, при $x \to +0$ обратная величина $y \to +\infty$. Аналогично при $y \to -0$ переменная $x \to -\infty$, как показано пунктирными линиями на том же рис. 90. Например, при $x = \pm 0{,}0000001$ имеем $y = \pm 1\,000\,000$.

Пример 5. Величина $\operatorname{tg} x$ бесконечно мала при $x \to 0$, величина $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ бесконечно велика при $x \to 0$.

Определение 3. *Величина называется ограниченной, если абсолютное ее значение не превосходит некоторого постоянного положительного числа N.*

Например, функция $\sin x$ есть ограниченная величина на всей числовой оси так как $|\sin x| \leqslant 1$. Функция $y = \frac{x}{x-1}$ ограничена на любом отрезке числовой оси, который не содержит точки $x = 1$, скажем, на сегменте $[3; 5]$ или при $x > 1$.

Всякая постоянная величина является ограниченной. Всякая бесконечно большая величина не ограничена.

Остановимся теперь на основных свойствах бесконечно малых величин. Эти свойства непосредственно вытекают из соответствующих теорем о пределах, так что доказательство сформулированных ниже теорем оставляем читателю в качестве упражнения.

Теорема 3. *Алгебраическая сумма двух, трех и вообще любого неизменного числа бесконечно малых величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ есть величина бесконечно малая.*

Замечание. Если число слагаемых не остается неизменным, а меняется вместе с изменением аргумента, то теорема 3 может потерять силу. Так, если $\alpha_1 = \frac{1}{n}$, $\alpha_2 = \frac{1}{n}$, $\alpha_3 = \frac{1}{n}, \ldots, \alpha_n = \frac{1}{n}$, то при $n \to \infty$ каждое слагаемое бесконечно мало, но их сумма $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n$ равна единице.

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой величины α и ограниченной величины b является бесконечно малым.*

Следствия. 1. *Произведение бесконечно малой α и постоянной C есть величина бесконечно малая.*

2. *Произведение двух бесконечно малых величин есть бесконечно малая* (так как бесконечно малая есть величина ограниченная).

3. *Произведение неизменного числа бесконечно малых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ есть бесконечно малая.* В частности, целая положительная степень бесконечно малой α^n есть также бесконечно малая.

Теорема 5. *Частное $\frac{\alpha}{y}$ от деления бесконечно малой α на величину y, стремящуюся к отличному от нуля пределу b, есть величина бесконечно малая.*

Если условие теоремы 5 нарушено и $b = 0$, т. е. если y есть также бесконечно малая, то величина $\frac{\alpha}{y}$ может и не быть бесконечно малой. Например, если $\alpha = x$, $y = x^2$, то $\frac{\alpha}{y} = \frac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$.

Бесконечно малые величины следует различать по их порядку. Две бесконечно малые величины имеют одинаковый порядок, если их отношение — конечная величина, если же $\frac{\alpha}{\beta}$ — бесконечно малая, то α — бесконечно малая высшего порядка, чем β; если же $\frac{\gamma}{\alpha}$ — бесконечно большая, то $\frac{\alpha}{\gamma}$ — бесконечно малая, и α имеет высший порядок, чем γ.

Определение 4. *Бесконечно малая α называется бесконечно малой m-го порядка по отношению к другой бесконечно малой β, если порядок α одинаков с порядком бесконечно малой β^m.*

Определение 5. *Равносильные, или эквивалентные, бесконечно малые — такие, предел отношения которых равен единице.*

При отыскании предела отношения двух бесконечно малых величин каждую из них можно заменить равносильной бесконечно малой, не изменив этим предела.

Эквивалентность бесконечно малых величин обозначается тем же знаком $\approx$, что и приближенное равенство. Таким образом, если $x \to 0$, то*

$$\sin x \approx x; \quad \sin 2x \approx 2x; \quad \sin^2 x \approx x^2; \quad 1 - \cos x \approx \frac{1}{2} x^2.$$

Эквивалентные величины и в самом деле приближенно равны и это равенство будет тем точнее, чем они ближе к нулю. Так, при $x = 0{,}1$ (с шестью значащими цифрами)

$$\sin x = 0{,}0998334 \approx 0{,}100; \quad 1 - \cos x = 0{,}00499583; \quad \frac{1}{2} x^2 = 0{,}00500000;$$

а при $x = 0{,}01$ соответственно

$$\sin x = 0{,}00999983 \approx 0{,}010000; \quad 1 - \cos x = 0{,}0000499996; \quad \frac{1}{2} x^2 = 0{,}0000500000.$$

Пример 6. Найти предел функции

$$y = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ при } x \to 0. \tag{III.19}$$

Решение. Заменив $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, имеем

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2},$$

так как согласно формуле (III.12) § 26 бесконечно малые $\left(\frac{x}{2}\right)$ и $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ при $\left(\frac{x}{2}\right) \to 0$ эквивалентны и предел их отношения равен единице.

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{III.20}$$

и, следовательно, функции $1 - \cos x$ и x^2 при $x \to 0$ суть бесконечно малые второго порядка (относительно x или $\sin x$), но они не эквивалентны, поскольку предел их отношения не равен единице. Из формулы (III.20) непосредственно получаем приближенную формулу, которой мы уже пользовались:

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2} x^2. \tag{III.21}$$

Упражнения

2. Доказать, что

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg} x = 1. \tag{III.22}$$

* Эквивалентность функций $1 - \cos x$ и $\frac{1}{2} x^2$ следует из формулы (III.20), которая будет доказана при решении примера 6.

Указание. Заменить $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ и воспользоваться формулой (III.12).

3. Доказать, что функции x и $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ при $x \to 0$ есть эквивалентные бесконечно малые.

4. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin x} = 0$, т. е. что $1 - \cos x$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\sin x$.

В заключение отметим, что «несобственные числа» $\pm\infty$, которые были введены для того, чтобы иметь величину обратную нулю, имеют совершенно условный смысл и над этими числами нельзя производить арифметические действия. Например, $\infty - \infty$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ не равны нулю или единице, как это имеет место в случае любого конечного числа a, для которого $a - a = 0$ и $\dfrac{a}{a} = 1$. Выражения $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, равно как и рассмотренное ранее выражение $\dfrac{0}{0}$, суть неопределенности с правилами раскрытия которых мы познакомимся в § 50.

Необходимо также подчеркнуть, что и нулю присуще свойство, которым не обладает ни одно другое число, а именно, умножив обе части неравенства, например $3 \neq 5$, на нуль, мы получаем равенство $3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$, т. е., образно говоря, умножением на нуль невозможное можно обратить в возможное. В этом факте, по-видимому, и заключена суть тех логических трудностей, с которыми было связано введение в математику бесконечно малых и бесконечно больших величин.

§ 28. Непрерывность функций. Разрывы первого и второго рода и устранимые разрывы

Непрерывные функции образуют наиболее распространенный класс функций, с которыми оперирует математический анализ. Представление о непрерывной функции мы получим, если охарактеризуем ее тем свойством, что график непрерывной функции можно начертить одним непрерывным движением, не отрывая карандаша от бумаги.

Примером непрерывной функции могут служить различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимость пути s, пройденного телом, от времени t. Время и пространство непрерывны, поэтому тот или иной закон движения тела $s = f(t)$ устанавливает между ними определенную непрерывную связь, характеризующуюся тем, что малому приращению времени соответствует малое же приращение пути. Следовательно, график функции $s = f(t)$ будет изображаться непрерывной линией.

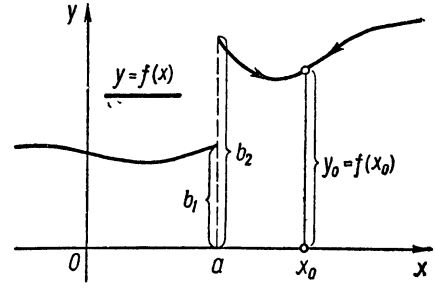


Рис. 91.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, представленной на рис. 91. Для всякого значения аргумента $x = x_0$, кроме $x = a$, функция y принимает одно и то же значение $y = y_0 = f(x_0)$ независимо от того, приближаемся ли мы к данной точке x_0 справа или слева. В точке же $x = a$ значения функции справа и слева различны и, переходя через точку $x = a$, функция $y = f(x)$ терпит разрыв непрерывности и скачком изменяет свое значение.

Дадим теперь этому интуитивному, приблизительному представлению точную математическую формулировку.

Определение 1. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если предельное ее значение при $x \to x_0$ равно ее частному значению $f(x_0)$ при $x = x_0$:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{III.23}$$

Это определение и гарантирует, что в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ не может изменить скачком свое значение (в зависимости от направления, по которому мы пришли в точку x_0), как это имеет место для точки $x = a$, в которой равенство $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ не выполняется.

Равенство (III.23) в точке $x = a$ не выполняется, потому что в точке a функция $f(x)$ не имеет единого предела, а имеет так называемые, *односторонние пределы* $f(a - 0) = b_1$ и $f(a + 0) = b_2$ (см. рис. 91).

Если значение функции $f(x)$ стремится к числу b_1 по мере стремления x к a со стороны меньших значений, то число b_1 называют *пределом слева* $f(a - 0)$ (или *левосторонним пределом*) функции $f(x)$ в точке $x = a$ и пишут

$$\lim_{x \to a - 0} f(x) = f(a - 0) = b_1. \tag{III.24}$$

Если $f(x)$ стремится к b_2 по мере стремления x к a со стороны больших значений, то b_2 называют *пределом справа* $f(a + 0)$ (или *правосторонним пределом*) функции $f(x)$ в точке $x = a$ и пишут

$$\lim_{x \to a + 0} f(x) = f(a + 0) = b_2. \tag{III.25}$$

Величина $|b_2 - b_1|$ называется *скачком* или *разрывом*.

Таким образом, из определения 1 следует, что функция $f(x)$, непрерывная в точке $x_0 = a$, имеет в точке x_0 предел слева $f(x_0 - 0)$ и предел справа $f(x_0 + 0)$, причем оба этих предела одинаковы и равны значению функции в этой точке x_0, т. е.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{III.26}$$

Если эти условия не выполняются, несмотря на то, что функция $f(x)$ определена для всех значений x, достаточно близких к точке a, то функцию $f(x)$ называют *разрывной в точке* $x = a$, а саму точку a называют *точкой разрыва* функции. Разрывы бывают конечные, бесконечные и устранимые.

Конечным разрывом, или *разрывом первого рода*, называется такой, когда величина скачка $|b_2 - b_1|$ функции $y = f(x)$ в точке разрыва $x = a$ конечна. Функция, график которой изображен на рис. 91, в точке a имеет разрыв первого рода. Если же величина скачка $|b_2 - b_1| = \infty$, то будем иметь *бесконечный разрыв*, или *разрыв второго рода*. Например, функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ терпит разрыв непрерывности (см. рис. 90) и ее график в окрестности точки $x = 0$ нельзя начертить, не отрывая карандаша от бумаги (так же, как и график на рис. 91 в окрестности точки $x = a$). Так как при $x \to 0$ для рассматриваемой функции $y = f(x) = \frac{1}{x}$ пределы слева и справа будут соответственно

$$b_1 = \lim_{x \to -0} f(x) = -\infty; \quad b_2 = \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty,$$

то величина скачка $|b_2 - b_1|$ бесконечно большая и, следовательно, мы имеем разрыв второго рода

Устранимым разрывом называется такой, когда $\lim_{x \to a} f(x)$ существует и притом $f(a - 0) = f(a + 0)$, но при $x = a$ функция $f(x)$ вначале не определена. Примером

устранимого разрыва является разрыв функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$, в которой она имеет неопределенность типа 0 : 0. До тех пор, пока неопределенность не устранена (а это не во всех случаях удается сделать), мы должны исключать точку нуль из рассмотрения, так что графиком функции $y = f(x) = \frac{\sin x}{x}$, строго говоря, является график, приведенный на рис. 87, с *исключенной точкой* $x = 0$. Но как только неопределенность раскрыта и установлено, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, мы можем нашу функцию д о о п р е д е л и т ь, приписав ей значение $f(0) = 1$, и тем самым устранить существовавший ранее разрыв. Отсюда становится понятным

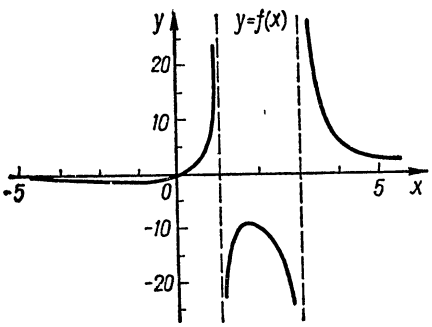


Рис. 92.

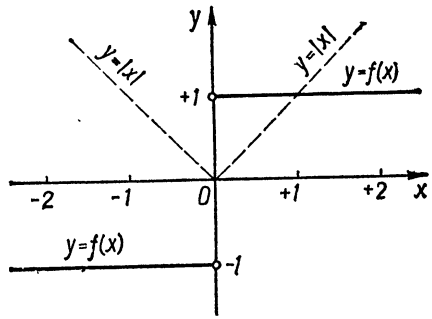


Рис. 93.

происхождение термина «устранимый разрыв». Если же неопределенность не удается раскрыть, то остается разрыв в виде одной исключенной из рассмотрения точки $x = a$, в которой значение функции $f(x)$ неизвестно.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$ называется непрерывной для всех значений, принадлежащих к данному промежутку, если она непрерывна в каждой точке x_0 этого промежутка, т. е. если в каждой такой точке выполняется равенство (III.23).*

Если равенство (III.23) выполняется и на концах a, b рассматриваемого промежутка, то говорят, что функция *непрерывна на замкнутом промежутке* $[a, b]$; в противном случае говорят, что функция *непрерывна в незамкнутом (открытом) промежутке* (a, b), *а также в полузамкнутом* — $[a, b)$ или $(a, b]$.

Функция, заданная и непрерывная для всех точек числовой оси, называется *непрерывной всюду*. Если же $f(x)$ непрерывна во всех точках некоторого промежутка, за исключением конечного числа отдельных его точек, в которых $f(x)$ имеет конечные разрывы, то такая функция называется *кусочно-непрерывной*. График кусочно-непрерывной функции состоит из нескольких отрезков кривых (или, в частном случае, прямых) линий.

Пример 1. Функция $f(x) = \frac{5x}{(x-1)(x-3)}$ имеет разрывы второго рода в точках $x = 1$ и $x = 3$ (рис. 92). Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в любом промежутке, не содержащем точек $x = 1$ и $x = 3$, и разрывна для тех промежутков, в состав которых входит хотя бы одна из этих точек. Например, на сегментах $[0; 1]$, $[1; 3]$, $[3; 5]$ $f(x)$ разрывна, а на сегментах $[-5; 0{,}9]$, $[1{,}1; 2{,}9]$, $\left[3\frac{1}{2}; \infty\right]$ — непрерывна.

Пример 2. Функция $f(x) = \frac{x}{|x|}$ определена и непрерывна при всех значениях x, кроме $x = 0$ (рис. 93).

Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $f(x) = \frac{x}{x} = 1 = \text{const}$; если же $x < 0$, то $|x| = -x$ и $f(x) = \frac{x}{-x} = -1 = \text{const}$. В самой точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода со скачком равным двум, так как предел слева $b_1 = \lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$, а предел справа $b_2 = \lim\limits_{x \to +0} f(x) = +1$ и, следовательно, $|b_2 - b_1| = 2$.

На этом же рисунке пунктиром изображена функция $y = |x|$, непрерывная всюду, но имеющая в точке $x = 0$ угловую точку.

Пример 3. Количество тепла Q, сообщаемого телу, есть функция температуры тела T. На рис. 94 представлен график этой функции. Линия AB соответствует твердому состоянию, при котором температура поднимается от своего начального значения T_0 до температуры плавления T_1. При дальнейшем нагревании температура будет оставаться неизменной до тех пор, пока тело не перейдет целиком в жидкое состояние, а затем снова начнет повышаться температура образовавшейся жидкости. Картина повторится и при превращении жидкости в газ. Отрезок BC соответствует скрытой теплоте плавления, а отрезок DE — скрытой теплоте парообразования. Таким образом, функция Q есть кусочно-непрерывная функция*.

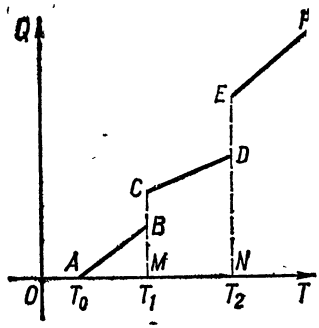


Рис. 94.

Упражнения

1. Построить график функции $Q = Q(T)$ для воды, приняв, что $Q = 0$ при $T_0 = -10°$ и что (в первом приближении) Q есть линейная функция температуры $Q = kT + b$ с угловым коэффициентом $k = 1$ (т. е. что теплоемкость льда, воды и пара $\approx$ ≈ 1 *кал/г · град*). Скрытая теплота плавления льда 79 *кал/г*; скрытая теплота парообразования воды 539 *кал/г*.

Указание. Масштаб по оси Q следует взять в пять раз меньшим, чем по оси T.

2. Исследовать функцию $y = \operatorname{tg} x$ на сегменте $[-2\pi; 2\pi]$ и начертить ее график. Определить точки разрыва и величину скачка в этих точках.

3. Исследовать функцию $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$ на сегментах $[0; \pi]$ и $[-\pi; 2\pi]$ и построить соответствующие графики.

Непрерывность функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ мы определили при помощи равенства (III.23), исходя из понятия предела функции. Воспользовавшись теоремой 1 § 27, можно дать другое определение непрерывности, эквивалентное исходному, но которое будет основываться на понятии бесконечно малой величины. Для того чтобы его сформулировать, мы должны предварительно сказать о том, что́ называется приращением переменной величины и, в частности, приращением аргумента и приращением функции.

Если переменная y принимает сначала значение $y = y_0$, а затем $y = y_1$, то разность $y_1 - y_0$ называется *приращением* величины y. Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю в зависимости от того, будет ли $y_0 < y_1$, или $y_0 > y_1$, или $y_0 = y_1$. Слово «приращение» обозначается прописной

* Для некоторых веществ график функции Q может иметь только один разрыв. Например, кристаллический иод при быстром нагревании до температуры 184,3° С сублимируется, переходя непосредственно в парообразное состояние и минуя жидкую фазу. Этим же свойством обладают нафталин, окись бериллия и некоторые другие вещества.

греческой буквой «дельта», Δ, а запись Δy (читается: дельта игрек) обозначает приращение величины y, так что*

$$\Delta y = y_1 - y_0. \tag{III.27}$$

Очевидно, что приращение постоянной $y = C = \text{const}$ всегда равно нулю.

Если y есть функция от x, $y = f(x)$ то приращению аргумента $\Delta x = x_1 - x_0$ соответствует приращение функции $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$. Иногда в этом случае вместо Δy пишут $\Delta f(x)$ или просто Δf:

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0).$$

Определим теперь непрерывность функции в терминах приращений. Переход от значения x_0 к другому значению $x_1 = x$ можно себе представлять так, что значению x_0 придано приращение $\Delta x = x - x_0$, откуда и получаем $x = x_0 + \Delta x$. Тогда новое значение функции $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x)$ разнится от старого $y = f(x_0)$ на приращение

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение Δy в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением Δx независимой переменной.

Иными словами, *непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции*, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{III.28}$$

Равенства (III.28) и (III.23) эквивалентны, в чем непосредственно убеждаемся, как только представим равенство (III.23) в виде

$$\lim_{(x - x_0) \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

и перейдем затем к приращениям $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Следовательно, и определение 1 непрерывности функции в заданной точке эквивалентно определению (III.28). Но новое определение обладает большей наглядностью и лучше передает характер изменения непрерывной функции, как изменения п л а в н о г о, без скачков, такого, что «малым» изменениям аргумента соответствуют «малые» же изменения функции. А именно такой характер изменения функции мы и подразумевали интуитивно, когда говорили, что график непрерывной функции можно вычертить единым движением карандаша, не отрывая его от бумаги. В точках разрыва, когда $\Delta x \to 0$, приращение Δy не стремится к нулю, а принимает конечное или бесконечное значение, как это легко увидеть на рис. 91—94.

П р и м е р 4. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна на всей действительной оси.

Р е ш е н и е. Если мы сообщим аргументу x приращение Δx, то y получит приращение

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Положив $\alpha = x + \Delta x$, $\beta = x$ и воспользовавшись известной тригонометрической формулой

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2},$$

---

* Подчеркнем, что Δy надо понимать как одно целое и его нельзя рассматривать как произведение двух сомножителей. Символ Δ неотделим от y так же, как, например, в выражении $\lg y$ символ $\lg$ неотделим от y.

приращение Δy можно представить в следующем виде:

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\sin \frac{\Delta x}{2}$ есть величина бесконечно малая. Что же касается $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$, то это величина ограниченная, так как $|\cos \gamma| \leqslant 1$ при любом значении $\gamma = x + \frac{\Delta x}{2}$. В таком случае согласно теореме 4 § 27 Δy есть тоже бесконечно малая, т. е. $\Delta y \to 0$, а это и доказывает непрерывность функции $y = \sin x$ в любой точке x.

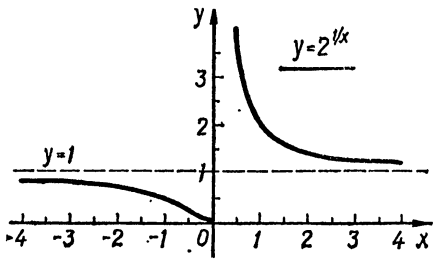


Рис. 95.

Упражнение 4. Доказать, что функция $y = \cos x$ непрерывна на всей действительной оси.

Пример 5. Исследовать поведение функции $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ на всей действительной оси $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$.

Решение. Легко видеть, что функция $f(x)$ определена и положительна при всех значениях x, кроме $x = 0$. В частности, если $x \to \infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$, так что

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2^0 = 1.$$

Таким образом, в бесконечно далекой точке «предел слева» равен «пределу справа»: $f(-\infty) = f(+\infty) = 1$, и, следовательно, функция $f(x)$ в точке $x = \infty$ непрерывна*.

Далее, если x возрастает от $-\infty$, приближаясь к нулю, то $\frac{1}{x}$ убывает от 0 до $-\infty$, в результате чего $2^{\frac{1}{x}}$ убывает от 1 до 0 (рис. 95). Но как только x, достигнув нуля слева, т. е. приняв значение $x = -0$, перейдет на правую сторону оси абсцисс, т. е. перейдет в $x = +0$, величина $\frac{1}{x}$ скачком изменит свое значение с $-\infty$ на $+\infty$, и тогда $y = 2^{\frac{1}{x}}$ также скачком увеличится от 0 до $+\infty$:

$$b_1 = \lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0; \quad b_2 = \lim_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Таким образом, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, так как величина скачка $|b_2 - b_1| = \infty$. При дальнейшем увеличении аргумента x функция $f(x)$ будет, монотонно убывая, стремиться к своему асимптотическому значению $f(\infty) = 1$ (рис. 95). На этом же рисунке пунктиром изображена и прямая $y = 1$, которая является асимптотой функции $y = f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.

* Говорят, что $f(x)$ непрерывна в точке $x = \infty$, если после подстановки $\tau = \frac{1}{x}$ мы придем к функции $f(\tau)$, непрерывной в точке $\tau = 0$. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в гл. X.

Пример 6. Исследовать на всей действительной оси поведение функции

$$y = f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}.$$

Решение. Этот более сложный пример исследуется с точки зрения возрастания и убывания подобно предыдущему и приводит к графику, изображенному на рис. 96. Здесь также имеется разрыв в точке $x = 0$, но в данном случае

$$b_1 = \lim_{x \to -0} f(x) = \frac{1}{1 + 2^{-\infty}} = 1; \quad b_2 = \lim_{x \to +0} f(x) = \frac{1}{1 + 2^{+\infty}} = 0,$$

так что скачок $|b_2 - b_1| = 1$ и, следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода. Во всех остальных точках действительной оси (включая

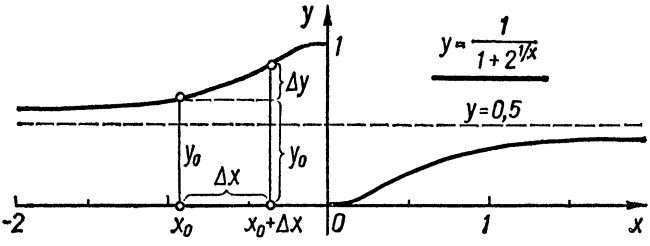


Рис. 96.

и точку $x = \infty$) функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому, если мы приращение Δx (при $x_0 \neq 0$) начнем стягивать в точку, т. е. осуществлять в равенстве (III.28) условие $\Delta x \to 0$, то и соответствующее ему приращение Δy также будет стремиться к нулю (см. рис. 96).

Отметим также, что функция $f(x)$ обладает свойством

$$f(x) + f(-x) = 1$$

(справедливость которого читателю полезно доказать в виде упражнения), так что точка $(0; {}^1/_2)$ есть центр симметрии графика. В бесконечно далекой точке $f(-\infty) = f(+\infty) = \frac{1}{2}$, а прямая $y = \frac{1}{2}$, параллельная оси x, есть асимптота функции $f(x)$.

§ 29. Свойства непрерывных функций

Теорема 1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то их сумма $u + v$, разность $u - v$, произведение uv и частное $\frac{u}{v}$ также непрерывны в точке $x = x_0$, причем в случае частного предполагается, что знаменатель* не обращается в нуль при $x = x_0$.*

Доказательство. Справедливость этой теоремы непосредственно вытекает из соответствующих теорем о пределах алгебраической суммы, произведения и частного двух функций.

В самом деле, если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то,

* Случай $u(x_0) = 0$, $v(x_0) = 0$ приводит к неопределенности типа $\frac{0}{0}$, которую надо дополнительно исследовать в каждом конкретном случае.

значит, существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$; но в таком случае

$$\lim_{x\to x_0}(u \pm v) = \lim_{x\to x_0} u \pm \lim_{x\to x_0} v = u(x_0) \pm v(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}(u \cdot v) = \lim_{x\to x_0} u \cdot \lim_{x\to x_0} v = u(x_0) \cdot v(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\lim u}{\lim v} = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}.$$

Согласно определению 1 § 28 первое из этих равенств доказывает непрерывность функций $u+v$ и $u-v$ (в точке $x=x_0$), второе доказывает непрерывность функции uv, а третье — непрерывность функции $\frac{u}{v}$. Обобщение этой теоремы на любое конечное число слагаемых или сомножителей не вызывает никаких трудностей.

Теорема 1 уже теперь позволяет нам судить о непрерывности обширного класса функций. Так, воспользовавшись только утверждением, что линейная функция $y=x$ непрерывна (для этой функции $\Delta y = \Delta x$ и, очевидно, что при $\Delta x \to 0$ имеем $\Delta y \to 0$, так что равенство (III.28) для нее выполняется при любом значении x), как следствие теоремы 1 получаем следующее: •

1. *Степень x^n с натуральным показателем $n = 1, 2, 3, \ldots$ представляет собой функцию, непрерывную при всех значениях x.* В частности, функции $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$ и т. д. всюду непрерывны.

2. *Умножая на постоянное число c функцию $f(x)$, непрерывную в точке $x=x_0$, мы снова получаем функцию, непрерывную в точке $x=x_0$.* Поэтому, в частности, функции c_1x, c_2x^2, c_3x^3, ... (где c_1, c_2, c_3, ... — константы) суть функции, непрерывные на всей числовой оси. Таковы, например, функции $y=-7x^3$, $y=15x^8$ и т. п.

3. *Полином*

$$P(x) \equiv P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad \text{(III.29)}$$

есть функция, непрерывная на всей числовой оси. Например, функция $y = 7 + 3x - x^5$ непрерывна всюду. Заметим попутно, что в тех случаях, когда это необходимо, индексом n будем отмечать степень полинома (III.29), т. е. вместо $P(x)$ писать $P_n(x)$.

4. *Рациональная функция*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m}, \qquad \text{(III.30)}$$

представляющая собой отношение двух полиномов (степени n и m) $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, *непрерывна при всех значениях x, которые не обращают знаменатель в нуль*.* Например, функция $R(x) = \dfrac{4+6x^3+9x^7}{x^2-3x-10}$ непрерывна при всех значениях x, кроме $x=-2$ и $x=5$, где она имеет разрывы второго рода. Функция $R^*(x) = \dfrac{4+6x^3+9x^7}{x^2+3x+10}$ непрерывна при всех значениях x без каких-либо исключений (так как знаменатель $x^2+3x+10$ не имеет действительных корней).

Итак, на основании теоремы 1 можно утверждать, что всякая рациональная функция непрерывна во всех точках, в которых она определена, или, короче, *область непрерывности рациональной функции совпадает с областью ее существования.*

---

* Полиномы $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ должны быть несократимы. В противном случае будем иметь устранимые разрывы в тех нулях знаменателя Q_m, которые одновременно являются нулями (той или более высокой кратности) числителя P_n.

Пример. Исследовать непрерывность рациональной функции

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5 + 2x^2 - 3}{x^3 - 1}.$$

Решение. Знаменатель $Q(x) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ имеет один действительный корень $x = 1$. Поэтому функция $R(x)$ определена и непрерывна при любом значении $x \neq 1$. Например, проверим непрерывность функции в точке $x = 0$.

I. Если $x = 0$, то $R(0) = 3$.

II. Если $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} R(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5 + 2x^2 - 3}{x^3 - 1} = 3$.

Таким образом, в полном соответствии с определением 1 § 28 для функции $f(x) = R(x)$ при $x_0 = 0$ выполняется равенство (III.23)

$$\lim_{x\to 0} R(x) = R(0)$$

и, следовательно, функция $R(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Аналогичным путем можно доказать непрерывность функции $R(x)$ в любой другой точке $x \neq 1$.

При $x = 1$ функция $R(x)$ не определена, поскольку при $x = 1$ и числитель $P(x)|_{x=1} = x^5 + 2x^2 - 3 = 0$, и знаменатель $Q(x)|_{x=1} = x^3 - 1 = 0$ обращаются в нуль, так что мы приходим к неопределенности

$$R(1) = \frac{P(1)}{Q(1)} = \frac{0}{0}.$$

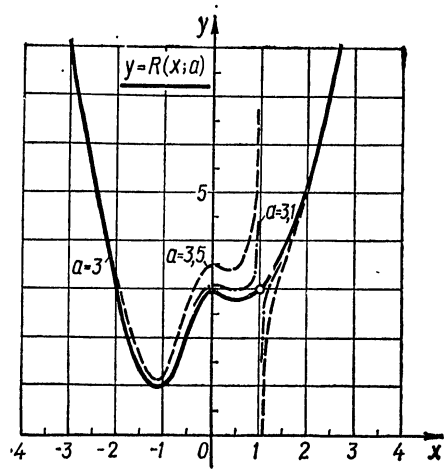


Рис. 97.

Таким образом, точка $x = 1$ является единственной точкой разрыва функции $f(x) = R(x)$, в которой значение ее остается неизвестным. На рис. 97 сплошной линией изображен график функции $R(x)$, на котором точка с абсциссой $x = 1$ исключена из рассмотрения. Именно отсутствие одной этой точки и делает нашу функцию разрывной при $x = 1$.

Исследуем функцию $R(x)$ несколько шире, представив ее числитель $P(x)$ в виде

$$P(x) \equiv P(x;\ a) = x^5 + 2x^2 - a,$$

где свободный член a может принимать любые значения. В табл. 2 вычислен ряд значений функции

$$R(x;\ a) = \frac{P(x;\ a)}{Q(x)} = \frac{x^5 + 2x^2 - a}{x^3 - 1}$$

при $a = 3$; $a = 3{,}1$; $a = 3{,}5$ и по этим данным на рис. 97 построены соответствующие кривые.

Анализ этих результатов показывает, что если $a \neq 3$, то при $x = 1$ числитель $P(x;\ a) = 3 - a \neq 0$, а знаменатель $Q(x) = x^3 - 1$ остается равным нулю. Поэтому функция $R(x;\ a)$ в точке $x = 1$ имеет разрыв второго рода, так как при $a \neq 3$ согласно формулам (III.24) и (III.25)

$$b_1 = \lim_{x\to 1-0} R(x;\ a) = +\infty,\quad b_2 = \lim_{x\to 1+0} R(x;\ a) = -\infty,\quad |b_1 - b_2| = \infty,$$

что и проиллюстрировано на рис. 97 для кривых $a = 3{,}5$ (пунктирная линия) и $a = 3{,}1$ (штрих-пунктирная линия).

Таблица 2

$P(x;\ a) = x^5 + 2x^2 - a$; $Q(x) = x^3 - 1$; $R(x;\ a) = \frac{P(x;\ a)}{Q(x)}$					$a = 3$		$a = 3{,}1$		$a = 3{,}5$		
x	x^2	x^3	x^5	$Q(x)$	$P(x;\ a)$	$R(x;\ a)$	$P(x;\ a)$	$R(x;\ a)$	$P(x;\ a)$	$R(x;\ a)$	x
3,0	9,0000	27,0000	243,000	26,0000	258,000	9,923	257,900	9,919	257,500	9,904	3,0
2,0	4,0000	8,00000	32,0000	7,00000	37,0000	5,286	36,9000	5,271	36,5000	5,214	2,0
1,5	2,2500	3,37500	7,59375	2,37500	9,09375	3,829	8,99375	3,787	8,59375	3,618	1,5
1,2	1,4400	1,72800	2,48832	0,72800	2,36832	3,253	2,26832	3,116	1,86832	2,566	1,2
1,1	1,2100	1,33100	1,61051	0,33100	1,03051	3,113	0,93051	2,811	0,53051	1,603	1,1
1,05	1,1025	1,15763	1,27629	0,15763	0,48129	3,053	0,38129	2,419	—0,01871	—0,119	1,05
1,01	1,0201	1,03030	1,05101	0,03030	0,09121	3,010	—0,00879	—0,290	—0,40879	—13,49	1,01
1,00	1,0000	1,00000	1,00000	0	0	—	—0,10000	$\mp\infty$	—0,50000	$\mp\infty$	1,00
0,99	0,9801	0,97030	0,95099	—0,02970	—0,08881	2,990	—0,18881	+6,357	—0,58881	+19,83	0,99
0,95	0,9025	0,85738	0,77379	—0,14262	—0,42121	2,953	—0,52121	3,655	—0,92121	6,459	0,95
0,90	0,8100	0,72900	0,59049	—0,27100	—0,78951	2,913	—0,88951	3,282	—1,28951	4,758	0,90
0,5	0,2500	0,12500	0,03125	—0,87500	—2,46875	2,821	—2,56875	2,936	—2,96875	3,393	0,5
0,1	0,0100	0,00100	0,00001	—0,99900	—2,97999	2,983	—3,07999	3,083	—3,47999	3,483	0,1
0,0	0,0000	0,00000	0,00000	—1,00000	—3,00000	3,000	—3,10000	3,100	—3,50000	3,500	0,0
—0,1	0,0100	—0,00100	—0,00001	—1,00100	—2,98001	2,977	—3,08001	3,077	—3,48001	3,477	—0,1
—0,5	0,2500	—0,12500	—0,03125	—1,12500	—2,53125	2,250	—2,63125	2,339	—3,03125	2,694	—0,5
—1,0	1,0000	—1,00000	—1,00000	—2,00000	—2,00000	1,000	—2,10000	1,050	—2,50000	1,250	—1,0
—1,1	1,2100	—1,33100	—1,61051	—2,33100	—2,19051	0,940	—2,29051	0,983	—2,69051	1,154	—1,1
—1,2	1,4400	—1,72800	—2,48832	—2,72800	—2,60832	0,956	—2,70832	0,993	—3,10832	1,139	—1,2
—1,5	2,2500	—3,37500	—7,59375	—4,37500	—6,09375	1,393	—6,19375	1,416	—6,59375	1,507	—1,5
—2,0	4,0000	—8,00000	—32,0000	—9,00000	—27,0000	3,000	—27,1000	3,011	—27,5000	3,056	—2,0
—3,0	9,0000	—27,0000	—243,000	—28,0000	—228,000	8,143	—288,100	8,146	—228,500	8,161	—3,0

Если же a точно равно трем, то мы приходим к неопределенности, которую в данном примере легко раскрыть. Действительно, разложив числитель и знаменатель на множители, имеем:

$$R(x)=\frac{x^5+2x^2-3}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+3x+3)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x^4+x^3+x^2+3x+3}{x^2+x+1}$$

и при $x=1$ находим, что $R(1)=\frac{9}{3}=3$. Таким образом, появилась возможность доопределить функцию $R(x)=\frac{x^5+2x^2-3}{x^3-1}$ в точке $x=1$, положив $R(1)=3$. Геометрически это значит, что мы дополнили график функции $R(x)$ точкой (1; 3), в результате чего линия графика сделалась сплошной, а сама функция $R(x)$ — непрерывной в точке $x=1$, т. е. искусственным путем устранили разрыв. В связи с этим необходимо подчеркнуть, что фактически мы не устранили разрыв *первоначально данной функции* $R(x)=\frac{x^5+2x^2-3}{x^3-1}$, а заменили ее *другой непрерывной функцией* $f(x)=\frac{x^4+x^3+x^2+3x+3}{x^2+x+1}$, которая по определению совпадает с $R(x)$ при $x\neq 1$ и равна 3 при $x=1$. Такое устранение разрыва возможно лишь в тех случаях, когда удается раскрыть возникшую неопределенность. В тех же случаях, когда это невозможно выполнить, функция $f(x)$ остается разрывной и ее графиком будет линия с одной выколотой точкой.

Итак, в данном примере функция $R(x;\ a)=\frac{x^5+2x^2-a}{x^3-1}$ при $a\neq 3$ имеет в точке $x=1$ разрыв второго рода, который только при $a=3$ переходит в устранимый разрыв. Однако как бы ничтожно мало a ни отличалось от трех, графиком функции $R(x;\ a)$ все равно будет разрывная линия, асимптотически уходящая соответственно в $+\infty$ и $-\infty$ вдоль вертикальной прямой $x=1$. Другими словами, при $a\to 3$ графиком функции $R(x;\ a)$ будет *разрывная кривая*, бесконечно мало отклоняющаяся от графика непрерывной функции $R(x)=\frac{x^5+2x^2-3}{x^3-1}$ на всей действительной оси, за исключением сколь угодно малой окрестности точки $x=1$, в которой это отклонение становится бесконечно большим *.

Упражнения

1. Построить график функции $R(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ и доказать, что она в точке $x=1$ имеет устранимый разрыв, а в точке $x=-1$ — разрыв второго рода.

2. Построить график функции $R(x;\ a)=\frac{x^3-a}{x^2-1}$ при $a=1{,}1$ и $a=1{,}5$ и исследовать ее поведение в окрестности точки $x=1$.

Рассмотрим основные свойства функций, непрерывных в некотором промежутке, которыми будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Первым на путь строгого обоснования их стал Больцано (1817 г.), а вслед за ним — Коши (1821 г.). Им и принадлежат приводимые ниже две важные теоремы.

Первая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a,\ b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b непременно найдется точка c, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль:*

$$f(c)=0,\quad a<c<b.$$

* Предельный переход $a\to 3$ для функции $R(x;\ a)$, рассмотренной в данном примере, иллюстрирует так называемую неравномерную сходимость к пределу, с которой мы познакомимся в § 93.

Теорема имеет очень простой геометрический смысл: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси x на другую, то она непременно пересекает эту ось (рис. 98). Однако строгое математическое доказательство этой, такой очевидной, теоремы выходит за рамки данной книги, и читатель может его найти, например, в [149, т. 1, стр. 128].

Заметим, что требование непрерывности функции $f(x)$ в замкнутом промежутке $[a, b]$ — существенно: *функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному и не обращаясь в нуль.* Так будет, например, с функцией $f(x) = \frac{x}{|x|}$, рассмотренной в примере 2 § 28, которая нигде не принимает значения нуль, хотя $f(x) = -1$ при любом отрицательном x и $f(x) = +1$ при любом положительном x (см. рис. 93).

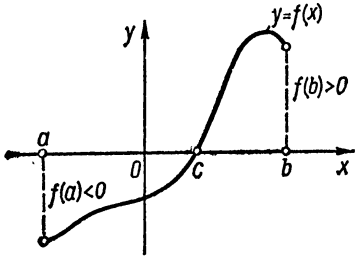


Рис. 98.

Вторая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает неравные значения*

$$f(a) = A \text{ и } f(b) = B.$$

Тогда, каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка c между a и b, что

$$f(c) = C.$$

Доказательство. Будем считать, например,

$$A < B, \text{ так что } A < C < B.$$

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - C.$$

Эта функция непрерывна в промежутке $[a, b]$ и на его концах имеет разные знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0; \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тогда по первой теореме Больцано — Коши между a и b найдется точка c, для которой $\varphi(c) = 0$, т. е.

$$\varphi(c) = f(c) - C = 0, \text{ или } f(c) = C,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, мы установили важное свойство функции $f(x)$, непрерывной в некотором промежутке: переходя от одного значения к другому, функция хотя бы один раз проходит через каждое промежуточное значение.

Это свойство, на первый взгляд, кажется вскрывающим самую сущность непрерывности функции. Однако легко построить разрывные функции, которые также обладают этим свойством. Например, функция

$$f(x) = \cos\frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0$$

в любом промежутке, содержащем точку разрыва $x = 0$, принимает все возможные для нее значения от -1 до $+1$. Поэтому еще Больцано подчеркивал, что указанное свойство есть следствие непрерывности, но его нельзя класть в основу определения непрерывности.

§ 30. Обратная функция и ее непрерывность. Сложная функция

Для дальнейшего изучения свойств непрерывных функций следует более подробно остановиться на понятии обратной функции.

Функция

$$y = f(x)$$

каждому допустимому значению x приводит в соответствие одно или несколько значений y. Аналогично каждому значению y будет соответствовать одна или несколько точек x, удовлетворяющих уравнению $y = f(x)$. Поэтому, решив уравнение $y = f(x)$ относительно x, получим новую функцию

$$x = \varphi(y),$$

которая называется *обратной функцией*. В свою очередь, функция $f(x)$ является обратной по отношению к функции $\varphi(y)$, поэтому часто функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ называют *взаимно обратными*. Нахождение обратной функции по уравнению прямой функции называется *обращением* последней.

Необходимо отметить, что и прямая и обратная функции устанавливают одно и то же соответствие между переменными x и y, так что графики этих функций (если при их построении не менять ролями оси координат) будут представлять собой одну и ту же линию. Однако свойства этих функций и удобства, которые они создают при решении задач или во время вычислений, различны. Поэтому идея обращения функций широко применяется в математике для получения новых функциональных зависимостей.

Подобные обстоятельства встречаются не только в математике. Например, пользуясь англо-русским словарем очень легко перевести на русский язык данное английское слово. Однако если мы попытаемся эту же задачу решить при помощи русско-английского словаря, который для того же объема слов устанавливает то же самое соответствие, но в обратном направлении, то будем вынуждены либо пересмотреть весь словарь, для того чтобы найти все значения этого слова (а их может быть несколько), либо, предварительно угадав это слово, сможем затем только проверить правильность догадки.

Для того чтобы лучше пояснить эту мысль, обратимся к примерам. Как известно, длина стержня l есть функция его температуры: $l = f(T)$. Для измерения же температуры эту зависимость удобнее обратить и рассматривать температуру как функцию длины стержня: $T = \varphi(l)$, что и положено в основу принципа термометра.

Аналогично натуральный логарифм числа можно определить, пользуясь таблицей функции $y = e^x$, однако удобнее построить «обратную» таблицу $x = \ln y$, которая, так сказать, устанавливает ту же самую функциональную связь между x и y, но «с обратной стороны».

По установившейся традиции обратную функцию также обозначают через y, а ее аргумент — через x, т. е. функцию, обратную к функции $y = f(x)$, будем обозначать $y = \varphi(x)$, а не $x = \varphi(y)$, но при этом нельзя забывать, что переменные y и x в новой записи имеют «обратный смысл» по сравнению с исходной функцией $y = f(x)$. При таких обозначениях областью определения обратной функции служит совокупность значений данной функции, а совокупность значений обратной функции — областью определения данной функции.

График обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричен графику прямой функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов $y = x$. Отсюда вытекает простой и удобный способ построения графиков обратных функций по графикам прямых функций. Начертив график данной функции (медленно сохнущими чернилами), надо перегнуть лист бумаги по биссектрисе $y = x$ и тогда полученный отпечаток даст график обратной функции. Более точные результаты получим, отразив в биссектрисе $y = x$, как в зеркале, график прямой функции. В качестве иллюстрации на рис. 99 по функции $y = \sin x$ отражением в биссектрисе $y = x$ (что меняет ролями переменные x и y) построен график функции $y = \operatorname{Arcsin} x$.

В отдельных случаях обратную функцию можно получить и аналитически. Для этого в заданной функции

$$y = f(x)$$

надо прежде всего поменять ролями y и x, т. е. записать ее в виде

$$x = f(y).$$

Затем (в тех случаях, когда это возможно) решить данное уравнение относительно y, в результате чего получим обратную функцию

$$y = \varphi(x).$$

Пример 1. Найти функцию, обратную функции $y = \dfrac{5x-7}{3}$.

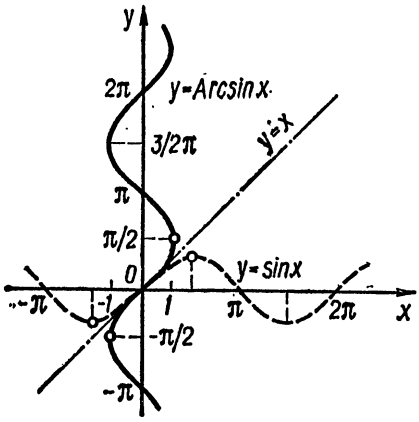


Рис. 99.

Решение. Поменяв ролями аргумент и функцию, получим

$$x = \frac{5y-7}{3},$$

после чего, решив это уравнение относительно вновь введенного y, находим обратную функцию

$$y = \frac{3x+7}{5}.$$

Пример 2. Найти функцию, обратную функции $y = 2^x$.

Решение. Поменяем ролями аргумент и функцию, тогда получим равенство

$$x = 2^y,$$

откуда по определению логарифма находим обратную функцию

$$y = \log_2 x = \gamma \log_{10} x,$$

где (с шестью значащими цифрами)

$$\gamma = \frac{1}{\log_{10} 2} = \frac{1}{0{,}301030} = 3{,}32193.$$

Пример 3. Найти функцию, обратную функции $y = x^2$.

Решение. Поменяв ролями аргумент и функцию, получим

$$x = y^2,$$

откуда

$$y = \pm\sqrt{x};\ x \geqslant 0.$$

Упражнение. По графику параболы $y = x^2$ при помощи отражения в биссектрисе $y = x$ построить график функции $y = \pm\sqrt{x}$.

В примерах 1 и 2 как прямая, так и обратная функции однозначны. В примере 3 прямая функция однозначна, а обратная двузначна; согласно же рис. 99 функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ бесконечнозначная, в то время как прямая функция $y = \sin x$ — однозначная.

Достаточные условия, при которых обратная функция будет однозначной, даются следующей теоремой*.

* Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [149, т. 1, стр. 133] или [171, стр. 245].

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает (или убывает) на сегменте $[a, b]$, причем $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, то существует однозначная обратная функция $x=\varphi(y)$, которая непрерывна и монотонно возрастает (или убывает) на сегменте $[\alpha, \beta]$.*

Заметим, что теорема остается справедливой и в том случае, когда данная функция непрерывна и монотонно возрастает (или убывает) не на сегменте $[a, b]$, а на интервале (a, b) или на всей числовой прямой.

Так, например, функция $y=x^3$ непрерывна и монотонно возрастает на всей числовой оси $-\infty<x<+\infty$. Поэтому однозначная обратная функция существует для всех значений $-\infty<y<+\infty$. Это функция $x=\sqrt[3]{y}$ (постройте ее график по графику прямой функции).

Если же условия теоремы нарушаются, то обратная функция уже не будет однозначной, как это имело место для функций $y=x^2$ или $y=\sin x$. Однако и в этом случае можно выделить такой промежуток изменения аргумента, которому будет соответствовать однозначная обратная функция. Например, в случае $y=x^2$, если область определения ограничим только положительными значениями $x\geqslant 0$, то обратная функция будет однозначной: $x=+\sqrt{y}$. Эта функция монотонно возрастает и непрерывна для всех $y\geqslant 0$. Аналогично функция $y=\sin x$, рассматриваемая на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant+\frac{\pi}{2}\right]$, имеет однозначную, монотонно возрастающую обратную функцию $y=\arcsin x$, которая называется *главным значением функции* $y=\operatorname{Arcsin} x$ и которую на рис. 99 мы выделили полыми кружками.

Применим теперь полученные результаты к исследованию непрерывности некоторых элементарных функций.

В § 28 (пример 4) мы доказали, что функция $y=\sin x$ непрерывна всюду. Аналогичным путем (или воспользовавшись тождеством $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$) легко доказать, что $y=\cos x$ является непрерывной функцией. Далее, на основании теоремы 1 § 29 можно заключить, что функции $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ непрерывны при всех тех значениях аргумента, при которых они определены. Так, например, функции $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ и $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$ разрывны лишь в тех точках, где $\sin x=0$, т. е. при $x=0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;\ \pm 3\pi;\ \ldots$; а функции $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ и $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ разрывны лишь в точках, где $\cos x=0$, т. е. при $x=\pm\frac{1}{2}\pi;\ \pm\frac{3}{2}\pi;\ \pm\frac{5\pi}{2};\ \ldots$. Это вполне согласуется с известными нам графиками тригонометрических функций, которые читателю полезно вычертить еще раз в виде упражнения.

Теорема данного параграфа позволяет доказать непрерывность всех обратных тригонометрических функций, и что функция $y=\sqrt[n]{x}$ непрерывна для всех x при n нечетном и для всех $x\geqslant 0$ при n четном.

Значительно сложнее доказывается, что функция $y=a^x$ непрерывна всюду, и мы не имеем возможности остановиться здесь на этом доказательстве, которое читатель может найти, например, в [125, т. I, стр. 96].

Непрерывность функций $y=\log_a x$, $y=\ln x$ после того, как доказана непрерывность функции $y=a^x$, доказывается при помощи приведенной выше теоремы об обратной функции.

Таким образом, все элементарные функции непрерывны в области их определения *.

Непрерывна также и сложная функция, составленная из непрерывных функций.

Под *сложной функцией* понимают функцию

$$y = f(u),$$

аргумент которой, в свою очередь, зависит от некоторой другой переменной x:

$$u = \varphi(x).$$

Тогда, в конечном счете, y будет функцией от x, что записывают так:

$$y = f[\varphi(x)]. \qquad \text{(III.31)}$$

Функцию $y = f(u)$ называют *внешней функцией*, а $u = \varphi(x)$ — *внутренней функцией*. Например, функция

$$y = \sin x^2$$

является сложной, составленной из внешней функции $y = \sin u$ и внутренней функции $u = x^2$. Таким образом, для того чтобы вычислить y, мы должны сначала возвести x в квадрат, а затем найти синус от полученной величины.

Напротив, для вычисления функции

$$y = \sin^2 x$$

надо сначала найти $\sin x$, а затем полученное значение возвести в квадрат, что можно записать так: $y = u^2$, где $u = \sin x$, т. е. в этом случае $y = u^2$ есть внешняя функция, а $u = \sin x$ — внутренняя.

§ 31. Производная и ее вычисление

Для выяснения понятия производной обратимся к примеру. Пусть наблюдатель поставил своей целью изучить закон перемещения искусственного спутника Земли, движущегося по небосклону. В распоряжении наблюдателя есть приборы для измерения времени и пройденного спутником расстояния.

Однако часть небосклона закрыта облаками и линией горизонта, так что непосредственно можно вести наблюдения только на отдельных, ограниченных участках траектории спутника. Очевидно, что непосредственно нельзя полностью определить функцию, представляющую пройденный спутником путь $s = f(t)$, которую будем рассматривать как функцию времени t. Для того чтобы распространить полученные результаты и на участки траектории, недоступные наблюдению, необходимо изучить не только функцию пути $s(t)$, но и функцию скорости перемещения спутника $v(t)$.

Под средней скоростью перемещения будем понимать величину, измеряемую отношением пройденного расстояния к промежутку времени, в течение которого это расстояние пройдено:

$$v_{ср} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}. \qquad \text{(III.32)}$$

Кроме средней скорости будем рассматривать также и скорость в данный момент

$$v(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \qquad \text{(III.33)}$$

* Напомним, что *элементарными* называются функции, которые получаются из полиномов, тригонометрических функций (прямых и обратных), показательной и логарифмической функций при помощи четырех арифметических действий и операции функции от функции, примененных конечное число раз.

Если же число операций будет бесконечным, то в результате может получиться функция и не элементарная, о чем подробнее будет идти речь в гл. VIII.

т. е. предел отношения (III.32), в котором положено $t_1 = t$ и промежуток времени стремится к нулю.

Далее, пусть выяснилось, что в первом приближении среднюю скорость движения спутника можно считать постоянной. Тогда, пользуясь формулой (III.32), имеем

$$s(t_1) = s(t_0) + v_{ср}(t_1 - t_0)$$

и, зная из непосредственных наблюдений t_0, $s(t_0)$, $v_{ср}$, легко вычислить местоположение спутника в любой момент $t = t_1$, в который его наблюдать нельзя.

Скорость $v(t)$, как функция времени t, является, так сказать, *функцией, производной* от функции пути $s(t)$, функцией, зависящей от $s(t)$ и полностью определяемой $s(t)$.

Однако производная функция $v(t)$ помогает глубже и полнее изучить исходную, или, как говорят, *первообразную функцию* $s(t)$. Поэтому для более глубокого изучения любой функции $y = f(x)$ начали изучать также и функцию, характеризующую быстроту изменения исходной функции, т. е. производную от функции $y = f(x)$, понимая под производной (по аргументу x) предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю.

Производная от функции $y = f(x)$ является новой функцией того же самого переменного и для ее обозначения употребляют один из следующих знаков*:

$$\frac{dy}{dx} \text{ («дэ игрек по дэ икс»),}$$

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ («дэ эф от икс по дэ икс»),}$$

$$y' \text{ («игрек штрих»),}$$

$$f'(x) \text{ («эф штрих от икс»),}$$

$$y'_x \text{ («игрек штрих по икс»).}$$

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается $f'(a)$, или $y'|_{x=a}$, или $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Производной* $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ *функции* $y = f(x)$ *называют предел отношения приращения функции* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ *к приращению аргумента* Δx, *когда* Δx *стремится к нулю:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad \text{(III.34)}$$

Задача вычисления производной $f'(x)$ по данной функции $f(x)$ и составляет предмет *дифференциального исчисления*, а обратная ей задача определения первообразной функции $f(x)$ по известной ее производной $f'(x)$ составляет предмет *интегрального исчисления*. Дифференциальное и интегральное исчисления, как уже отмечалось, объединяют одним общим названием: *математический анализ* или *анализ бесконечно малых*.

---

* Обозначения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{df(x)}{dx}$ были введены Лейбницем, а обозначения со штрихами y' и $f'(x)$ — Лагранжем. Сам термин «производная» также введен Лагранжем на рубеже XVIII и XIX веков и независимо от него Арбогастом. Термин «дифференциал» введен Лейбницем по предложению его ученика И. Бернулли.

Существуют и другие обозначения. Например, Ньютон для производной применял обозначение $\dot{y}$ («игрек с точкой»), которое теперь употребляется в механике и в теории колебаний, когда независимым переменным является время.

Пример 1. Дана функция $f(x) = x^2$, найти ее производную $f'(x)$.

Решение. Воспользуемся приведенным выше определением и согласно формуле (III.34) найдем искомую производную, расчленив весь процесс на четыре естественных шага:

I. Найдем значение функции $f(x)$, соответствующее «приращенной» точке $x + \Delta x$:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

II. Определим приращение функции $y = f(x) = x^2$, соответствующее приращению аргумента на величину Δx:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2] - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

III. Найдем отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

IV. Вычислим производную $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т. е. определим предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, для функции $f(x) = x^2$ производной является функция

$$f'(x) = (x^2)' = 2x. \qquad \text{(III.35)}$$

Определив производную в общем виде, мы можем теперь легко найти ее частное значение в любой заданной точке $x = a$. Так, при $x = 5$ производная $f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$, при $x = -3$ производная $f'(-3) = -6$ и т. д.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Выполнив для функции $y = f(x) = \frac{1}{x}$ те же четыре шага, что и в примере 1, получаем

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x};$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)};$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{1}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом, производной от функции $y = x^{-1}$ будет

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}. \qquad \text{(III.36)}$$

Упражнения

1. Доказать, что для функции $y = x^3$ производная $y' = (x^3)' = 3x^2$.

2. Доказать, что для функции $y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ производная $y' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

Пример 3. Найти производную от функции $y = \sin x$.

Решение. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда

I. $f(x + \Delta x) = y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

II. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$, откуда, воспользовавшись формулой разности синусов двух углов $\alpha = x + \Delta x$ и $\beta = x$, имеем

$$\Delta y = 2\sin\frac{(x + \Delta x) - x}{2}\cos\frac{(x + \Delta x) + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\text{III. } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\text{IV. } y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

так как согласно теореме 2 § 26 предел от произведения двух функций равен произведению их пределов.

Далее, поскольку при $\Delta x \to 0$ величина $\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \to 0$, то в соответствии с формулой (III.12) § 26

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)} = 1,$$

а второй предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Последнее равенство получается на том основании, что $\cos x$ есть непрерывная функция. Объединяя полученные результаты, окончательно имеем

$$y' = (\sin x)' = \cos x. \qquad \text{(III.37)}$$

Формула (III.37) позволяет легко определить численное значение производной от функции $y = \sin x$ для любого заданного значения аргумента $x = a$. Так, для $x = 0$ согласно формуле (III.37) получаем

$$y'|_{x=0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1.$$

Для $x = 30°$ имеем

$$y'|_{x=30°} = \cos 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710678\ldots$$

Для $x = 1$ радиан $= 57°{,}2957795\ldots = 57°\ 17'\ 44'',\ 8\ldots$ находим

$$y'|_{x=1} = \cos 1 = 0{,}5403023\ldots$$

Для того чтобы лучше уяснить тот предельный переход, который мы совершаем при вычислении производной, проследим на рассмотренных выше примерах,

насколько быстро идет отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ к своему пределу $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

В табл. 3 приведены все необходимые вычисления для значения аргумента $x = 4$ в случае функции $y = x^2$. Проанализировав эти вычисления, видим, что для функции $y = x^2$ отношение приращений $\Delta y : \Delta x$ стремится к своему пределу $y'|_{x=4} = 2x = 8$ с той же скоростью, с какой Δx стремится к нулю, как это и должно быть согласно результату, найденному в III шаге примера 1:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Таблица 3

$x = 4$; $y = x^2 = 16$; $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2$; $y' = 2x = 8$				
Δx	$x+\Delta x$	$(x+\Delta x)^2$	Δy	$\Delta y : \Delta x$
0,5	4,5	20,25	4,25	8,5
0,1	4,1	16,81	0,81	8,1
0,01	4,01	16,0801	0,0801	8,01
0,001	4,001	16,008001	0,008001	8,001
0,0001	4,0001	16,00080001	0,00080001	8,0001

Аналогичные вычисления для функции $y = \sin x$ (при $x = 1$) приведены в табл. 4, в которой значения $\sin x$ взяты с шестью значащими цифрами. Так как при вычитании близких величин число значащих цифр в приращении функции Δy сокращается, мы не смогли получить результаты с достаточной точностью. Более того, при малых значениях Δx результаты начали искажаться. Так, например, при $\Delta x = 0{,}00001$ отношение приращений $\Delta y : \Delta x = 0{,}5$ больше отклоняется от своего предельного значения $y' = \cos x = 0{,}540302$, чем при $\Delta x = 0{,}001$. Для того чтобы устранить влияние потери точности, эти же вычисления повторены (для трех последних строк) в табл. 5 при большем числе значащих цифр в исходных данных *.

Таблица 4

$x=1$; $y=\sin x=0{,}841471$; $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$; $y'=0{,}540302$				
Δx	$x+\Delta x$	$\sin(x+\Delta x)$	Δy	$\Delta y:\Delta x$
0,5	1,5	0,997495	0,156024	0,312048
0,1	1,1	0,891207	0,049736	0,49736
0,01	1,01	0,846832	0,005361	0,5361
0,001	1,001	0,842011	0,000540	0,540
0,0001	1,0001	0,841535	0,000054	0,54
0,00001	1,00001	0,841476	0,000005	0,5

В итоге и для функции $y = \sin x$, по мере того как $\Delta x \to 0$, величина $\Delta y : \Delta x$ все больше приближается к своему предельному значению и, например, для $\Delta x = 0{,}00001$ она отличается от производной $y' = 0{,}540302$ всего на 4 единицы шестого десятичного знака.

* Необходимые для этого значения $\sin x$ легко вычислить при помощи рядов (см. § 133).

Таблица 5

$x=1$; $y=\sin x=0{,}84147098481$; $y'=\cos 1=0{,}54030230587$				
Δx	$x+\Delta x$	$\sin(x+\Delta x)$	Δy	$\Delta y:\Delta x$
0,001	1,001	0,84201086629	0,000539881 48	0,53988148
0,0001	1,0001	0,84152501083	0,00005402602	0,5402602
0,00001	1,00001	0,84147638779	0,00000540298	0,540298

Упражнения

3. Доказать, по аналогии с примером 3, что для функции $y=\cos x$ производная $y'=(\cos x)'=-\sin x$.

4. Выполнить для функции $y=\frac{1}{x}$ (при $x=2$) вычисления, аналогичные приведенным в табл. 3, и результаты сравнить с результатами примера 2.

Понятие производной является одним из основных понятий математического анализа и поэтому его следует усвоить достаточно глубоко. С этой целью и были приведены упражнения 1—4, и если читатель не сможет их выполнить после первого ознакомления с материалом, то мы рекомендуем, проработав следующий параграф, вернуться к данному.

§ 32. Геометрическое значение производной

В предыдущем параграфе, исходя из физических соображений, мы определили производную как скорость изменения данной функции $y(x)$ относительно скорости изменения ее аргумента: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Дадим более наглядное геометрическое истолкование производной. Для этого прежде всего потребуется определение касательной к кривой в данной точке.

В школьном курсе математики рассматривают касательную только к окружности, для которой она определяется как прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Такое определение годится не для любой кривой. Например, в случае синусоиды из двух прямых AB и AC, изображенных на рис. 100, первая, очевидно, не является касательной, хотя имеет с кривой только одну общую точку, а вторая прямая таких общих точек имеет бесконечно много, но тем не менее касается синусоиды в каждой из них.

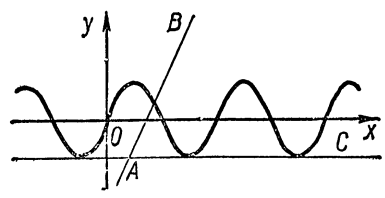


Рис. 100.

Дадим более общее определение касательной. Возьмем некоторую кривую и кроме точки M рассмотрим на ней еще точку M_1 (рис. 101). Проведем секущую MM_1. Если теперь точка M_1, двигаясь по кривой, будет стремиться к точке M, то секущая MM_1, вращаясь вокруг точки M, будет стремиться к касательной MT.

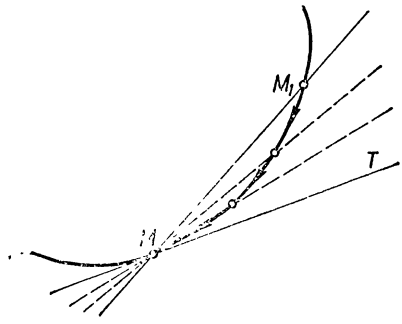


Рис. 101.

Итак, *касательной к данной кривой в точке M называется прямая, занимающая предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M.* Очевид-

но, что точка M_1 первоначально может находиться как справа, так и слева от точки M.

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к кривой в данной точке.

Пример 1. Определим касательную для параболы

$$y = ax^2$$

в произвольной ее точке $M(x; y)$.

Решение. По условию касательная должна пройти через точку $M(x; y)$. Поэтому согласно результатам § 5 для определения касательной остается только найти ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$.

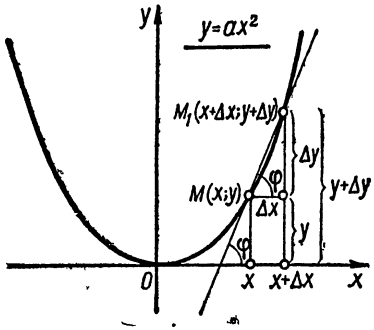


Рис. 102.

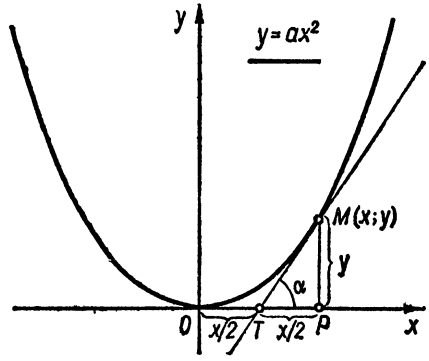


Рис. 103.

Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy и точка $M(x; y)$ перейдет в точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y)$ (рис. 102). Обозначим угол наклона секущей MM_1 к положительному направлению оси абсцисс через φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда для касательной имеем (рис. 103)

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где углом α обозначено предельное значение угла φ.

В данном случае

$$y = ax^2;\ y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 = a[x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2],$$

так что

$$\Delta y = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = a[2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] = a\,\Delta x\,(2x + \Delta x)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\,\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2ax.$$

Отсюда, в частности, получаем удобный прием проведения касательной к параболе $y = ax^2$ (рис. 103): отрезок $OP = x$ надо разделить пополам, а затем через точку деления T и заданную точку M провести касательную. Действительно, как следует из построений,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{TP},\ \text{откуда}\ TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

поскольку по условию $y = ax^2$, а $\operatorname{tg}\alpha = 2ax$.

Сравнив решение данного примера и примера 1 § 31, легко убедиться, что в случае параболы задача вычисления производной и задача построения касательной эквивалентны одна другой.

В случае произвольной непрерывной кривой $y = f(x)$ (рис. 104) все построения остаются прежними (только Δy будет изменяться по другому закону), так что имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad \text{(III.38)}$$

Действительно, если точка $M_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ стремится к точке $M(x; y)$, то секущая MM_1, поворачиваясь вокруг точки M, переходит в касательную, а угол φ изменяется с изменением Δx, стремясь к своему предельному положению α при $\Delta x \to 0$. Правая часть равенства (III.38) согласно определению (III.34) есть производная данной функции $y = f(x)$, а левая часть — угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$ касательной (см. § 5), так что это равенство принимает такой окончательный вид*:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha. \qquad \text{(III.39)}$$

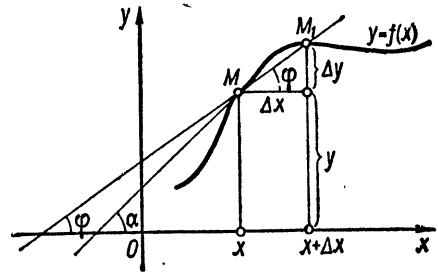


Рис. 104.

Таким образом, геометрически *производная $f'(x)$ при данном значении аргумента x равна тангенсу угла наклона касательной в точке $M(x; y)$ к графику функции $y = f(x)$.*

Пример 2. Найти тангенс угла наклона касательной к равносторонней гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точках $M = M_1$ (1; 1) и $M = M_2$ (4; 0,25).

Решение. Согласно формуле (III.36) $y' = -\frac{1}{x^2}$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = y'|_{x=1} = -1;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = y'|_{x=4} = -\frac{1}{16} = -0{,}0625.$$

Пример 3. Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в ее точке M с абсциссой равной $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Найдем по заданному уравнению ординату рассматриваемой точки:

$$y = \sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Искомая касательная находится в пучке прямых, проходящих через точку $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и определяемых уравнением (I.17) § 8:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = k\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Остается найти угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg}\alpha$, для чего надо только

* Формула (III.39) верна только в том случае, если масштабы по осям Ox и Oy равны. Случай различных масштабов будет рассмотрен в § 40.

воспользоваться формулами (III.39) и (III.37). Согласно этим формулам для касательной к любой точке синусоиды имеем

$$k = (\sin x)' = \cos x$$

и, в частности, для заданной точки $x = \frac{\pi}{4}$:

$$k = \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Объединяя полученные результаты, получаем уравнение искомой касательной в следующем виде:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \text{ или } y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + 1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Упражнения

1. Написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке $x = 0$ и в точке $x = 2$.

2. Написать уравнение касательной к синусоиде $y = \sin x$ в точках: $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3}{4}\pi$; $x = \pi$, а также построить рисунок.

§ 33. Дифференцируемость функций

Определение. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$, то говорят, что при данном значении $x = x_0$ функция дифференцируемая.*

Если функция дифференцируема *в каждой точке* некоторого сегмента $[a, b]$ или интервала (a, b), то говорят, что она дифференцируема *на сегменте* $[a, b]$ или, соответственно, *в интервале* (a, b).

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.*

Доказательство. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то по определению предела разность

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon$$

есть величина бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Определяя из этого равенства приращение Δy, получаем

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x, \tag{III.40}$$

где $\varepsilon \to 0$, когда $\Delta x \to 0$. При $x = x_0$ производная $f'(x_0)$ есть величина постоянная. Значит, $f'(x_0) \cdot \Delta x \to 0$, когда $\Delta x \to 0$. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ оба слагаемых правой части формулы (III.40) стремятся к нулю. Следовательно, и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. А это в соответствии с формулой (III.28) и значит, что при данном значении $x = x_0$ функция $y = f(x)$ непрерывна.

Непосредственным следствием доказанной теоремы является тот важный факт, что в точках разрыва функция не может иметь производной, поскольку в таких точках бесконечно малому приращению Δx соответствует конечное приращение Δy. Больше того, функция может не иметь производной и в тех точках, в которых она непрерывна, т. е. теорема обратная, к только что доказанной, оказывается невер-

ной. Простой пример тому дает точка излома (угловая точка) на графике функции (рис. 105). В такой точке отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$, но имеет правосторонний и левосторонний пределы (см. § 28). Первый называется *правосторонней производной* и в соответствии с формулой (III.25) обозначается $f'(x+0)$, второй — *левосторонней производной* и обозначается $f'(x-0)$.

В рассматриваемой точке M у графика нет единой касательной, но есть левосторонняя касательная MT_1 и правосторонняя касательная MT_2, т. е. секущая MM_1 стремится к совпадению с MT_1, когда M_1 стремится к M слева, а секущая MM_2 — к совпадению с MT_2, когда M_2 стремится к M справа.

Производная функции $y = f(x)$ может принимать не только конечное, но и бесконечно большое значение. В точке $x = x_0$, в которой $f'(x_0) = \infty$, касательная параллельна оси Oy. Примером может служить функция $y = \sqrt[3]{x-1}$, которая имеет вертикальную касательную в точке $x = 1$ (рис. 106).

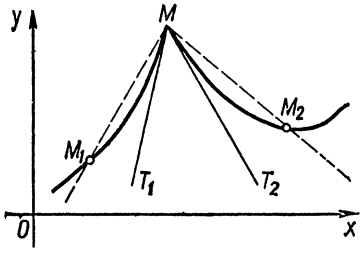


Рис. 105.

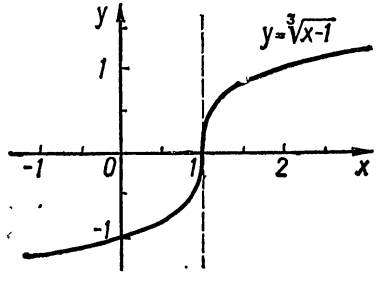


Рис. 106.

Как мы уже отмечали, функция $y = f(x)$ в точках разрыва $x = a$ не имеет единой производной, но в этих точках существуют односторонние производные $f'(a-0)$ и $f'(a+0)$, которые могут принимать как конечное, так и бесконечно большое значение. Например, для функции $y = f(x)$, график которой представлен на рис. 91, в точке разрыва $x = a$ легко провести левостороннюю и правостороннюю касательные. Определив затем тангенс угла наклона этих касательных, мы и найдем соответственно левостороннюю $f'(a-0)$ и правостороннюю производные $f'(a+0)$ в точке разрыва $x = a$. Для функции $y = 2^{\frac{1}{x}}$, имеющей разрыв в точке $x = 0$, односторонние производные будут $f'(-0) = 0$ и $f'(+0) = \infty$, так как односторонние касательные в точке $x = 0$ совпадают соответственно с осями Ox и Oy (см. рис. 95).

Пример более сложного случая отсутствия производной дает функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция (рис. 107) непрерывна в точке $x = 0$. Однако, когда точка M_1 стремится к точке O справа (или слева), секущая OM_1 колеблется между прямыми AB $(y = x)$ и CD $(y = -x)$ и не стремится ни к какой прямой. График не имеет в точке $x = 0$ ни правосторонней ни левосторонней касательной, а функция $f(x)$ — ни правосторонней ни левосторонней производной.

Упражнение. Доказать, что функция $y = x \sin \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ асимптотически стремится к прямой $y = 1$.

Указание. Выполнить замену $x = \frac{1}{t}$, а затем воспользоваться формулой $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

В заключение заметим, что можно задать чисто аналитически функции непрерывные, но не имеющие ни в одной точке производной. Пример такой функции впервые построил Вейерштрасс. Примером функции еще более сложной, с бесконечным числом разрывов, может служить так называемая функция Римана, равная нулю во всех иррациональных точках и равная $\frac{1}{q}$ в рациональных точках

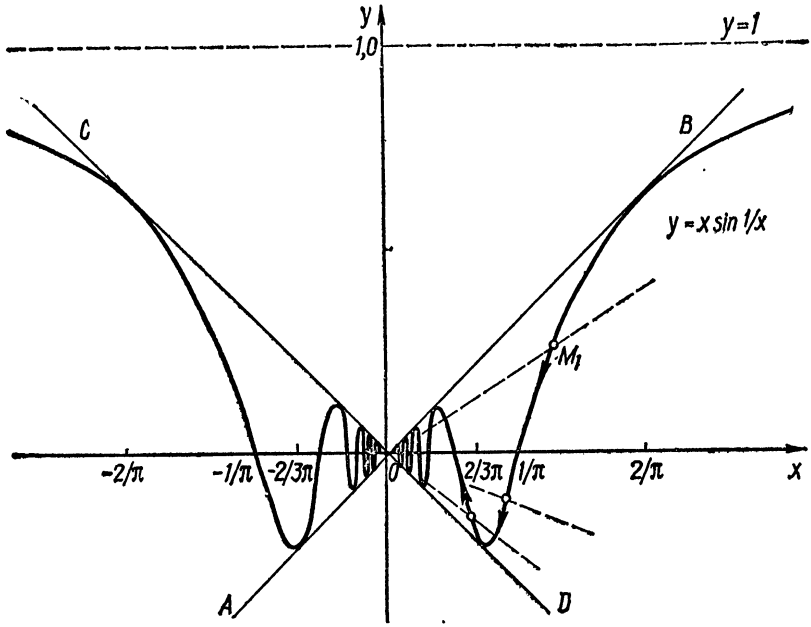


Рис. 107.

вида $x = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Эта функция разрывна во всех рациональных точках и непрерывна в иррациональных. Несколько видоизменив функцию Римана, положив, например, ее равной не нулю, а единице в иррациональных точках, мы получим пример функции, разрывной уже во всех точках [69, стр. 103]. Однако в дальнейшем мы такие сложные функции, которые почти не поддаются наглядному геометрическому представлению, рассматривать не будем, а ограничимся классом непрерывных функций и функций, имеющих конечное, или счетное, число разрывов, таких, как, например, функция $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, имеющая разрывы во всех точках, в которых ее знаменатель $\cos x$ равен нулю.

§ 34. Основные формулы и правила дифференцирования

Производную любой функции, в тех случаях, когда она существует, можно найти исходя из определения (III.34). Но такой путь часто приводит к довольно сложным и утомительным выкладкам. Поэтому в анализе был разработан единый метод, позволяющий находить производные для очень широкого класса функций,

и в том числе для любой элементарной функции, при помощи небольшого числа основных формул и правил дифференцирования.

Основные формулы дифференцирования это формулы для определения производных от простейших функций, таких как $y = x^n$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = \arcsin x$ и т. д. Основные правила дифференцирования состоят из ряда теорем, позволяющих сводить более сложные задачи к более простым. Изложение начнем с вывода формул для производной от постоянной величины и от линейной функции $y = x$, а остальные основные формулы рассмотрим в § 35, 36, 38. При обозначении производной от какого-либо сложного выражения будем пользоваться (так же как и в § 31) одним из символов $(\ )'$, $[\ ]'$, $\{\ \}'$, каждый из которых обозначает, что берется производная от выражения, стоящего в скобках.

Докажем, что *производная постоянной равна нулю*, т. е. если $y = C = \text{const}$, то

$$y' = (C)' \equiv 0. \tag{III.41}$$

Действительно, постоянную $y = C$ можно рассматривать, как частный случай функции, которая равна одному и тому же числу при любом значении x. График ее представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс и отстоящую от этой оси на расстоянии C (рис. 108). Прямая $y = f(x) = C$ образует с осью x-ов угол $\alpha = 0$, а в таком случае согласно формуле (III.39)

$$y' = \operatorname{tg} \alpha \equiv 0,$$

что и требовалось доказать. С точки зрения механики равенство (III.41) означает, что скорость неподвижной точки равна нулю.

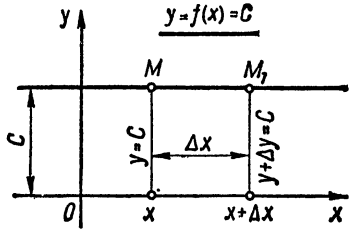


Рис. 108.

Этот же результат можно получить и непосредственно из определения (III.34). Возьмем произвольное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx (рис. 108). Так как по условию функция $y(x) = C$ сохраняет одно и то же значение при любом значении аргумента, то $y(x + \Delta x) = C$, а тогда

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = C - C \equiv 0,$$

следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} \equiv 0,$$

и мы снова приходим к формуле (III.41)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 \equiv 0.$$

В качестве второй основной формулы докажем, что *производная функции $y = x$ равна единице*, т. е.

$$y' = (x)' = 1. \tag{III.42}$$

Действительно, если $y = x$, то и $\Delta y = \Delta x$, так что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

при любой величине приращения Δx и, в частности, в пределе, когда $\Delta x \to 0$. Подставив этот результат в формулу (III.34), мы и находим, что для функции $y = x$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Переходим к выводу основных правил дифференцирования, начав с производной суммы или разности двух функций.

Теорема 1. *Производная алгебраической суммы двух (или нескольких) дифференцируемых функций* $y(x) = u(x) \pm v(x)$ *равна соответствующей сумме производных этих функций:*

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{III.43}$$

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $y = y(x)$ получат, в свою очередь, приращения Δu, Δv, Δy, связанные равенством

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v,$$

так как в данном случае

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

и после перехода к пределу, в соответствии с теоремой 1 § 26, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

или

$$y' = u' \pm v',$$

что и требовалось доказать.

Этот результат может быть без труда распространен на алгебраическую сумму любого числа слагаемых. Так, в случае четырех слагаемых имеем

$$(u \pm v \pm w \pm z)' = [(u \pm v) \pm (w \pm z)]' = (u \pm v)' \pm (w \pm z)' =$$
$$= u' \pm v' \pm w' \pm z'.$$

Упражнение 1. Доказать, что

$$(u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w'.$$

Пример 1. Найти производную функции

$$y = x^2 + x - \sin x.$$

Решение. Воспользовавшись теоремой 1 и формулами (III.35), (III.37), (III.42), легко получаем требуемый результат:

$$y' = (x^2 + x - \sin x)' = (x^2)' + (x)' - (\sin x)' = 2x + 1 - \cos x.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = 2 + \frac{1}{x}.$$

Решение. Согласно формулам (III.36) и (III.41) находим

$$y' = \left(2 + \frac{1}{x}\right)' = (2)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Эту же производную имеют функции $y = \frac{1}{x} + 7$, $y = \frac{1}{x} - 15$, $y = \frac{1}{x} \pm C$, так как производная от постоянной равна нулю.

Теорема 2. *Производная от произведения двух дифференцируемых функций* $y = uv$ *равна сумме произведений первой функции на производную второй и второй на производную первой*, т. е.

$$y' = (uv)' = uv' + vu'. \tag{III.44}$$

Доказательство. Рассуждая как и при доказательстве предыдущей теоремы, имеем:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = uv,$$

$$y(x + \Delta x) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + \Delta v(u + \Delta u),$$

поскольку

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u,\ v(x + \Delta x) = v + \Delta v.$$

В таком случае

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = v\Delta u + \Delta v(u + \Delta u)$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}(u + \Delta u) + v\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходя теперь к пределу $\Delta x \to 0$, мы и получаем искомую формулу (III.44)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}(u + \Delta u) + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} = uv' + vu',$$

так как согласно теореме 2 § 26 предел от произведения равен произведению пределов и, кроме того,

$$\lim_{\Delta x \to 0}(u + \Delta u) = u,\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v';\ \lim_{\Delta x \to 0} v = v;\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Действительно, в силу непрерывности функции $u = u(x)$ (которая вытекает из ее дифференцируемости), если $\Delta x \to 0$, то одновременно и $\Delta u \to 0$, так что $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(u + \Delta u) = u$. Далее, непосредственно из определения (III.34) имеем $u' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $v' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$, а величина $v = v(x)$ является постоянной относительно приращения Δx, поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v = v$.

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*, т. е. если $y = Cu(x)$, то

$$y' = [Cu(x)]' = Cu'(x). \qquad \text{(III.45)}$$

В самом деле, положив в формуле (III.44) $v = C = \text{const}$ и учтя, что согласно (III.41) $(C)' = C' \equiv 0$, мы и приходим к искомому результату:

$$y' = (Cu)' = Cu' + uC' = Cu'.$$

Результаты теоремы 2 легко распространить на любое число сомножителей и доказать, что производная от произведения равна сумме произведений производных каждого из сомножителей на все остальные. Так, например, в случае трех сомножителей, применяя дважды формулу (III.44), получаем

$$(uvw)' = [(uv) \cdot w]' = (uv)w' + w(uv)' = uvw' + w(uv' + vu'),$$

или

$$(uvw)' = uvw' + uwv' + vwu'. \qquad \text{(III.46)}$$

Пример 3. Найти производную от квадратного трехчлена

$$y = 7x^2 - 5x + 18.$$

Решение. Воспользовавшись правилом дифференцирования алгебраической суммы, а также формулами (III.35), (III.41), (III.42) и (III.45), ответ получаем непосредственно:

$$y' = 7 \cdot (x^2)' - 5 \cdot (x)' + (18)' = 7 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 14x - 5.$$

Пример 4. Доказать, что производная от функции $y = x^3$ есть

$$y' = (x^3)' = 3x^2. \tag{III.47}$$

Решение. Представив заданную функцию в виде произведения двух функций $y = x^3 = x \cdot x^2$ и воспользовавшись формулами (III.44), (III.42), (III.35) имеем

$$y' = (x \cdot x^2)' = x \cdot (x^2)' + x^2 \cdot (x)' = x \cdot 2x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Пример 5. Найти производную от функции

$$y = x^3 \sin x.$$

Решение. Положив $u = x^3$ и $v = \sin x$, находим ответ согласно формуле (III.44) по известным уже производным $u' = (x^3)' = 3x^2$ и $v' = (\sin x)' = \cos x$:

$$y' = (x^3 \sin x)' = x^3 \cdot (\sin x)' + \sin x \cdot (x^3)' = x^3 \cos x + 3x^2 \sin x.$$

Упражнения

2. Показать, что производная функции $y = 5x^3 - 2x$ равна $y' = 15x^2 - 2$.
3. Вывести формулу (III.35), представив функцию $y = x^2$ как произведение двух функций $y = x \cdot x$ и воспользовавшись формулами (III.44) и (III.42).
4. Найти производную от функции

$$y = \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sin x.$$

Указание. Положить $u = \frac{1}{x}$, $v = \sin x$ и воспользоваться затем формулами (III.44), (III.37), (III.36).

Теорема 3. *Производная частного (дроби)* $y = \frac{u}{v}$, *где* u *и* v *суть дифференцируемые функции, равна дроби, у которой знаменатель есть* v^2, *а числитель равен разности между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя*, т. е.

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{III.48}$$

Доказательство этой теоремы выполняется аналогично доказательству теорем 1 и 2, так что читателю полезно провести его самостоятельно и тем самым проверить, насколько он усвоил предыдущий материал.

Пример 6. Найти y', если $y = \frac{7x^3 + 5}{x - 2}$.

Решение. Положив $u = 7x^3 + 5$, $v = x - 2$ и воспользовавшись формулой (III.48), имеем

$$y' = \left(\frac{7x^3 + 5}{x - 2}\right)' = \frac{(x - 2)(7x^3 + 5)' - (7x^3 + 5)(x - 2)'}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{(x - 2)(7 \cdot 3x^2) - (7x^3 + 5) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{21x^3 - 42x^2 - (7x^3 + 5)}{(x - 2)^2} =$$

$$= \frac{14x^3 - 42x^2 - 5}{(x - 2)^2}.$$

Замечание. Если знаменатель дроби есть величина постоянная, то вместо формулы (III.48) проще пользоваться формулой (III.45). Например, для функции

$$y = \frac{\sin x}{15},$$

представив ее в виде $y = \left(\frac{1}{15}\right) \cdot \sin x$ и положив затем в формуле (III.45) $C = \frac{1}{15}$, $u = \sin x$, имеем

$$y' = \frac{1}{15} \cos x.$$

Упражнение 5. Показать, что для функции $y = \frac{\sin x}{15}$ формула (III.48) дает тот же результат, так как производная от знаменателя $v = 15 = \text{const}$ согласно формуле (III.41) равна нулю.

Переходим к выводу весьма важного при практическом нахождении производных правилу, позволяющему вычислять производную сложной функции (т. е. функции от функции), если известны производные составляющих функций.

Теорема 4. *Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ и обе функции дифференцируемы, то производная от y по переменной x равна произведению производной от y по промежуточному аргументу u на производную от внутренней функции $u = \varphi(x)$ по переменной x,* т. е.

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(x), \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{III.49}$$

Доказательство. Дадим x приращение Δx. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит приращение Δu, а функция $y = f(u)$ — приращение Δy. Величину $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, разделив и умножив ее на приращение Δu, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{III.50}$$

Пусть Δx стремится к нулю. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x = \varphi'(x)$. Вследствие непрерывности u (вытекающей из ее дифференцируемости) приращение $\Delta u \to 0$, и поэтому $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u = f'(u)$, поскольку существование производных $f'(u)$ и $\varphi'(x)$ было обусловлено в теореме. Осуществив в равенстве (III.50) предельный переход $\Delta x \to 0$ и воспользовавшись полученными результатами, мы и приходим к искомой формуле (III.49), так как предел произведения равен произведению пределов.

Замечание. В процессе доказательства мы должны для полной строгости исследовать также случай $\Delta u = 0$, при котором равенство (III.50) становится неопределенным.

При нахождении предела $\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{\Delta x \to 0}$ Δx является независимой переменной, и поэтому мы всегда можем исключить возможность обращения в нуль приращения Δx. Приращение же Δu, являясь приращением функции $u = \varphi(x)$ (т. е. зависимой переменной), при $\Delta x \to 0$ может принимать и значения равные нулю. Однако формула (III.49) остается справедливой и в этом случае, что доказано в более полных курсах анализа, например в курсе Н. С. Пискунова [102, т. 1].

Пример 7. Найти производную функции

$$y = \sin(x^3).$$

Решение. Введем промежуточный аргумент u, положив

$$y = \sin u, \text{ где } u = x^3,$$

в результате чего представляем данную функцию как сложную функцию от x. Воспользовавшись формулой (III.49) и учтя, что в данном примере $f(u) = \sin u$, $f'(u) = (\sin u)' = \cos u$; $\varphi(x) = x^3$, $\varphi'(x) = (x^3)' = 3x^2$, находим требуемую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3).$$

Пример 8. Вывести формулу для производной от дроби $y = \frac{u}{v}$, воспользовавшись теоремой 4 и известными уже формулами (III.44) и (III.36).

Решение. Представив заданную функцию $y = \frac{u}{v}$ в виде произведения $y = \frac{1}{v} \cdot u$, непосредственно получаем формулу (III.48)

$$\left(\frac{1}{v} \cdot u\right)' = \frac{1}{v} \cdot u' + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - u\frac{v'}{v^2} = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

поскольку, рассматривая $\frac{1}{v}$ как сложную функцию от x, согласно теореме 4 и формуле (III.36) имеем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2} \cdot v' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Упражнение 6. Доказать, что производная функции $y = \sin^3 x$ равна

$$y' = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

Указание. Представить заданную функцию в виде $y = u^3$, где $u = \sin x$, и воспользоваться затем формулой (III.49).

Теорема 4 остается справедливой и для функций более сложной структуры. Так, если

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

то получаем «цепное правило»:

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x), \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{III.51}$$

В случае «цепи» из большего числа функций поступаем аналогично.

В заключение установим связь между производными взаимно обратных функций, которой в дальнейшем будем неоднократно пользоваться.

Теорема 5. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ является обратной по отношению к функции $x = \varphi(y)$, то ее производная вычисляется по следующей формуле:*

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}. \tag{III.52}$$

Другими словами, *производная функции, обратной к данной, равна величине, обратной к производной данной функции.*

Доказательство. Представим отношение приращений $\Delta y : \Delta x$ в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \text{ при условии, что } \Delta y \neq 0.$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, мы и получим искомую формулу (III.52)

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}\right) = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Пример 9. Найти производную функции

$$y = \arcsin x.$$

Решение. В данном случае обратной будет функция $x = \sin y$, т. е. в рассматриваемом примере $\varphi(y) = \sin y$. Поэтому согласно формулам (III.52) и (III.37) имеем

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Но так как по условию $\sin y = x$, то в соответствии с известным тригонометрическим тождеством

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

и окончательно

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad \text{(III.53)}$$

Отметим, что при $x = \pm 1$ производная принимает бесконечно большое значение $y' = \infty$, и в полном соответствии с результатами § 33 касательная к кривой $y = \arcsin x$ в точках с абсциссами $x = \pm 1$ будет идти параллельно оси Oy. Этот результат легко проверить, проведя на рис. 99 прямые $x = -1$ и $x = +1$.

§ 35. Производная степенной функции

В § 31 и 34 мы нашли производную степенной функции $y = x^n$ при $n = 1, 2, 3$ и получили следующие результаты:

$$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^0 = 1; \quad (x^2)' = 2x^1 = 2x; \quad (x^3)' = 3x^2,$$

которые можно представить одной формулой

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}. \qquad \text{(III.54)}$$

Покажем, что формула (III.54) справедлива не только при $n = 1, 2, 3$, но и при любом показателе n, положительном и отрицательном, дробном и иррациональном (последний случай будет рассмотрен в § 38) и даже комплексном. Начнем со случая целого и положительного показателя степени n, для чего воспользуемся методом полной математической индукции.

Допустим, что при заданном n формула (III.54) уже доказана. Покажем теперь, что производная функции $y = x^{n+1}$ определяется по тому же закону. Для этого представим заданную функцию в виде произведения

$$y = x^{n+1} = x \cdot x^n, \text{ или } y = uv, \text{ где } u = x, \; v = x^n,$$

а затем найдем производную от этого произведения при помощи формулы (III.44). Приняв во внимание равенства (III.42) и (III.54), имеем

$$(x \cdot x^n)' = x \cdot (x^n)' + x^n \cdot (x)' = x \cdot nx^{n-1} + x^n \cdot 1 = (n + 1)\, x^n.$$

Таким образом, если $(x^n)' = nx^{n-1}$, то и $(x^{n+1})' = (n + 1)\, x^n$. Но в § 34 мы видели, что формула (III. 54) верна при $n = 1$ (т. е. для функции $y = x$), следовательно, по доказанному она верна и для $n = 1 + 1 = 2$. Если же она верна для $y = x^2$, то она верна и для $y = x^3$ и т. д.

Итак, *при любом целом положительном показателе n производная степенной функции $y = x^n$ равна показателю степени, умноженному на x в степени на единицу меньше данной* *:

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

как это зафиксировано в формуле (III.54).

Пример 1. Найти производную от функции $y = x^{13}$.

Решение. Здесь $n = 13$, поэтому по формуле (III.54) находим

$$y' = 13x^{12}.$$

Полученный результат легко распространить на целые отрицательные степени и на степени дробные. Так, если $n = -m$, где m — целое положительное число, то, представив заданную функцию $y = x^{-m}$ в виде

$$y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

и воспользовавшись формулой (III.48) (в которой надо положить $u = 1 = \text{const}$, $v = x^m$), имеем

$$y' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{x^m \cdot (1)' - 1 \cdot (x^m)'}{x^{2m}} = \frac{x^m \cdot 0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1},$$

так как согласно (III.41) производная любой постоянной C (и в том числе когда $C = 1$) равна нулю. Если теперь мы воспользуемся формулой (III.54), положив в ней $n = -m$, то получим тот же результат

$$y' = (x^{-m})' = -mx^{-m-1},$$

что и доказывает справедливость формулы (III.54) для целых отрицательных степеней. Таким образом, в дальнейшем мы уже не будем требовать, чтобы показатель степени был только положительным.

Пример 2. Найти производную функции $y = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$.

Решение. В данном случае $n = -5$, поэтому согласно формуле (III.54) имеем:

$$y' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}.$$

Аналогично при $n = -1$ по формуле (III.54) получаем:

$$y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

что полностью совпадает с результатом примера 2 § 31, в котором производная была вычислена непосредственно.

Упражнение 1. Определить по формуле (III.54) производную функции $y = x^{-2}$ и полученный результат сравнить с результатом упражнения 2 § 31.

Рассмотрим случай $n = \frac{1}{q}$, где q — целое число (положительное или отрицательное), т. е. найдем производную от функции

$$y = x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}.$$

Функция, обратная к заданной, будет

$$x = y^q.$$

* Формулу (III.54) при целом положительном показателе n обычно доказывают при помощи формулы (III.34) и бинома Ньютона, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. Мы же предпочли доказательство, опирающееся на теорему 2 § 34, так как бином Ньютона теперь исключен из программы средней школы.

Воспользовавшись формулами (III.54) и (III.52) (в последней полагаем $\varphi(y) = y^q$, $\varphi'(y) = qy^{q-1}$), находим

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{qy^{q-1}} = \frac{1}{q\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{q-1}} = \frac{1}{qx^{1-\frac{1}{q}}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1},$$

т. е. тот же результат, который получим непосредственно по формуле (III.54), положив в ней $n = \frac{1}{q}$.

Производную функции $y = x^{\frac{p}{q}}$, где p и q — целые положительные или отрицательные числа, найдем по теореме 4 § 34. Для этого предварительно представим y как сложную функцию

$$y = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = u^p, \text{ где } u = x^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда согласно формуле (III.49), в которой надо положить $f(u) = u^p$, $f'(u) = pu^{p-1}$; $\varphi(x) = x^{\frac{1}{q}}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = pu^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1},$$

так как при умножении степени складываются, а

$$\left(\frac{p-1}{q}\right) + \left(\frac{1}{q} - 1\right) = \frac{p}{q} - \frac{1}{q} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q} - 1.$$

Таким образом, и в случае любой рациональной дроби $n = \frac{p}{q}$ производная степенной функции определяется по формуле (III.54)

$$y' = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Подставив в (III.54) $n = \frac{1}{2}$, получаем

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}},$$

или, заменяя дробные степени знаком радикала,

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \text{(III.55)}$$

т. е. *производная квадратного корня равна единице, деленной на два таких корня.*

Отметим, что в приложениях часто приходится дифференцировать функцию $y = \sqrt{x}$. Поэтому удобнее в таких случаях не обращаться всякий раз к общей формуле (III.54), а запомнить формулу (III.55).

Формулу (III.55) можно получить и непосредственно из определения (III.34), хотя такой путь более сложный. С этой целью найдем для функции $y=\sqrt{x}$ приращение

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}.$$

Умножив и разделив полученный результат на сумму корней и воспользовавшись тождеством $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, имеем

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{(x+\Delta x)-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

В таком случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

откуда после перехода к пределу получаем формулу (III.55):

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Упражнение 2. Доказать, что производная от функции $y=\sqrt[5]{(x^2+7)^3} = (x^2+7)^{\frac{3}{5}}$ равна $y' = \frac{3}{5}(x^2+7)^{\frac{3}{5}-1}\cdot 2x = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(x^2+7)^2}}$.

Указание. Представить y как сложную функцию $y=u^{\frac{3}{5}}$, где $u=x^2+7$, $u'_x = 2x$, а затем воспользоваться формулами (III.49) и (III.54).

Пример 4. Вычислить производную функции $y=\sqrt[3]{x-1}=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ в точках $x=2$ и $x=1$.

Решение. Представив y в виде сложной функции

$$y=u^{\frac{1}{3}}, \text{ где } u=x-1$$

и воспользовавшись формулами (III.49) и (III.54), получаем

$$y' = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}\cdot u'_x = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}},$$

так как в данном случае внутренняя функция есть $u=\varphi(x)=x-1$ и ее производная согласно формулам (III.41) — (III.43)

$$u'_x = (x-1)' = (x)' - (1)' = 1-0 = 1.$$

Подставив в найденную производную $y'(x)$ заданные значения $x=2$ и $x=1$, решаем поставленную задачу:

$$y'|_{x=2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3}; \quad y'|_{x=1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \infty.$$

В качестве иллюстрации к рассматриваемому примеру в табл. 6 непосредственно вычислены приращения Δy в точках $x=1$ и $x=2$ для различных значений при-

ращения аргумента Δx, а затем найдено их отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Каждое из приращений функции находим, как обычно, вычислив для заданных x и $(x+\Delta x)$ разность

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt[3]{(x+\Delta x)-1} - \sqrt[3]{x-1},$$

в результате чего получаем*

$$\Delta y|_{x=1} = \sqrt[3]{(1+\Delta x)-1} - \sqrt[3]{1-1} = \sqrt[3]{\Delta x},$$

$$\Delta y|_{x=2} = \sqrt[3]{(2+\Delta x)-1} - \sqrt[3]{2-1} = \sqrt[3]{1+\Delta x} - 1.$$

Проанализировав результаты вычислений, выполненных в табл. 6, видим, что для $x=1$, когда $\Delta x \to 0$, отношение $\Delta y : \Delta x$ неограниченно растет, а для $x=2$ эта величина в пределе стремится к $\frac{1}{3}$, как и должно быть, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$. Другими словами, при $x=2$ бесконечно малые $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ имеют один и тот же порядок малости, а при $x=1$ приращение аргумента Δx убывает быстрее, чем приращение функции Δy, т. е. в этом случае $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $\Delta y \to 0$.

Таблица 6

$x=1;\ y(1)=\sqrt[3]{x-1}=0$ $\Delta y = y(1+\Delta x) - y(1) = \sqrt[3]{\Delta x};$ $y'(1)=\infty$			$x=2;\ y'(2)=\sqrt[3]{x-1}=1$ $\Delta y = \sqrt[3]{1+\Delta x} - 1;\ y'(2)=\frac{1}{3}$		
Δx	$\Delta y = \sqrt[3]{\Delta x}$	$\Delta y : \Delta x$	$\sqrt[3]{1+\Delta x}$	Δy	$\Delta y : \Delta x$
0,5	0,79370053	1,58740106	1,1447142	0,1447142	0,2894284
0,1	0,46415888	4,6415888	1,0322801	0,0322801	0,322801
0,01	0,21544347	21,544347	1,0033223	0,0033223	0,33223
0,001	0,10000000	100,00000	1,0003332	0,0003332	0,3332
0,0001	0,04641589	464,1589	1,0000333	0,0000333	0,333

Найденные значения $y'(1)=\infty$ и $y'(2)=\frac{1}{3}$ полностью согласуются с рис. 106, на котором представлен график функции $y=\sqrt[3]{x-1}$. Действительно, согласно формуле (III.39)

$$y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$$

значение производной в данной точке x равно тангенсу угла наклона касательной к кривой $y=y(x)$ в этой точке. Следовательно, в данном примере $\operatorname{tg}\alpha=\infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ при $x=1$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ при $x=2$, т. е. касательная в точке (1; 0) должна идти параллельно оси Oy, а касательная в точке (2; 1), угловой коэффициент которой $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$, должна пройти через точку (—1; 0) оси абсцисс. Для того чтобы проверить эти результаты, читателю надо провести касательную в точке кривой (2; 1).

* Значение кубического корня из заданного числа находим по таблицам Барлоу [135].

Упражнение 3. Вычислить производную функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точках $x = 3$, $x = 0$, $x = -1$ и проверить результаты графическим путем, вычертив по точкам на миллиметровой бумаге график этой функции.

Указание. Воспользуйтесь методикой графического дифференцирования, изложенной в § 40.

Пример 5. Найти производную от полинома n-й степени

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

Решение. Так как производная суммы равна сумме производных, а постоянную величину можно выносить за знак производной, то, воспользовавшись формулой (III.54), сразу получаем искомый ответ

$$y' = \{P_n(x)\}' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}, \qquad \text{(III.56)}$$

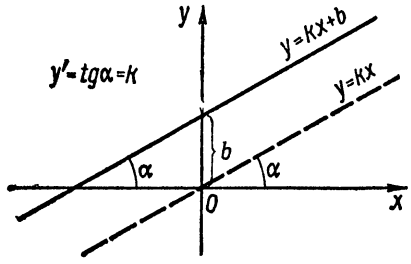


Рис. 109.

поскольку производная постоянной a_0 равна нулю.

Таким образом, *производная полинома n-й степени равна полиному степени $n-1$, коэффициенты которого определяются по формуле (III.56)*. В частности, для линейной функции $y = kx + b$ имеем

$$y' = (kx + b)' = k.$$

Полученный результат имеет простое геометрическое толкование. Производная в данной точке x равна угловому коэффициенту касательной к графику функции (см. § 32). Графиком функции $y = kx + b$ является прямая с угловым коэффициентом k, а касательная к прямой, проведенная в любой ее точке, совпадает с самой прямой*. Поэтому в данном случае угловой коэффициент касательной есть величина постоянная, равная угловому коэффициенту k заданной прямой (рис. 109).

Подчеркнем также, что при параллельном переносе прямой, т. е. при изменении величины отрезка b, угол α остается неизменным, а следовательно, неизменной остается и производная y'. Это еще раз наглядно подтверждает, что производная постоянной равна нулю.

Упражнение 4. Найти производную от функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

и вычислить значения $y(x)$ и $y'(x)$ в точках $x = 0$, 1, 2, 3, 4. Затем построить график заданной функции и проверить найденные результаты графическим путем.

§ 36. Производные тригонометрических и обратных тригонометрических функций

Решая пример 3 § 31, мы нашли производную функции $y = \sin x$. Покажем теперь, что общие правила дифференцирования, выведенные в § 34, позволяют по известной производной от $\sin x$ найти производные всех остальных тригонометрических функций, прямых и обратных.

Начнем с вычисления производной функции $y = \cos x$. Для этого по формуле приведения напишем

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

* Отметим, что таким свойством обладает только прямая. Действительно, прямая полностью определяется двумя точками. Поэтому, взяв на заданной прямой согласно рис. 101 две точки M и M_1, мы однозначно определяем секущую MM_1, которая при дальнейшем движении по прямой точки M_1 будет оставаться неподвижной, вплоть до своего предельного положения, когда точка M_1 совпадает с точкой M.

а затем представим y в виде сложной функции

$$y = \cos x = \sin u, \text{ где } u = \frac{\pi}{2} - x.$$

Тогда согласно формулам (III.49) и (III.37) имеем

$$y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u'_x = -\cos u = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$

так как производная от внутренней функции $u = \frac{\pi}{2} - x$ есть $u'_x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1$.

Таким образом, производная от $\cos x$ есть $-\sin x$, т. е.

$$y' = (\cos x)' = -\sin x. \tag{III.57}$$

Упражнение 1. Вывести формулу (III.57), исходя из тождества $y = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ или из тождества $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Производную от функции $y = \operatorname{tg} x$ найдем, представив ее в виде дроби

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

и воспользовавшись теоремой 3 § 34. Согласно формулам (III.48), (III.37), (III.57) получаем

$$y' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

так как в силу основного тригонометрического тождества

$$\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Итак, в случае функции $y = \operatorname{tg} x$ имеем

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{III.58}$$

Упражнение 2. Доказать, что производная от функции $y = \operatorname{ctg} x$ есть

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{III.59}$$

Указание. Представьте заданную функцию в виде дроби $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ или воспользуйтесь тождеством $y = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Переходим к обратным тригонометрическим функциям. Для функции $y = \arcsin x$ мы уже вывели в § 34 формулу (III.53), согласно которой

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично выводится формула для производной от функции $y = \arccos x$:

$$y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{III.60}$$

Действительно, если $y = \arccos x$, то обратная функция будет $x = \cos y$. Согласно формулам (III.52) и (III.57) имеем:

$$y' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{(-\sin y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}.$$

Но $\cos y = x$, поэтому

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. В равенстве $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ перед корнем надо взять знак плюс, так как функция $y = \arccos x$ определена в промежутке $0 \leqslant y \leqslant \pi$ и, следовательно, $\sin y \geqslant 0$.

Производную функции $y = \operatorname{arcctg} x$ также определяем при помощи правила дифференцирования обратной функции. В данном случае обратной является функция $x = \operatorname{tg} y$, производную которой мы уже нашли. Поэтому, воспользовавшись формулами (III.52) и (III.58), решаем поставленную задачу:

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}.$$

Для того чтобы придать найденному результату окончательный вид, надо только от переменной y перейти к переменной x, т. е. выразить $\cos y$ через $\operatorname{tg} y = x$, что легко выполнить, поскольку

$$\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Объединяя эти результаты, приходим к искомой формуле

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(III.61)}$$

Упражнение 3. Доказать, что производная от функции $y = \operatorname{arcctg} x$ есть

$$y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(III.62)}$$

Найденные и полученные ранее формулы позволяют вычислять производные для широкого класса функций. Вот несколько простых примеров, продублировав которые, читатель сможет проверить, насколько он усвоил предыдущий материал:

$$(2x^4 - \sin x)' = 2(x^4)' - (\sin x)' = 2 \cdot 4x^3 - \cos x = 8x^3 - \cos x;$$

$$\left(x^{\frac{5}{7}} + 3\operatorname{ctg} x\right)' = \left(x^{\frac{5}{7}}\right)' + 3(\operatorname{ctg} x)' = \frac{5}{7}x^{-\frac{2}{7}} - \frac{3}{\sin^2 x};$$

$$(3x^5 + \sqrt{x} - \operatorname{arctg} x)' = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x^2};$$

$$(x^3 \cos x)' = x^3(\cos x)' + (x^3)'\cos x = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x;$$

$$[(\arccos x)^2]' = 2\arccos x \cdot (\arccos x)' = \frac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$[\arcsin(x^4-7)]' = \frac{1}{\sqrt{1-(x^4-7)^2}} \cdot (x^4-7)' = \frac{4x^3}{\sqrt{1-(x^4-7)^2}};$$

$$[\operatorname{tg}(3x^2+5x-2)]' = \frac{1}{\cos^2(3x^2+5x-2)} \cdot (3x^2+5x-2)' = \frac{6x+5}{\cos^2(3x^2+5x-2)};$$

$$(\sqrt{1-\cos^6 x})' = \frac{(1-\cos^6 x)'}{2\sqrt{1-\cos^6 x}} = \frac{-6\cos^5 x \cdot (\cos x)'}{2\sqrt{1-\cos^6 x}} = \frac{3\cos^5 x \sin x}{\sqrt{1-\cos^6 x}}.$$

В качестве пояснения к этим примерам ограничимся следующим замечанием. При дифференцировании сложной функции промежуточные переменные после некоторой тренировки можно вводить мысленно, помня, что производную от сложной функции согласно формуле (III.49) необходимо умножить на производную от внутренней функции. Так, определяя производную от функции $y = \arcsin(x^4-7)$, ее следовало бы представить в виде

$$y = \arcsin u, \text{ где } u = x^4 - 7,$$

а затем применить формулы (III.49) и (III.41), (III.43), (III.53), (III.54). Для функции $y = \sqrt{1-\cos^6 x}$ «цепочка» состоит уже из трех функций:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = 1 - v^6, \quad v = \cos x,$$

так что, решая этот пример, надо воспользоваться формулой (III.51), а также формулами (III.41), (III.43), (III.54), (III.55), (III.57).

В более сложных случаях, когда «цепочка» функций состоит из большего числа звеньев или когда каждое из звеньев более или менее сложное, во избежание ошибок, следует вводить промежуточные переменные u, v, w, ...

Пример. Найти производную от функции

$$y = \operatorname{arcctg}^3 \sqrt{x}$$

и вычислить ее значение при $x = 1$.

Решение. Представив данную функцию в виде

$$y = u^3, \quad u = \operatorname{arcctg} v, \quad v = \sqrt{x},$$

а затем воспользовавшись формулами (III.51) и (III.54), (III.55), (III.62), имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 3u^2 \cdot \left(\frac{-1}{1+v^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3\operatorname{arcctg}^2 \sqrt{x}}{2(1+x)\sqrt{x}},$$

так как

$$u^2 = (\operatorname{arcctg} v)^2 = \operatorname{arcctg}^2 \sqrt{x}; \quad 1 + v^2 = 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x.$$

Подставив в найденную производную $y'(x)$ значение $x = 1$ и учтя, что $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \frac{3}{4}\pi$, решаем вторую часть задачи (ограничиваясь пятью десятичными знаками точности вычислений):

$$y'(x)\big|_{x=1} = -\frac{3 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = -0{,}46264 \text{ при } \sqrt{x}\big|_{x=1} = +1;$$

$$y'(x)\big|_{x=1} = +\frac{3 \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)^2}{2 \cdot 2} = +\frac{3}{4}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 = 4{,}16374 \text{ при } \sqrt{x}\big|_{x=1} = -1.$$

Для того чтобы закончить изложение вопроса о дифференцировании элементарных функций, необходимо еще найти производные логарифмической и показательной функций. Но для этого мы должны предварительно познакомиться с натуральными логарифмами, которые в средней школе не изучаются.

§ 37. Натуральные логарифмы. Число e

В предыдущих параграфах мы пользовались понятием предела, главным образом, для исследования функций. Применим теперь предельный переход для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое широко применяют как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях.

Рассмотрим функцию натурального аргумента $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

и найдем предел числовой последовательности $\{y_n\} = y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n, \ldots$ при $n \to \infty$.

При $n = 1, 2, 3$ функция y_n принимает следующие значения:

$$y_1 = (1 + 1)^1 = 2; \quad y_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25;$$

$$y_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370\ldots$$

Так как с ростом n основание степени здесь стремится к единице, монотонно убывая, то характер изменения величины y_n непосредственно не просматривается. Поэтому исследуем y_n более подробно, доказав прежде всего следующую теорему.

Теорема. *Функция* $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *при* $n \to \infty$ *имеет конечный предел, заключенный между 2 и 3.*

Доказательство. По формуле бинома Ньютона имеем*:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

или, разделив каждый сомножитель в числителе на n,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

* Символом $n!$ (читают: эн факториал) обозначают произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (от латинского слова *factor* — фактор — делающий, производящий, в математике — сомножитель).

Полученная сумма содержит $(n+1)$ положительных слагаемых. При увеличении целого числа n увеличивается число слагаемых и каждое из них также увеличивается. Действительно, в каждом из слагаемых

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right);\quad k=2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n$$

величина $k!$ остается без изменения, а дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k-1}{n}$ уменьшаются, так что разности, стоящие в круглых скобках, увеличиваются по мере роста n. Следовательно, переменная величина y_n при $n\to\infty$ монотонно возрастает.

С другой стороны, при $n\to\infty$ переменная $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

В самом деле, заменив в предыдущем равенстве все множители $\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ единицами (отчего каждая скобка только увеличивается), получаем неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Далее, заменив в факториалах двойками все числа, большие двух (например: $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4>1\cdot2\cdot2\cdot2=2^3$, $\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$), мы еще больше увеличим правую часть неравенства, так что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{s_n}=$$

$$=1+\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

поскольку, отбросив в правой части величину $\frac{1}{2^{n-1}}$, мы еще раз усилим неравенство. В пояснение к этому результату остается заметить, что n членов, взятых для наглядности в скобки, образуют геометрическую прогрессию с первым членом $u_1=1$ и со знаменателем $q=\frac{1}{2}$, сумма которой определяется равенством

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$

$$=\frac{u_1}{1-q}(1-q^n)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Покажем, что для всех $n\geqslant1$ имеет место неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geqslant2$. Действительно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2$ при $n=1$, а с возрастанием n, как мы уже видели, функция y_n монотонно возрастает. Таким образом,

$$2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3,$$

а это значит, что y_n ограничена.

Но если величина $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ монотонно возрастает, оставаясь ограниченной, то согласно признаку Больцано—Вейерштрасса (см. § 25) она имеет конечный предел. Теорема полностью доказана.

Предел функции $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ Эйлер предложил (в 1728 г.) обозначать буквой e, и с тех пор это обозначение стало общепринятым.

Число e иррационально, более того, оно трансцендентно, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами*. Однако число e может быть вычислено с любой степенью точности. Один из возможных способов вычисления числа e заключается в непосредственном использовании приближенного равенства

$$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{(III.63)}$$

при достаточно больших n. В табл. 7 выполнены все необходимые вычисления для некоторых значений n. При этом если $n = 2^k$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, то все вы-

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^1$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^8$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{16}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{32}$
1	2	—	—	—	—	—
2	1,5	2,25	—	—	—	—
4	1,25	1,5625	2,44140625	—	—	—
8	1,125	1,265625	1,6018066406	2,5657845139	—	—
16	1,0625	1,12890625	1,2744293213	1,6241700950	2,6379284975	—
128	1,0078125	1,0156860352	1,0316181221	1,0642359498	1,1325981568	1,2827785848
1024	1,0009765625	1,0019540787	1,0039119758	1,0078392552	1,0157399643	1,0317276751
8192	1,0001220703	1,0002441555	1,0004883706	1,0009769797	1,0019549139	1,0039136495
65536	1,0000152588	1,0000305178	1,0000610365	1,0001220767	1,0002441683	1,0004883962
10	1,1	1,21	1,4641	2,14358881	—	—
100	1,01	1,0201	1,04060401	1,0828567056	1,1725786449	1,3749406785
1000	1,001	1,002001	1,0040060040	1,0080280561	1,0161205619	1,0325009963
10000	1,0001	1,00020001	1,0004000600	1,0008002800	1,0016012004	1,0032049646
100000	1,00001	1,0000200001	1,0000400006	1,0000800028	1,0001600120	1,0003200496
—10	0,9	0,81	0,6561	0,430 46721	—	—
—100	0,99	0,9801	0,96059601	0,9227446944	0,8514577710	0,7249803358
—1000	0,999	0,998001	0,9960059960	0,9920279441	0,9841194419	0,9684910759
—10000	0,9999	0,99980001	0,9996000600	0,9992002800	0,9984011996	0,9968049554

числения сводятся к последовательному возведению в квадрат предыдущего результата и поэтому выполняются очень легко. Так же просто выполняются эти вычисления и для любого другого целого числа n. Например, учтя, что $100 = 64 + 32 + 4$, $1000 = 1024 + 8 - 32$, находим

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{64} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{32} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{4} = 2{,}7048138293;$$

* Трансцендентны также и логарифмы с основанием e (получившие название *натуральных*) всех целых чисел, равно как и десятичные логарифмы всех чисел, кроме чисел . . . 0,1; 1; 10; 100; 1000; ... , т. е. кроме чисел $10^{\pm m}$, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Трансцендентность числа e была доказана в 1871 г. французским математиком Ш. Эрмитом, трансцендентность логарифмов — советским математиком А. О. Гельфондом в 1934 г.

$$\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}=\frac{\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1024}\cdot\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{8}}{\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{32}}=\frac{2{,}8052266805}{1{,}0325009963}=2{,}7169239454.$$

Вычисления в табл. 7 выполнены с одиннадцатью значащими цифрами (а при $n<0$ — с десятью), а затем окончательные результаты округлены до шести значащих цифр.

Упражнение 1. Продублировать с семью значащими цифрами строку $n=128$ табл. 7 и показать, что при такой точности вычислений получим $\left(1-\frac{1}{128}\right)^{128}=2{,}707910$.

Проанализируем результаты упражнения 1. Округлив до семи значащих цифр исходное точное число

$$\left(1-\frac{1}{128}\right)=1{,}0078125\approx 1{,}007813,$$

Таблица 7

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{64}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{128}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{256}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{512}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1024}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8192}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$
—	—	—	—	—	—	2
—	—	—	—	—	—	2,25
—	—	—	—	—	—	2,44141
—	—	—	—	—	—	2,56578
—	—	—	—	—	—	2,63793
1,6455208976	2,7077390244	—	—	—	—	2,70774
1,0644619956	1,1330793401	1,2838687910	1,6483190725	2,7169557648	—	2,71696
1,0078426157	1,0157467380	1,0317414358	1,0644903903	1,1331397910	2,7181155987	2,71812
1,0009770309	1,0019550164	1,0039138549	1,0078430281	1,0157475693	1,1331472099	2,71826
—	—	—	—	—	—	2,59374
1,8904618694	—	—	—	—	—	2,70481
1,0660583074	1,1364803148	1,2915875059	1,6681982854	2,7828855194	—	2,71692
1,0064202010	1,0128816210	1,0259291782	1,0525306787	1,1078208296	2,2685910431	2,71815
1,0006402016	1,0012808131	1,0025632667	1,0051331037	1,0102925562	1,0853685297	2,71827
—	—	—	—	—	—	2,86797
0,5255964873	—	—	—	—	—	2,73200
0,9379749641	0,8797970333	0,7740428198	0,5991422869	0,3589714800	—	2,71964
0,9936201191	0,9872809411	0,9747236567	0,9500862069	0,9026638005	0,4407661260	2,71842

мы допустим в данном случае абсолютную погрешность $\varepsilon_1=0{,}0000005=\frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$.

После возведения заданного числа в 128-ю степень разность между результатами, вычисленными с семью и с одиннадцатью значащими цифрами (с которыми выполнялись вычисления в табл. 7), будет

$$\varepsilon_{128}=2{,}707910-2{,}707739=0{,}000171=171\cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, начальная погрешность, равная половине седьмого десятичного знака, и дальнейшие неизбежные ошибки округления промежуточных результатов привели к увеличению погрешности окончательного результата в 340 раз, т. е. затронули четвертый десятичный знак результата. При $n>128$ погрешность ре-

зультатов будет еще больше; вот почему мы и вели вычисления в табл. 7 с пятью запасными знаками*.

Определение e по формуле (III.63) довольно трудоемкий процесс. Более эффективный способ вычисления e мы рассмотрим в § 98 гл. VIII, а пока приведем значение e с 16-ю значащими цифрами:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045. \qquad \text{(III.64)}$$

Формула (III.64) верна не только в том случае, когда n принимает целые положительные значения, но и тогда, когда n принимает любые действительные значения $n = x$, доказательство чего читатель может найти, например, в [102, т. I, стр. 50—51] или в [125, т. I, стр. 81—84]. В качестве иллюстрации в табл. 7 приведены значения функции $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ для $n = x = -10, -100, -1000, -10000$, а на рис. 110 построен график этой функции.

Как видим, при положительных значениях x величина $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ асимптотически приближается к числу e, монотонно увеличиваясь, а при отрицательных x — монотонно уменьшаясь. Поэтому более точные результаты получим, если e будем вычислять по такой приближенной формуле

$$e \approx \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x + \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}. \qquad \text{(III.65)}$$

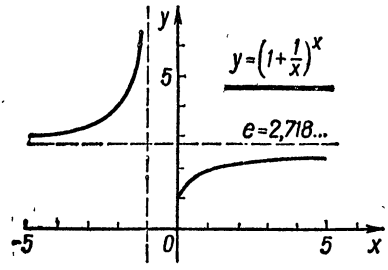


Рис. 110.

Например, взяв $x = n = \pm 1000$ и воспользовавшись результатами, приведенными в табл. 7, имеем

$$e \approx \frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} + \left(1-\frac{1}{1000}\right)^{-1000}\right\} = \frac{2{,}71692 + 2{,}71964}{2} = 2{,}71828,$$

т. е. результат с шестью верными знаками, в то время как исходные данные $e \approx (1{,}001)^{1000} = 2{,}71692$ и $e \approx (0{,}999)^{-1000} = 2{,}71964$ имеют на две значащие цифры меньше.

Упражнение 2. Вычислить по формуле (III.65) приближенное значение числа e, взяв $x = n = \pm 128$. Все промежуточные вычисления провести с семью значащими цифрами, а окончательные результаты округлить до пяти значащих цифр.

Можно показать, что погрешность формулы (III.63) имеет порядок $\frac{1}{n}$, а порядок погрешности формулы (III.65) есть $\frac{1}{n^2}$. Поэтому при увеличении n примерно в восемь раз точность результатов, вычисленных по формуле (III.63), увеличивается на одну значащую цифру, а по формуле (III.65) — на две, что подтверждается данными, приведенными в табл. 7.

Число e обладает тем замечательным свойством, что логарифмическая функция с основанием e имеет наиболее простую производную, а это упрощает исследование многих теоретических вопросов. Для вычислительных же целей удобнее в качестве основания системы логарифмов принять число 10, равное основанию десятичной

* Данный пример является лишь иллюстрацией к тому, какую осторожность надо проявлять при выполнении приближенных вычислений. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в третьей части книги.

системы счисления, так что *десятичный логарифм* y числа x определяется равенством

$$10^y = x.$$

Если это равенство выполняется, то $y = \lg x$, т. е. функции $x = 10^y$ и $y = \log_{10} x = \lg x$ взаимно обратные. Десятичные логарифмы называют еще *бригговыми* по имени английского математика Бригга (Henry Briggs, 1561—1630), который в 1617 г. впервые вычислил и опубликовал восьмизначные таблицы десятичных логарифмов (для чисел от 1 до 1000). Через семь лет, в 1624 г., Бригг уточнил свои таблицы и вычислил логарифмы с 14-ю знаками для чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. В 1628 г. Влакк (Adrian Vlacq, 1600—1667) издал десятизначные таблицы логарифмов чисел от 1 до 100 000. В нашей стране таблицы логарифмов впервые были изданы в 1703 и 1719 гг. Одним из авторов был Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739), которому принадлежит также первый русский печатный курс математики «Арифметика, сиречь наука числительная» (1703 г.), являющийся своего рода энциклопедией математических знаний того времени.

Логарифмы с основанием e получили название *натуральных* (дословно — естественных). Эти логарифмы называют также *непировыми* по имени шотландского математика Непера (John Neper, 1550—1617), который является изобретателем логарифмов*. Основные идеи учения о логарифмах у Непера сформировались в конце XVI века, но его работа «Описание удивительной таблицы логарифмов» была издана только в 1614 г. Заметим, что идея логарифмов была заложена еще в работах древнегреческого математика и механика Архимеда (Ἀρχιμήδης, примерно 287—212 гг. до н. э.), но только Непер начал систематически применять логарифмы для вычислительных целей и построил их таблицы, на что потратил более 20 лет жизни. Неперу также принадлежит идея создания более удобных для вычислительной практики десятичных логарифмов, которая была затем реализована Бриггом. Слово «логарифм» происходит от греческого λόγος — понятие, мысль, слово, здесь — *отношение* и ἀριθμος — *число*. График логарифмической функции называется *логарифмикою*.

Таким образом, если

$$e^y = x,$$

то y называют натуральным логарифмом числа x и в соответствии с начальными буквами слов *logarithmus naturalis* обозначают символом $\ln x$. Другими словами, показательная функция $x = e^y$ и логарифмическая функция $y = \ln x$ также являются взаимно обратными. Поэтому, построив на рис. 111 графики функций $y = 10^x$, $y = e^x$ и отразив их в биссектрисе $y = x$, мы получим графики обратных к ним функций

$$y = \log_{10} x = \lg x, \quad y = \log_e x = \ln x.$$

Натуральный и десятичный логарифмы одного и того же числа связаны простым соотношением, позволяющим легко переходить от одного из этих логарифмов к другому. Действительно, если $y = \lg x$, то $x = 10^y$. Взяв натуральный логарифм от обеих частей последнего равенства, получим

$$\ln x = y \ln 10.$$

* Непер вводил логарифмы несколько по-иному, чем это принято сейчас, так как ему еще не было известно понятие об основании системы логарифмов, но его логарифмы соответствуют основанию, близкому к $1/e$. Поэтому более справедливо было бы натуральные логарифмы связать с именем швейцарского математика, механика и астронома Бюрги (Jost Bürgi, 1552—1632), который для облегчения астрономических вычислений независимо от Непера составил в 1603—1611 гг. таблицу логарифмов с основанием, близким к числу e. Однако свою таблицу Бюрги опубликовал только в 1620 г., т. е. на 6 лет позже Непера.

Отсюда $y = \frac{1}{\ln 10} \ln x$ или, заменяя y его первоначальным значением $\lg x$, имеем

$$\lg x = M \ln x, \text{ где } M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294481903252\ldots, \qquad \text{(III.66)}$$

т. е. *десятичный логарифм числа x равен натуральному логарифму этого же числа, умноженному на постоянный множитель $M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434294\ldots$, который называется модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.* В частности, если $x = e$, то из (III.66) имеем

$$\lg e = M, \text{ или } M = \lg e = \frac{1}{\ln 10}.$$

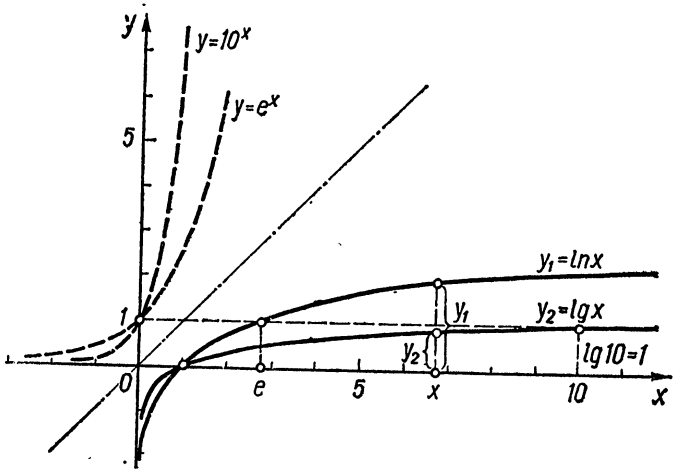


Рис. 111.

Обратный переход можно осуществить при помощи того же равенства (III.66) или, что более удобно, переписав его в следующем виде:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \text{ где } \frac{1}{M} = 2{,}302585092994046\ldots, \qquad \text{(III.67)}$$

т. е. *натуральный логарифм числа x равен произведению десятичного логарифма этого числа на постоянный множитель $\frac{1}{M} = 2{,}302585\ldots$.*

Отсюда следует, что натуральный логарифм любого числа x больше его десятичного логарифма в 2,30258... раза.

Связь между натуральными и десятичными логарифмами наглядно выясняется из сравнения графиков функций $y_1 = \ln x$ и $y_2 = \lg x$, представленных на рис. 111. Соотношение $\lg x = M \ln x$ геометрически выражается в том, что во всех точках x (кроме точки $x = 1$, в которой $\lg 1 = \ln 1 = 0$) ординаты графиков находятся в одном и том же отношении:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\lg x}{\ln x} = M = \text{const}.$$

Для натуральных логарифмов составлены специальные таблицы (подобные известным таблицам десятичных логарифмов) и мы в § 97 гл. VIII еще остановимся на методике их вычисления. После того как таблицы натуральных логарифмов вычислены с требуемой точностью, таблицы десятичных логарифмов получают пересчетом по формуле (III.66).

§ 38. Производные логарифмической и показательной функций

Производную логарифмической функции при любом основании $a \neq 1$

$$y = \log_a x, \quad x > 0,$$

найдем, воспользовавшись общим определением (III.34) и результатами, полученными в предыдущем параграфе. В данном случае приращенному значению аргумента $x + \Delta x$ будет соответствовать значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \log_a (x + \Delta x)$$

и, следовательно,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x,$$

или

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

так как логарифм частного равен разности логарифмов числителя и знаменателя.

Отсюда имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Разделим и умножим на x правую часть полученного равенства, а затем выполним следующие преобразования, которые не нуждаются в дополнительных пояснениях:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{\Delta x}\right)}\right]^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Обозначим величину $\frac{x}{\Delta x}$ через n. Очевидно, что $n \to \infty$ при $\Delta x \to 0$ и фиксированном значении x. Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Но согласно формуле (III.64) при любом $n = \frac{x}{\Delta x}$, стремящемся к бесконечности,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Если же выражение, стоящее под знаком логарифма, стремится к числу e, то, в силу непрерывности логарифмической функции, логарифм этого выражения стремится к $\log_a e$. Поэтому в соответствии с (III.34) получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x} \log_a e,$$

или окончательно

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \tag{III.68}$$

т. е. *производная логарифмической функции равна* $\frac{1}{x}$, *умноженной на постоянный множитель* $\log_a e$.

В частности, если $a = e$, то $\log_a e = \ln e = 1$ и формула (III.68) принимает наиболее простой вид:

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \tag{III.69}$$

т. е. *производная функции* $y = \ln x$ *равна величине, обратной аргументу* x.

Этот факт и дает основание для предпочтения, которое оказывают натуральным логарифмам при теоретических исследованиях.

В случае десятичных логарифмов, поскольку $\log_a e = \lg e = M$, согласно формуле (III.68) имеем

$$(\lg x)' = \frac{M}{x}, \text{ где } M = 0{,}434294\ldots. \tag{III.70}$$

Таким образом, *производная десятичного логарифма* $y = \lg x$ *равна модулю перехода от натуральных логарифмов к десятичным, деленному на* x.

Пример 1. Продифференцировать функцию $y = \ln(x^5 + \arcsin x)$.

Решение. Воспользовавшись формулами (III.49), (III.69), (III.54), (III.53), (III.43), получаем

$$y' = \frac{1}{x^5 + \arcsin x} \cdot (x^5 + \arcsin x)' = \frac{5x^4 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{x^5 + \arcsin x} = \frac{1 + 5x^4\sqrt{1-x^2}}{(x^5 + \arcsin x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 2. Продифференцировать функцию $y = \ln \operatorname{tg} x$ и найти значение производной в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Согласно (III.69), (III.49) и (III.58) имеем

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Подставив в найденную формулу $x = \frac{\pi}{4}$, решаем вторую часть задачи:

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}} = 2, \text{ так как } \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \lg \sqrt[3]{1 + x^6}$ и вычислить ее значения в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Решение. Представив заданную функцию в виде

$$y = \lg(1 + x^6)^{1/3},$$

по формулам (III.49), (III.70), (III.54), (III.43) решаем первую часть задачи:

$$y' = \frac{M}{(1 + x^6)^{1/3}} \cdot [(1 + x^6)^{1/3}]' = \frac{M \cdot \frac{1}{3}(1 + x^6)^{-2/3} \cdot (1 + x^6)'}{(1 + x^6)^{1/3}} =$$

$$= \frac{\frac{M}{3} \cdot 6x^5}{(1 + x^6)^{1/3 + 2/3}} = \frac{2Mx^5}{1 + x^6}.$$

Подставив в найденную производную $x = 0$ и $x = 1$, получаем

$$y'|_{x=0} = 0; \quad y'|_{x=1} = \frac{2Mx^5}{1 + x^6} = M = 0{,}43429\ldots.$$

Этот же пример можно решить и более простым путем, выполнив предварительно логарифмирование заданной функции:

$$y = \lg(1 + x^6)^{1/3} = \frac{1}{3}\lg(1 + x^6).$$

Учтя, что согласно (III.45) постоянную $C = \frac{1}{3}$ можно вынести за знак производной, имеем

$$y' = \frac{1}{3}[\lg(1 + x^6)]' = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{1 + x^6} \cdot (1 + x^6)' = \frac{6Mx^5}{3(1 + x^6)} = \frac{2Mx^5}{1 + x^6}.$$

Упражнения

1. Найти производные следующих функций:
а) $y = \ln(x^4 + 3x - 1)$; б) $y = \lg(x^4 + 3x - 1)$; в) $y = \ln\sqrt{2 + x^2}$.
2. Решить пример 2, представив заданную функцию в следующем виде:

$$y = \ln \operatorname{tg} x = \ln \frac{\sin x}{\cos x} = \ln \sin x - \ln \cos x$$

и воспользовавшись затем формулой (III.43).

Пример 4. Продифференцировать функцию

$$y = x^{\mu}, \tag{III.71}$$

где μ — любое вещественное число.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда $x > 0$. Взяв натуральные логарифмы от обеих частей равенства $y = x^{\mu}$, получаем

$$\ln y = \mu \ln x. \tag{III.72}$$

Функция $\ln y$ есть сложная функция от x, так как логарифм берется от y, а y есть функция от x. Поэтому по формулам (III.69) и (III.49) получим

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'. \tag{III.73}$$

Продифференцировав обе части равенства (III.72) и учтя, что постоянную μ можно вынести за знак производной, находим

$$(\ln y)' = (\mu \ln x)' = \mu (\ln x)'$$

или

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \mu \cdot \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y' = (x^{\mu})' = y \cdot \frac{\mu}{x} = x^{\mu} \cdot \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu - 1}, \tag{III.74}$$

так как по условию $y = x^{\mu}$.

Пусть $x < 0$. Положим $x = -z$ $(z > 0)$. По правилу дифференцирования сложной функции и по формуле (III.74) имеем

$$(x^{\mu})' = [(-z)^{\mu}]' = [(-1)^{\mu} z^{\mu}]' = (-1)^{\mu} \cdot (z^{\mu})' = (-1)^{\mu} \cdot \mu z^{\mu - 1} \cdot z'.$$

Далее, поскольку $z = -x$, то $z' = -1$, поэтому

$$(x^{\mu})' = (-1)^{\mu} \cdot \mu z^{\mu - 1} \cdot (-1) = (-1)^{\mu - 1} \cdot (-1)^2 \cdot \mu z^{\mu - 1} = \mu (-z)^{\mu - 1}$$

и, следовательно, возвращаясь от $-z$ к первоначальному аргументу x, получаем окончательный результат

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}.$$

Итак, производная степенной функции при любом показателе μ вычисляется как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента по формуле (III.74), которая тождественно совпадает с формулой (III.54) § 35, если в ней положить $n = \mu$. Например,

$$(x^{\pi})' = \pi x^{\pi-1} \approx 3{,}1416\, x^{2{,}1416}.$$

Выведем теперь формулу дифференцирования для показательной функции

$$y = a^x, \quad a > 0. \tag{III.75}$$

Взяв от обеих частей равенства (III.75) натуральные логарифмы, имеем

$$\ln y = x \ln a.$$

Продифференцировав обе части этого равенства и учтя, что величина $\ln a$ есть постоянная, которую можно вынести за знак производной, и что $(x)' = 1$, находим

$$(\ln y)' = \ln a \cdot (x)' = \ln a,$$

или, приняв во внимание формулу (III.73):

$$\frac{y'}{y} = \ln a,$$

откуда

$$y' = y \ln a.$$

Заменив y его значением (III.75), получаем окончательно

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a. \tag{III.76}$$

Таким образом, *производная показательной функции $y = a^x$ равна произведению самой показательной функции на натуральный логарифм основания.*

В частном случае, когда $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, формула (III.76) принимает наиболее простой вид:

$$y' = (e^x)' = e^x, \tag{III.77}$$

т. е. *производная показательной функции $y = e^x$ равна ей самой.*

Пример 5. Продифференцировать функцию $y = 12^{\sqrt{x}}$.

Решение. Воспользовавшись формулами (III.76), (III.49), (III.55), имеем

$$y' = (12^{\sqrt{x}} \ln 12) \cdot (\sqrt{x})' = \frac{\ln 12}{2\sqrt{x}} \cdot 12^{\sqrt{x}}.$$

Упражнения

3. Вывести формулу (III.76), воспользовавшись правилом дифференцирования обратной функции.

4. Найти производную функции $y = e^{\sin x}$ и вычислить ее значение в точке $x = 0$.

§ 39. Таблица основных формул и правил дифференцирования

Подведем итог полученных в предыдущих параграфах результатов в виде сводки производных элементарных функций и основных правил дифференцирования. В итоговую табл. 8 мы включили также производные от гиперболических функций (прямых и обратных). Эти формулы будут выведены в § 65 гл. V.

Таблица 8

Функция y	Производная y'	Функция y	Производная y'
$C = \text{const}$	0	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x	1	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{Arch} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{Arth} x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\dfrac{1}{x^2-1}$
$\lg x$	$\dfrac{1}{x}\lg e \approx \dfrac{0{,}434294}{x}$	$u \pm v$	$u' \pm v'$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$	Cu	Cu'
$\sin x$	$\cos x$	$u \cdot v$	$uv' + vu'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu' - uv'}{v^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = f(u),\ u = \varphi(x)$	$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$y = f(x),$ $x = \varphi(y)$	$y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ или $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$, где f и φ взаимно обратные функции
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$		
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$		
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		
$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$		

Пользуясь данной таблицей, читатель сможет продифференцировать любую элементарную функцию, но для этого он должен хорошо усвоить весь предыдущий материал, решив достаточное число примеров.

§ 40. Графическое дифференцирование

В тех случаях, когда функция задана только графически, например графиком, построенным каким-либо автоматическим самопишущим прибором, ее производную можно найти при помощи графического дифференцирования. Графическим путем можно также определить производную функции, заданной таблично, построив предварительно по табличным данным график заданной функции. К графическому дифференцированию мы вынуждены иногда прибегать даже в тех случаях, когда функция задана аналитически, но нет достаточно простых формул для определения ее производной.

Графическое определение производной от функции $f(x)$ сводится к вычислению уклона кривой $y = f(x)$ в заданной точке согласно формуле (III.39)

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс.

Весь процесс можно разбить на три этапа: 1) построение графика заданной функции $y = f(x)$; 2) построение касательной к кривой в точке с абсциссой x; 3) вычисление уклона кривой.

График функции можно строить и при различных масштабах по осям координат, в таком случае уклон кривой надо вычислять по формуле

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{m_x}{m_y} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \text{(III.78)}$$

где $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ — две какие-либо точки касательной, а m_x и m_y — масштабы по осям x и y.

Понятно, что даже небольшие изменения вида кривой $y = f(x)$ могут приводить к значительным погрешностям при определении $f'(x)$. Поэтому график функции надо строить очень тщательно, обращая особое внимание на его плавный ход. Сначала построенные точки соединяем от руки тонкой линией, небольшими отрезками по 3—4 точки, положив рисунок выпуклостью от себя, а затем вычерчиваем график при помощи лекала.

Чертить график надо на координатной бумаге, например на миллиметровой. Полученные результаты контролируем так называемым «косым взглядом». Подносим график очень близко к глазу и смотрим вдоль кривой. При таком контроле резкие изменения направлений кривой будут хорошо видны.

Строя график функции $y = f(x)$, необходимо добиваться, чтобы касательная в точке с абсциссой x была наклонена к оси x под углом, который лежит между 35 и 55°. Этого всегда можно достичь надлежащим выбором масштабов m_x и m_y. Последнее условие обеспечивает минимальную погрешность определения производной при прочих равных условиях. Кроме того, для увеличения точности точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ надо выбирать достаточно удаленными одна от другой. Лучше всего в качестве этих точек брать точки пересечения касательной с линиями координатной сетки.

Для того чтобы построить касательную к кривой, следует пользоваться прозрачным треугольником, который надо медленно вращать вокруг заданной точки на выпуклой стороне кривой, пока не станет видно, что найдено положение касательной. Точность построения касательной можно повысить, если воспользоваться небольшим прямоугольным зеркальцем без рамки. Зеркальце надо поставить перпендикулярно к плоскости рисунка так, чтобы его ребро проходило через данную точку, и вращать его до тех пор, пока кривая и ее отражение не образуют плав-

ной линии без угловой точки, что проверяется «косым взглядом». После того как искомое положение зеркальца найдено и зафиксировано, чертим вдоль его ребра линию, которая будет нормалью к кривой, т. е. перпендикуляром к касательной (см. § 32).

Повернув зеркальце на 180°, выполняем то же построение и в качестве окончательного положения нормали берем среднее арифметическое. По найденной нормали строим касательную как перпендикуляр, восставленный из заданной точки к заданной прямой.

Пример. Найти графическим способом производную в точке $x = 0{,}28$ функции $y = f(x)$, которая задана таблицей:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	— 0,0200	— 0,0272	— 0,0284	— 0,0176	0,0112	0,0640	0,1468

Решение. Построение выполнено на рис. 112. Масштаб по оси y берем в пять раз большим, чем по оси x, так что $\frac{m_x}{m_y} = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Отрезки $y_2 - y_1$ и $x_2 - x_1$ измеряем непосредственно на рисунке (лучше всего при помощи циркуля-измерителя) и по формуле (III.78) вычисляем

$$f'(x) = 0{,}2\,\frac{23{,}1}{29{,}7} = 0{,}156.$$

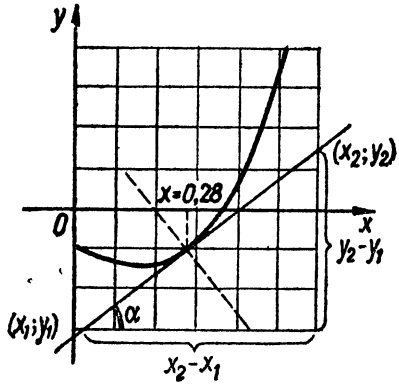


Рис. 112.

Найденная величина $f'(x)$ безразмерная и не зависит от единиц измерения, так как в формуле (III.78) фигурируют только отношения отрезков. В данном случае мы вели измерения в миллиметрах.

Табулированная в рассматриваемом примере функция есть

$$f(x) = x^3 - 0{,}082x - 0{,}020,$$

для которой

$$f'(x) = 3x^2 - 0{,}082 \text{ и } f'(x)\,|_{x=0{,}28} = 0{,}1532.$$

Таким образом, графический метод в данном примере обеспечил только два верных знака.

Графический метод определения производной вообще имеет низкую точность, поэтому им надо пользоваться только в тех случаях, когда другие методы неприменимы, или для грубого контроля результатов. В тех случаях, когда функция задана таблично, более высокую точность можно получить при помощи численного дифференцирования, первоначальные сведения о котором изложены, например, в [148, § 31, гл. V].

Упражнение. Найти графическим способом производную в точке $x = 1{,}47$ функции $y = f(x)$, заданной таблицей:

x	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
$f(x)$	0,399	0,354	0,317	0,285	0,258	0,236	0,216

Контрольные упражнения

1. Дана функция $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Показать, что $f(1) = 4$; $f(-2) = 1$; $f(0) = 5$.

2. Вычислить значения функции $f(x) = x^4 - 7$ в точках $x = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ и построить ее график.

3. Определить, какие из приведенных ниже функций четные, а какие нечетные:

а) $f(x) = 3x - 2x^3$; б) $f(x) = 3x - 2x^3 + 1$; в) $f(x) = 3x^2 - x^4 + 5$; г) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$; д) $y = x - 2\sin x$; е) $\varphi(x) = 1 + \cos x$.

Построить графики этих функций.

4. Дана функция $\varphi(x) = \frac{1 + x^2}{3x - 2}$. Написать выражения $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\frac{1}{\varphi(x)}$.

5. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 4}{1 + x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$; в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

6. Раскрыть неопределенность $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sin x}$.

7. Определить точки разрыва функции

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x(x - 1)(x + 3)}.$$

8. Из приведенных ниже бесконечно малых (при $x \to 0$) величин: $\sin 2x$, x^3, $\sqrt{x(2 + x)}$, $3x \cos x$, $x \operatorname{tg} x$, xe^{x^2} найти бесконечно малые того же порядка, что и x, а также высшего и низшего порядков, чем x.

9. Показать, что при $x \to 1$ порядок бесконечно малых величин $1 - x$ и $1 - \sqrt{x}$ одинаков. Будут ли эти величины эквивалентны?

10. Найти, воспользовавшись непосредственно определением (III.34), производные функций:

а) $y = x^4$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = 3x^2 + x - 4$.

11. На примере функции $y = x^3$ исследовать, насколько быстро идет к пределу отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, воспользовавшись в качестве образца табл. 3.

12. Определить тангенсы углов наклона касательных к кривым $y = x^3$ и $y = x^3 - x + 2$ в точках $x = 0; \pm 1; \pm 2$. Построить рисунки.

13. Найти уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x + 4$ в точке, абсцисса которой равна 1.

14. Высота h (в метрах), достигаемая за t *сек* телом, брошенным вертикально вверх с начальной скоростью v_0 *м/сек*, определяется формулой

$$h = v_0 t - 4{,}9t^2.$$

Определить: а) скорость движения тела в любой момент времени t; б) скорость движения тела в конце пятой секунды, при условии, что $v_0 = 20$ *м/сек*; в) через сколько секунд тело достигнет максимальной высоты; вывести формулу для определения высоты и вычислить h при $v_0 = 20$ *м/сек*.

15. Найти производные следующих функций:

а) $y = (x - 3)(x^2 + 5x + 2)$; б) $y = \frac{x^2}{2 + x^3}$; в) $y = (x^4 - 1)^{50}$; г) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$; д) $u = \sin\sqrt{1 + t^2}$; е) $f(x) = \sin x + \ln x^3$; ж) $z = 5e^{3t-2} - \operatorname{tg} t^2$; з) $y = \operatorname{arctg}\frac{x + 1}{2}$; и) $y = e^{\cos x}$.

Глава IV

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

В данной главе мы продолжим изучение вопросов, рассмотренных в гл. III, но при этом основное внимание уделим некоторым приложениям дифференциального исчисления.

§ 41. Возрастание и убывание функции

Пусть на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ (или $a < x < b$) задана функция $y = f(x)$, о которой будем предполагать, что она не только непрерывна, но и имеет во всех точках производную. Умение вычислять производную дает возможность глубже изучить различные свойства функций. Рассмотрение начнем с наиболее простого и основного вопроса, а именно, с вопроса о возрастании и убывании функции.

Определение. *Функция $f(x)$ называется возрастающей на некотором промежутке, если в этом промежутке большим значениям независимой переменной x соответствуют и большие значения функции, т. е. если*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0 \text{ при } \Delta x > 0. \tag{IV.1}$$

Если же

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) < 0 \text{ при } \Delta x > 0, \tag{IV.2}$$

то функция называется убывающей.

Разделив (IV.1) и (IV.2) на $\Delta x > 0$ и переходя к пределу в данной точке, согласно формуле (III.34) находим, что на участках возрастания

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \geqslant 0, \tag{IV.3}$$

а на участках убывания

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \leqslant 0. \tag{IV.4}$$

Этот же результат можно получить, исходя из геометрических представлений. Если обратимся к графику функции, то промежутки возрастания будут соответствовать тем частям графика, на которых большим абсциссам соответствуют и большие ординаты. Наоборот, промежуткам убывания соответствуют части кривой, опускающейся при движении вдоль кривой слева направо. На рис. 113 части графика AB и CD соответствуют промежуткам возрастания, а часть BC — промежутку убывания.

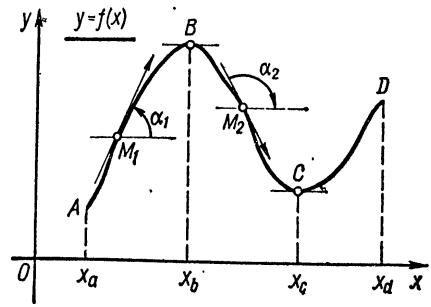


Рис. 113.

Из рисунка непосредственно ясно, что в любой точке M_1 промежутка возрастания касательная образует с направлением оси абсцисс острый угол $\alpha = \alpha_1$, отсчитываемый от оси Ox до касательной, тангенс которого положителен. Но согласно формуле (III.39) $\operatorname{tg} \alpha_1$ и есть производная заданной функции $f'(x)$. Наоборот, в любой точке M_2 на участке убывания касательная образует с осью абсцисс тупой угол $\alpha = \alpha_2$, тангенс которого отрицателен, т. е. для этого случая $f'(x)$ будет величиной отрицательной. Сопоставляя полученные результаты, мы можем их

сформулировать в виде следующего признака: *те промежутки, на которых* $f'(x)>0$, *суть промежутки возрастания функции, а те промежутки, на которых* $f'(x)<0$, *суть промежутки убывания функции*, что и зафиксировано в формулах (IV.3) и (IV.4).

Таким образом, производная $\frac{dy}{dx}=f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$ определяет собой скорость роста функции, а ее знак — возрастание или убывание функции, т. е. направление изменения хода функции. Так, представленная на рис. 114 функция монотонно возрастает, но в точках M_1 и M_5 ее рост будет более быстрым, чем в точках M_2 и M_4, поскольку углы α_1 и α_5 больше, чем углы α_2 и α_4 соответственно, а большему острому углу соответствует и большее значение тангенса, т. е. производной. В точке M_3, для которой $\alpha_3=0$ и, следовательно, $f'(x)=0$, рост функции прекращается и ее график имеет горизонтальный участок, совпадающий в этой точке с графиком функции $y=C=\text{const}$.

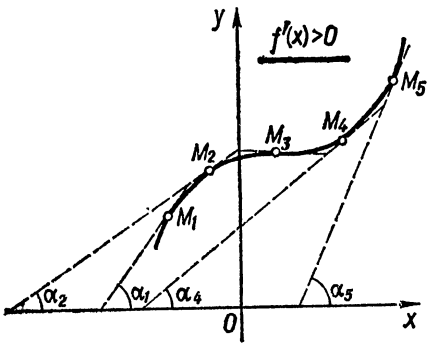


Рис. 114.

Точка, в которой $f'(x)=0$, называется *стационарной*. В стационарной точке изменение функции как бы останавливается: скорость этого изменения (равная производной) обращается в нуль.

В данном случае, пройдя через стационарную точку M_3, функция снова начинает расти, в то время как точки B и C (см. рис. 113), в которых производная также обращается в нуль, разделяют собою участки возрастания и убывания, на чем мы более подробно остановимся в следующем параграфе. На рис. 115 представлен график функции, монотонно убывающей на всем рассматриваемом сегменте $[a, b]$.

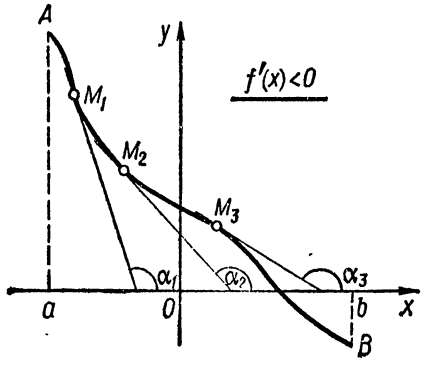


Рис. 115.

Пример 1. Определить промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4.$$

Решение. Находим производную данной функции

$$f'(x)=x^2-2x=x(x-2).$$

Надо определить, при каких значениях аргумента x производная положительна и при каких — отрицательна. Легко видеть, что произведение $x(x-2)$ при всех значениях $x<0$ положительно, так как x и разность $x-2$ будут тогда одного знака. При x положительном, но меньшем двух производная отрицательна, а при $x>2$ она снова становится положительной. Следовательно, функция в промежутке $-\infty<x<0$ возрастает, в промежутке $0<x<2$ убывает и в промежутке $2<x<+\infty$ возрастает. Точки с абсциссами $x=0$ и $x=2$, в которых $f'(x)=0$, суть стационарные точки данной функции и касательные к ее графику в этих точках параллельны оси абсцисс.

На рис. 116 показан график данной функции (сплошная линия) и график ее производной (пунктирная линия), а в табл. 9 приведены некоторые значения функции и ее производной. Графиком производной $f'(x)=x^2-2x$ является парабола, пересекающая ось абсцисс в точках $x=0$, $x=2$ и имеющая вершину в точке $(1; -1)$. Знание производной позволяет определить уклон касательной в каждой

точке графика функции $y = f(x)$, что очень наглядно показывает ход кривой и облегчает построение графика. Например, в точке кривой $y = f(x)$ с абсциссой $x = 1$ касательная параллельна биссектрисе второго и четвертого координатных углов $y = -x$, так как в этой точке уклон касательной $k = f'(x) = -1$.

Таблица 9

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
$f(x)$	$-2\frac{2}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	$+4$	$+3\frac{1}{3}$	$+2\frac{2}{3}$	$+4$	$+9\frac{1}{3}$
$f'(x)$	$+8$	$+3$	0	-1	0	$+3$	$+8$

Пример 2. Показать, что функция

$$f(x) = 1 + x - \sin x$$

монотонно возрастает на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$.

Решение. Производная заданной функции

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

всюду не отрицательна и обращается в нуль при $x = \pm 2n\pi$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, так как в этих точках $\cos x = 1$. Следовательно, функция $y = f(x)$ на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$ монотонно возрастает, а точки с абсциссами $x = \pm 2n\pi$ являются ее стационарными точками, в которых касательная параллельна оси Ox. На рис. 117 представлен график данной функции

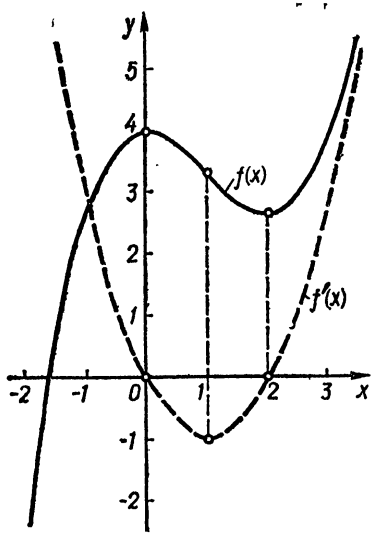


Рис. 116.

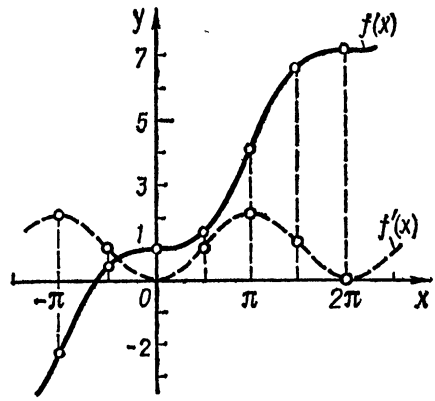


Рис. 117.

и график ее производной, а в табл. 10 приведены некоторые значения $f(x)$ и $f'(x)$. Заметим, что при $x = \pm(2n+1)\pi$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ производная принимает свое максимальное значение $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = 2$, значит, касательная в этих точках будет иметь максимальный уклон $k = \operatorname{tg}\alpha = 2$, т. е. это будут точки наиболее быстрого роста функции $y = f(x)$. При $x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ касательная параллельна биссектрисе первого и третьего координатных углов $y = x$ с уклоном $k = f'(x) = 1$. Аналогичным путем можно найти уклон касательной в любой точке

и в соответствии с этим построить небольшой участок графика функции $y = f(x)$. Таким образом, если известна одна точка функции $y = f(x)$ и производная $f'(x)$, то мы можем построить точка за точкой весь график этой функции, но это относится уже к задаче интегрального исчисления. Отметим только, что одну исходную точку графика функции $[x_0; f(x_0)]$ надо знать обязательно, так как функции $f(x)$ и $F(x) = f(x) \pm C$ в соответствии с формулой (III.41) имеют одну и ту же производную

$$F'(x) = [f(x) \pm C]' = f'(x).$$

Таблица 10

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{3}{2}\pi$	$\pm 2\pi$
$\sin x$	0	-1	0	± 1	0	-1	0
$\cos x$	-1	0	$+1$	0	-1	0	± 1
$f(x)$	$-2{,}14$	$\pm 0{,}43$	$\pm 1{,}00$	$+1{,}57$	$\pm 4{,}14$	$+6{,}71$	$\pm 7{,}28$
$f'(x)$	± 2	± 1	0	± 1	± 2	± 1	0

Упражнения

1. Доказать, что функция $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$ возрастает на участке $-\infty < x < 0$, убывает на участке $0 < x < +\infty$, а при $x = 0$ имеет стационарную точку.

2. Доказать, что функция $f(x) = x^3$ монотонно возрастает на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$ и имеет одну стационарную точку с абсциссой $x = 0$.

3. Исследовать, на каких участках сегмента $[0,2\pi]$ функция $f(x) = \cos x$ возрастает, а на каких убывает. Построить рисунки для всех трех упражнений по образцу рис. 116 и 117.

§ 42. Максимум и минимум функции. Экстремальные точки кривой

Определение 1. *Функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x = x_{\max}$, если при всех значениях аргумента x, достаточно близких к $x_{\max}$, выполняется неравенство*

$$f(x_{\max}) > f(x).$$

Определение 2. *Функция $f(x)$ имеет минимум в точке $x = x_{\min}$, если при всех значениях аргумента x, достаточно близких к $x_{\min}$, выполняется неравенство*

$$f(x_{\min}) < f(x).$$

Наименования «максимум» и «минимум» объединяют общим термином «экстремальные значения», или, короче, «экстремумы»*.

На графике некоторой функции (рис. 118) имеем последовательное чередование промежутков возрастания и убывания функции. Дуга AM_1 соответствует промежутку возрастания, следующая за ней дуга M_1M_2 — промежутку убывания, после чего снова идет промежуток возрастания M_2M_3 и т. д. Те точки кривой, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, являются вершинами кривой. Так, например, ордината точки $x = x_1$, равная $y_1 = f(x_1)$, больше ординат соседних, достаточно близко расположенных точек, лежащих как слева,

* По-латыни слова maximum, minimum и extremum означают: «наибольшее» «наименьшее» и «крайнее» (значение).

так и справа от нее. Следовательно, согласно определению 1, в точке $x = x_1$ функция $f(x)$ достигает своего максимума. Другой максимум функции $f(x)$ находится в точке $x = x_3$, а в точке $x = x_2$, в достаточно малой окрестности которой выполняется неравенство $f(x_2) < f(x)$, функция $f(x)$ достигает своего минимума.

Следует, однако, обратить внимание на то, что значения функции в точках максимума и минимума не являются обязательно наибольшим и наименьшим на всем сегменте $[a, b]$. Тот же рис. 118 показывает, что в данном частном случае $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ достигает наименьшего и наибольшего значения не в экстремальных точках, а при $x = a$ и $x = b$, т. е. на концах сегмента $[a, b]$. Более того, в точке $x = x_5$ функция имеет минимум, и в то же время значение $f(x_5)$ функции в этой точке больше значения $f(x_1)$ функции в точке $x = x_1$, где она имеет максимум. Поэтому фигурирующие в определении 1 и 2 максимум и минимум функции часто называют *относительным максимумом* и *относительным минимумом:* в экстремальных точках функция имеет наибольшее и наименьшее значение лишь в некоторой достаточно малой окрестности этих точек, т. е. относительно ближайших соседних точек.

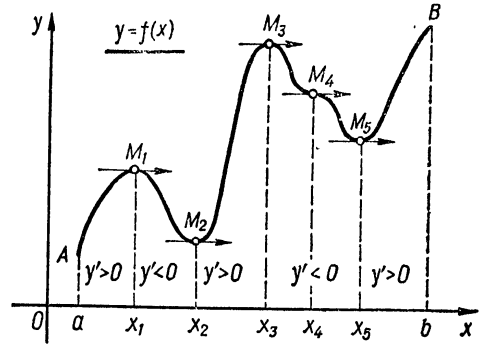


Рис. 118.

Установим теперь правило, которое позволит находить экстремумы (т. е. максимумы или минимумы) функции, непрерывной и дифференцируемой на сегменте $[a, b]$. В каждой экстремальной точке, если она не совпадает с концами a и b сегмента, производная должна равняться нулю. Данное утверждение следует из самого определения производной как предела отношения $\Delta y : \Delta x$. В самом деле, при небольшом сдвиге с точки максимума $\Delta y \leqslant 0$. Поэтому при положительных Δx отношение $\Delta y : \Delta x$ неположительно, а при отрицательных Δx отношение $\Delta y : \Delta x$ неотрицательно. Предел этого отношения, который по предположению существует, уже не может быть ни положительным, ни отрицательным и ему остается только быть равным нулю. Аналогичное рассуждение остается справедливым и для минимума функции. Графически это выражается в том, что в экстремальных точках касательная к графику горизонтальна, т. е. ее угловой коэффициент $k = f'(x)$ равен нулю. Но горизонтальной касательная может быть и не только в экстремумах кривой. Примером служат точки M_4 (см. рис. 118) и M_3 (см. рис. 114). Эти точки не являются экстремальными, но касательные в них горизонтальны. Таким образом, условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума. Другими словами, экстремальная точка $x = x_0$ обязательно должна находиться среди стационарных точек (в которых $f'(x_0) = 0$), но не каждая стационарная точка является экстремальной. Стационарную точку для $f(x)$ надо лишь отнести к точкам, прошедшим первоначальный конкурс и допущенным к дальнейшим испытаниям на экстремум.

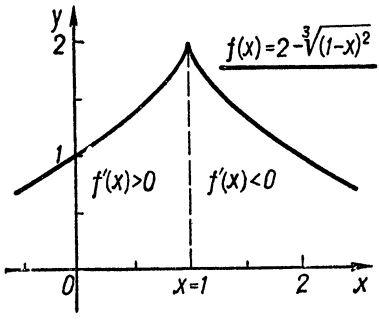


Рис. 119.

Если расширить класс рассматриваемых функций, разрешив производной в отдельных точках обращаться в бесконечность или не существовать, то не исключена возможность того, что максимум или минимум придется на некоторые из таких точек. Поэтому их тоже следует отнести к числу точек, подлежащих

испытанию на экстремум. Например, функция $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(1-x)^2} = 2 - (1-x)^{2/3}$, производная которой

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{-1/3} \cdot (-1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}$$

при $x = 1$ обращается в бесконечность, имеет в этой точке максимум (рис. 119), так как $f(1) = 2$; $f(x) < 2$ при любом x, отличном от единицы, и, следовательно, в полном соответствии с определением 1

$$f(x_{\max}) > f(x) \text{ для } x_{\max} = 1.$$

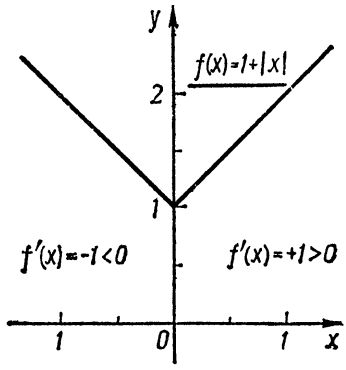


Рис. 120.

Аналогично функция $f(x) = 1 \mp |x|$, производная которой в точке $x = 0$ терпит разрыв (в этой точке существуют только односторонние касательные), имеет в этой точке минимум, поскольку $f(x) = 1$ при $x = 0$, тогда как для всякой точки x, отличной от нуля, имеем $f(x) > 1$ (рис. 120). Экстремальной будет также точка M для функции, график которой представлен на рис. 105.

Итак, функция может иметь экстремум лишь в двух случаях: либо в тех точках, где производная существует и равна нулю, либо в тех точках, где она принимает бесконечное значение или не существует (см. § 33).

Заметим, что если производная не существует в какой-либо точке (но существует в близлежащих точках), то в этой точке производная терпит разрыв. Например, для всюду непрерывной функции

$$y = |x| = \begin{cases} +x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases} \qquad \text{(IV.5)}$$

производная будет разрывной, так как

$$y'(x) = +1 \text{ при } x > 0$$

и

$$y'(x) = -1 \text{ при } x < 0.$$

Полученные результаты можно объединить и представить в виде одной формулы

$$y'(x) = \{|x|\}' = \frac{x}{|x|}. \qquad \text{(IV.6)}$$

Такую же производную, график которой был представлен на рис. 93, будет иметь и рассмотренная выше функция $f(x) = 1 \mp |x|$, так как согласно формулам (III.43) и (III.41)

$$f'(x) = \{1 \mp |x|\}' = \{|x|\}' = \frac{x}{|x|}.$$

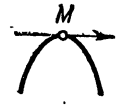
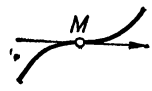
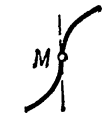
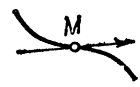
Значения аргумента, при которых производная обращается в нуль или в бесконечность либо терпит разрыв, называются ***критическими точками.***

Из предыдущего следует, что не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Однако обратное утверждение справедливо всегда: *если в какой-либо точке функция достигает максимума или минимума, то эта точка наверняка является критической.* Поэтому для разыскания экстремума функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем, исследуя отдельно

каждую из них, выясняют, будет ли в этой точке максимум либо минимум или же экстремума вообще не будет. Само исследование выполняют по такой схеме:

1) находят $f'(x)$ и все критические точки $x = x_0$, для чего определяют корни уравнения $f'(x) = 0$, а также находят точки, в которых $f'(x) = \infty$ или в которых $f'(x)$ терпит разрыв; 2) подставив в производную $f'(x)$ каждую из критических точек $x = x_0$, устанавливают знак производной в окрестности точки x_0 слева и справа от нее. Если знак производной $f'(x)$ меняется с «+» на «—», то в соответствующей точке функция имеет максимум, если с «—» на «+», то — минимум, если же перемены знака нет, то в такой точке нет и экстремума.

Таблица 11

Знаки или значение производной $f'(x)$			Поведение функции $y = f(x)$	Вид графика вблизи критической точки $M(x_0; y_0)$	
$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$		для $f'(x_0) = 0$	для $f'(x_0) = \pm\infty$
«+»	$f'(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$	«—»	Максимум		
«—»	То же	«+»	Минимум		
«+»	То же	«+»	Монотонное возрастание		
«—»	То же	«—»	Монотонное убывание		

Для более полного обозрения все эти результаты объединены в табл. 11. В дополнение к таблице заметим, что поскольку между каждыми двумя критическими точками производная сохраняет знак неизменным, то для определения знака $f'(x)$ в каждом из таких промежутков достаточно определить этот знак при каком-нибудь одном частном значении x, содержащемся в данном промежутке. Далее, для функции $f(x)$, дифференцируемой во всем рассматриваемом промежутке а этот случай наиболее распространен на практике), характерным признаком экстремальной точки является то, что в ее окрестности кривая расположена по одну сторону от горизонтальной касательной, в то время как в окрестности стационарной неэкстремальной точки кривая пересекает касательную, переходя с одной ее стороны на другую. Такого рода стационарные точки называются *точками перегиба* и мы их рассмотрим в § 43. Отметим также, что рассматриваемый промежуток изменения функции $f(x)$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Решение. Находим производную данной функции и приравниваем ее нулю:

$$y' = 2 + x - x^2 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, находим, что стационарными точками являются точки $x = -1$ и $x = +2$. Других критических точек заданная функция не имеет, поскольку, являясь полиномом, она непрерывна и дифференцируема на всей действительной оси, т. е. в промежутке $(-\infty; +\infty)$. Найденные стационарные точки разделяют этот промежуток на три части:

$$(-\infty; -1), \quad (-1; 2), \quad (2; +\infty),$$

в каждой из которых производная сохраняет неизменным свой знак. Поэтому, для того чтобы испытать точки $x = -1$ и $x = +2$, нам достаточно определить знак производной $y'(x) = 2 + x - x^2 = (x+1)(2-x)$ в одной единственной точке каждого из найденных подынтервалов, например в точках $x = -2$; $x = 0$; $x = +3$, для которых $y'(-2) = -4$; $y'(0) = +2$; $y'(3) = -4$. Объединив эти результаты в первых двух строках табл. 12, мы и решаем поставленную задачу. Действительно, в окрестности первой стационарной точки $x = -1$ производная $y'(x)$ меняет знак с «—» на «+», следовательно, в этой точке функция $y(x)$ имеет минимум. Аналогичным путем убеждаемся, что в точке $x = +2$ функция $y(x)$ имеет максимум. Других экстремальных точек у заданной функции нет.

Таблица 12

x	-2	-1	0	$+2$	$+3$
$y'(x)$	«—»	0	«+»	0	«—»
$y(x)$	Убывает	min	Возрастает	max	Убывает
	$+\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{6}$	0	$+3\frac{1}{3}$	$+1\frac{1}{2}$

Если же мы хотим исследовать более подробно заданную функцию, то вычисляем ее значения в рассмотренных точках (которые приведены в нижней строке табл. 12) и строим ее график (рис. 121).

Пример 2. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = (x-1)\sqrt[3]{x^2} = (x-1)\cdot x^{2/3}.$$

Решение. Воспользовавшись формулами (III.42) — (III.44) и (III.54), находим производную:

$$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}},$$

а затем определяем критические точки. Для этого находим точки, в которых производная обращается в нуль:

$$y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0; \quad x_1 = \frac{2}{5},$$

Таблица 13

x	-1	0	$+\frac{1}{5}$	$+\frac{2}{5}$	$+1$
$y'(x)$	«+»	∞	«—»	0	«+»
$y(x)$	Возрастает	max	Убывает	min	Возрастает
	-2	0	$-0,2736$	$-0,3257$	0

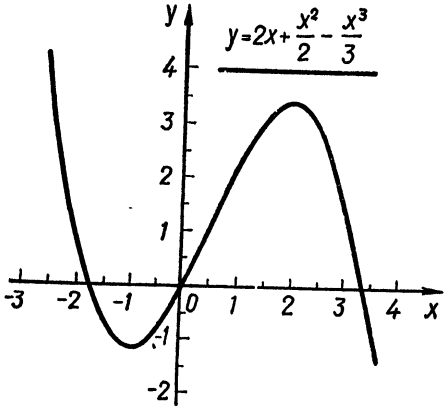


Рис. 121.

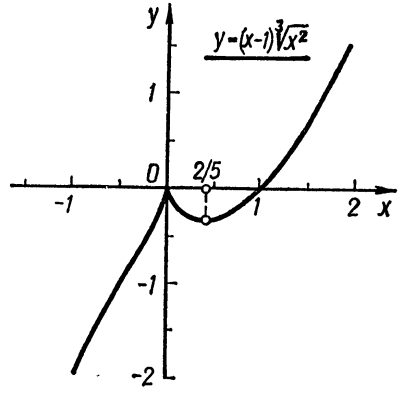


Рис. 122.

а также точки, в которых производная терпит разрыв (в данном случае обращается в бесконечность). Такой точкой будет, очевидно, точка $x_2 = 0$. Других критических точек нет. Характер поведения функции в найденных критических точках исследован в табл. 13, на основании которой заключаем, что при $x = x_2 = 0$ функция имеет максимум, а при $x = x_1 = \frac{2}{5}$ — минимум. График исследуемой функции изображен на рис. 122, а в последней строке табл. 13 приведены ее значения в некоторых точках, в том числе и в экстремальных. В частности, значение функции в точке минимума равно

$$y(x)\Big|_{x=\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5} - 1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -0,6\sqrt[3]{0,16} \approx -0,6 \cdot 0,54288 = -0,32573.$$

Пример 3. Корабль стоит на якоре в 9 *км* от пункта A (рис. 123). С корабля посылают гонца, который должен прибыть в пункт B, удаленный от пункта A на 15 *км*. В какую точку берега C должен высадиться гонец, для того чтобы время пути было минимальным, если его скорость на веслах $v_1 = 4$ *км/час*, а пешком $v_2 = 5$ *км/час*?

Решение. Обозначим длину искомого отрезка AC через x. Тогда $KC = \sqrt{(AK)^2 + x^2} = \sqrt{81 + x^2}$, и время пути t будет определяться следующим выражением:

$$t = \frac{KC}{v_1} + \frac{CB}{v_2} = \frac{\sqrt{81 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}.$$

Нам надо найти такое значение x, при котором функция $t = t(x)$ достигает своего минимума. Для этого надо найти производную функции $t(x)$ и, приравняв ее нулю, определить критические точки, а затем найти среди них точку минимума. Воспользовавшись формулами (III.42), (III.43) (III.49), (III.54) и (III.55), получаем следующее уравнение:

$$t'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{81 + x^2}} - \frac{1}{5} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{81 + x^2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}, \text{ или } 9x^2 = 16 \cdot 81,$$

так что

$$x = x_0 = \pm 12.$$

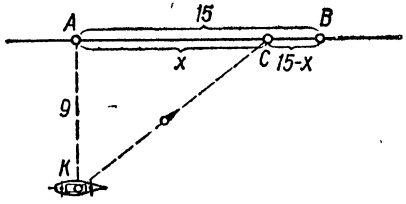


Рис. 123.

Проверив найденные точки по схеме, приведенной в табл. 11 (что читателю полезно выполнить в виде упражнения), убеждаемся, что минимуму соответствует значение $x_0 = +12$, а значение $x_0 = -12$ не удовлетворяет условиям задачи и мы его отбрасываем.

Упражнения

1. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = x^2 + 2x - 3$.

2. Показать, что функция $y = x^3$ в стационарной точке $x = 0$ экстремума не имеет. Построить также ее график.

3. Исследовать на экстремумы функцию $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$ и результаты сверить с рис. 116.

4. Найти минимальное значение функции $t = t(x_{\min})$ в примере 3 и решить его при таких данных: $v_1 = 4$ *км/час*, $v_2 = 6$ *км/час* и $v_1 = 3$ *км/час*, $v_2 = 6$ *км/час*.

5. Найти экстремумы функции $y = 2 + \sin x$ на сегменте $[0; 2\pi]$.

§ 43. Производные высших порядков. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Исследование функции на экстремум и определение его типа (максимум или минимум) во многих случаях проще выполняются не путем анализа перемены знака производной при ее прохождении через критическую точку, а другим способом. Этот способ, который мы рассмотрим в следующем параграфе, требует введения нового понятия, а именно, понятия второй производной.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$. Эта производная, в свою очередь, является функцией того же самого аргумента x, а поэтому может также иметь производную. Производная от первой производной $y' = f'(x)$ называется *второй производной*, или *производной второго порядка*, от заданной функции $y = f(x)$ и обозначается одним из следующих символов:

$$[y']' = y'', \quad [f'(x)]' = f''(x), \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производная от второй производной, если она существует, называется *производной третьего порядка*, или *третьей производной* функции $f(x)$, и обозначается

$$[y'']' = y''', \text{ или } [f''(x)]' = f'''(x), \text{ или } \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Таким же образом определяется производная *четвертого порядка* $y^{IV} = f^{IV}(x)$, *пятого порядка* $y^{V} = f^{V}(x)$ и т. д., причем для обозначения старших производных вместо штрихов применяют римские цифры — в отличие от показателя степени: y^4, y^5, ...

Производную n-го порядка обозначают $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$, или $\frac{d^n y}{dx^n}$, и она является производной от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$. Порядок производной берется в скобки, для того чтобы его нельзя было принять за показатель степени.

Если функцию обозначают одной буквой, например y, то ее последовательные производные обозначают:

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{IV},\ y^{V} = y^{(5)},\ \ldots,\ y^{(n)}.$$

Пример 1. Найти все последующие производные для полинома четвертой степени

$$y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 13.$$

Решение. Продифференцировав последовательно заданную функцию пять раз, получаем

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 6x^2 + 10x - 7, \\ y'' &= 12x^2 - 12x + 10, \\ y''' &= 24x - 12, \\ y^{IV} &= 24, \\ y^{V} &= 0, \end{aligned}$$

Все дальнейшие производные также будут нулями, поскольку производная от постоянной C, в том числе и при $C = 0$, равна нулю. Очевидно, что и для любого полинома четвертой степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

при любых значениях коэффициентов a_0, a_1, ..., a_4 производная пятого порядка будет равна нулю: $y^{V} = 0$.

Аналогично для полинома n-й степени $y = P_n(x)$ производная $(n+1)$-го порядка равна нулю:

$$y^{(n+1)} = 0.$$

Пример 2. Дана функция $y = \sin x$. Найти общую формулу для ее производной любого порядка n.

Решение. Выполнив последовательное дифференцирование, согласно формулам (III.37), (III.57) и формулам приведения для тригонометрических функций имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ y'' &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ y''' &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\ y^{IV} &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Упражнение 1. Найти первую, вторую и третью производные для функций:

$$\text{а) } y = x^3 + \sqrt{x} + 5; \quad \text{б) } y = e^x + \sin\frac{x}{2}.$$

Производные любых порядков будут применены нами в гл. VIII при рассмотрении ряда Тейлора. Сейчас же остановимся несколько подробнее на второй производной.

Вторая производная имеет простой механический смысл. Пусть

$$s = f(t)$$

есть заданный закон прямолинейного движения точки. Тогда скорость движения $v = v(t)$ этой точки в данный момент t определяется как производная пути по времени, т. е.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t). \tag{IV.7}$$

В таком случае вторая производная $s'' = s''(t)$ будет «скоростью изменения скорости», т. е. ускорением $w = w(t)$ рассматриваемой точки в данный момент времени t:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = (s')' = s''(t). \tag{IV.8}$$

Например, для случая падения тел имеем

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0, \tag{IV.9}$$

$$s' = gt + v_0,$$

$$s'' = g,$$

т. е. ускорение падающих тел для данной географической широты постоянно и для средних широт $g = 981$ *см/сек*^{2}, точнее $g = 980{,}665$ *см/сек*^{2} на уровне моря в Севре, около Парижа.

Вторая производная имеет не менее простой геометрический смысл. Аналогично тому, как по знаку первой производной можно определить, возрастает или убывает функция, так по знаку второй производной можно судить, в какую сторону изгибается линия графика функции. Другими словами, анализируя знак второй производной $y''(x)$, можем установить, на каких участках кривая $y(x)$ выпукла, а на каких она вогнута, но для этого прежде всего дадим строгое определение этим понятиям.

Определение 1. *Непрерывная кривая обращена выпуклостью вверх на интервале* (a, b), *если все точки кривой лежат выше* (точнее сказать: «не ниже») *хорды, соединяющей любые две ее точки.* Аналогично *при выпуклости вниз кривая проходит не выше своих хорд.*

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть просто выпуклой, *а обращенную выпуклостью вниз —* вогнутой.

Определение 2. *Точки, разделяющие выпуклые и вогнутые участки кривой, называются* точками перегиба.

На рис. 124 показан участок кривой, выпуклой на всем рассматриваемом интервале (a, b), а на рис. 125 — участок вогнутой кривой. Проведем на рис. 124 хорду MM_5. Как видим, все точки дуги, стягиваемой этой хордой, лежат выше хорды. Если мы, зафиксировав точку M_5, начнем перемещать точку M в любом направлении по кривой, то секущая MM_5, вращаясь вокруг точки M_5, не нарушит отмеченного свойства, какое бы положение ни заняла точка M. Только тогда, когда точка M сольется с точкой M_5 и секущая перейдет в касательную, соответствующие точки кривой будут расположены не ниже самой касательной,

точнее, они сольются с касательной, но этот случай был также оговорен в определении 1. Следовательно, кривая, изображенная на рис. 124, согласно определению 1, на всем интервале (a, b) выпуклая.

Будем теперь, двигаясь по этой кривой в сторону возрастания аргумента x, следить за изменением угла α, образуемого касательной с положительным направлением оси Ox. На участке возрастания кривой AM_3 угол α, оставаясь все время положительным, будет монотонно убывать, пока не обратится в нуль в экстремальной точке M_3. Затем угол α начнет расти по абсолютной величине,

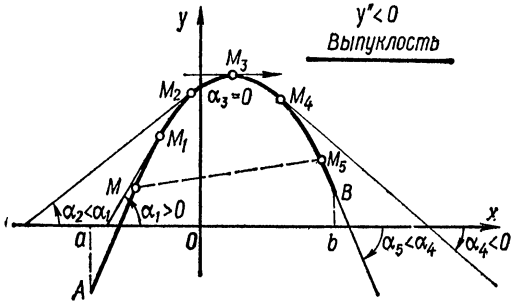


Рис. 124.

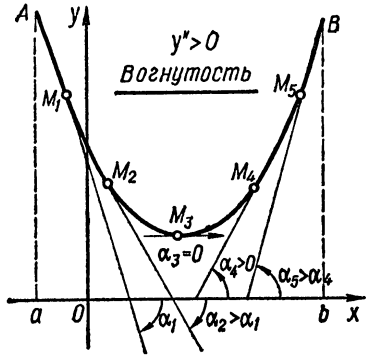


Рис. 125.

но знак его при этом станет отрицательным, и, например, для точек M_4 и M_5 будем иметь

$$\alpha_4 < \alpha_3 = 0, \quad \alpha_5 < \alpha_4 < 0.$$

Таким образом, на всем интервале (a, b) угол α монотонно убывает

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5.$$

Такое же изменение будет претерпевать и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. производная $y' = f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, так как с уменьшением угла α уменьшается и $\operatorname{tg}\alpha$. Но, как было показано в § 42, промежутки убывания функции (в данном случае $F(x) = f'(x)$) суть те промежутки, где производная рассматриваемой функции отрицательна, т. е.

$$F'(x) = [f'(x)]' = f''(x) < 0.$$

Повторив эти же рассуждения для функции, представленной на рис. 125, приходим к выводу, что на всем участке вогнутости, на котором $f'(x)$ монотонно возрастает (так как $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5$), вторая производная должна быть положительной:

$$[f'(x)]' = f''(x) > 0.$$

Кривая $y = f(x)$ может состоять и из выпуклых, и из вогнутых участков, а в разделяющих эти участки точках перегиба, кривая будет пересекать свою касательную.

На рис. 126 кривая $y = f(x)$ выпукла на участках AB и CD, а на участке BC — вогнута. Сами же точки B и C суть точки перегиба.

Подводя итог сказанному, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Кривая выпукла на тех участках, где $y'' = f''(x) < 0$, и вогнута на тех, где $f''(x) > 0$. Точки перегиба суть те ее точки, при переходе через которые $f''(x)$ меняет знак.*

Из этой теоремы путем рассуждений, аналогичных приведенным в § 42, получаем правило нахождения точек перегиба кривой: для того чтобы найти точки перегиба кривой $y = f(x)$, надо определить те значения x, при которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв (бесконечный или конечный), и исследовать

изменение знака $f''(x)$ при переходе через эти значения x, пользуясь табл. 14

Таблица 14

Точка перегиба $x = x_0$					Точки перегиба нет	
$y'' = f''(x)$	0 «+» или «—» ∞		0 «—» или «+» ∞		0 «—» или «—» ∞	0 «+» или «+» ∞
$y = f(x)$	Вогнута	Выпукла	Выпукла	Вогнута	Всюду выпукла	Всюду вогнута

Данное условие является необходимым, но не достаточным, т. е. точками перегиба $x = x_0$ могут быть только корни уравнения $y''(x) = 0$ или точки, в которых $y''(x)$ терпит разрыв, но не любая из возможных x_0 обязательно будет точкой перегиба.

Замечание. Для того чтобы легче запомнить связь между знаком второй производной и поведением кривой, приведем следующее мнемоническое «правило дождя»: дождь, падающий на график кривой, рассеивается на выпуклых участках, на которых $y''(x)$ отрицательна, и собирается на вогнутых участках, на которых $y''(x)$ положительна (см. рис. 126).

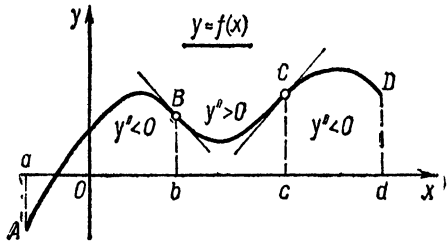


Рис. 126.

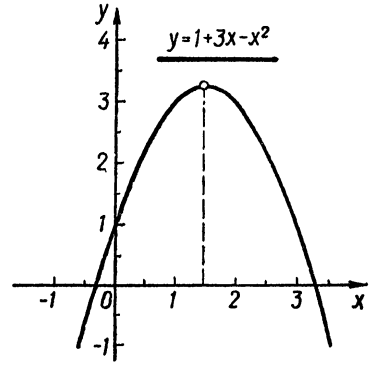


Рис. 127.

Пример 3. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривую, заданную уравнением

$$y = 1 + 3x - x^2.$$

Решение. Вторая производная

$$y'' = -2 < 0$$

отрицательна при всех значениях x. Следовательно, кривая всюду обращена выпуклостью вверх, т. е. всюду выпукла (рис. 127). В точке $x = 1{,}5$, в которой $y' = 3 - 2x$ обращается в нуль, рассматриваемая кривая достигает своего максимума.

Аналогичным путем легко показать, что квадратичная парабола

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad y'' = 2a_2 = \text{const}$$

при любых значениях коэффициентов a_0 и a_1 будет кривой всюду выпуклой (при $a_2 < 0$) или всюду вогнутой (при $a_2 > 0$). Если $a_2 = 0$, парабола переходит в прямую $y = a_0 + a_1 x$, т. е. в линию с постоянным уклоном $y' = a_1 = \text{const}$.

Пример 4. Исследовать на вогнутость и выпуклость кривую, уравнение которой $y = e^x$.

Решение. Продифференцировав дважды заданную функцию, имеем

$$y' = (e^x)' = e^x,\ y'' = e^x > 0.$$

Так как на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$ вторая производная положительна, то, следовательно, кривая всюду вогнута, т. е. обращена выпуклостью вниз (рис. 128).

Кроме того, функция $y = e^x$ на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$ монотонно возрастает и нигде не имеет экстремальных точек, так как ее первая производная $y' = e^x > 0$ (тождественно совпадающая с самой функцией и со всеми ее последующими производными) всюду положительна и нигде на конечном интервале не терпит разрыва и не обращается в нуль.

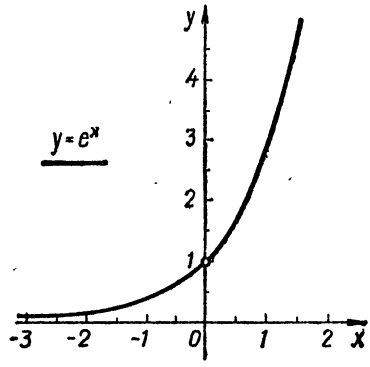


Рис. 128.

Пример 5. Найти точки перегиба и определить интервал выпуклости и вогнутости кривой Гаусса *:

$$y = e^{-x^2}.$$

Решение. Находим согласно формулам (III.49), (III.54), (III.77) первую и вторую производные:

$$y' = -2xe^{-x^2},\ y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$$

Вторая производная существует всюду. Находим значения x, при которых $y'' = 0$:

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0;\quad x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}};\quad x_2 = +\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}7071\ldots,$$

и исследуем $y''(x)$ (табл. 15) на каждом из полученных подынтервалов:

$$(-\infty;\ -\sqrt{0{,}5}),\quad (-\sqrt{0{,}5};\ +\sqrt{0{,}5}),\quad (+\sqrt{0{,}5};\ +\infty).$$

Таблица 15

x	-1	$-\sqrt{0{,}5}$	0	$+\sqrt{0{,}5}$	$+1$
$y''(x)$	«+»	0	«—»	0	«+»
$y(x)$	Вогнута	Точка перегиба	Выпукла	Точка перегиба	Вогнута
	$e^{-1} = \frac{1}{e}$	$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$	1	$e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}6065$	$e^{-1} = 0{,}3679$

* Функция $y = Ae^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, где A и σ — постоянные величины, нашла широкое применение в теории вероятностей в качестве так называемого *нормального закона распределения ошибок*. Этот закон был введен выдающимся немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (Carl Friedrich Gauss, 1777—1855) и носит его имя.

При этом, как и в § 42, достаточно определить знак второй производной в любой точке соответствующего подынтервала, расположенной левее и правее предполагаемой точки перегиба, поскольку $y''(x)$ сохраняет свой знак неизменным между соседними корнями уравнения $y''=0$ или между точками, в которых y'' терпит разрыв.

Для полноты картины исследуем также функцию $y(x)$ на экстремум. Для этого решаем уравнение

$$y' = 2xe^{-x^2} = 0, \quad x = x_0 = 0$$

и, испытав найденный корень, как описано в § 42, убеждаемся, что при $x=0$ функция Гаусса имеет максимум. На основании всех этих результатов строим график исследуемой функции (рис. 129).

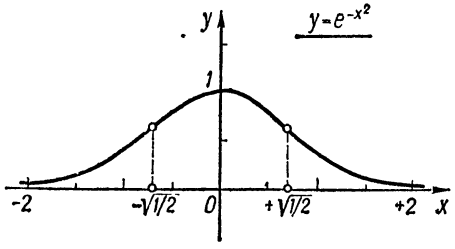


Рис. 129.

Упражнения

2. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривые, заданные уравнениями:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$;
в) $y = 2 + 3x^2 - x^3$.

3. Найти на сегменте $[0; 4\pi]$ точки перегиба функции $y = \sin x$.

4. Доказать, что для функции $y = \sqrt[3]{x-1}$, график которой представлен на рис. 106, точка $x=1$ является точкой перегиба. Определить также для этой функции интервалы выпуклости и вогнутости.

§ 44. Второй способ разыскания экстремумов функции

При первом способе исследования функции $f(x)$ на экстремум, который был изложен в § 42, определение знака $f'(x)$ в окрестности испытуемой точки $x=x_0$ может приводить к значительным трудностям, особенно в более сложных примерах. Во многих случаях этого можно избежать, если ввести в рассмотрение вторую производную.

Предположим, что точка $x=x_0$ стационарная:

$$f'(x_0) = 0$$

и что функция $f(x)$ имеет не только первую производную $f'(x)$ в окрестности этой точки, но и вторую производную $f''(x_0)$ в самой точке x_0. В таком случае все испытание может быть сведено к рассмотрению знака второй производной $f''(x_0)$ при дополнительном предположении, что $f''(x_0)$ отлична от нуля. Действительно, если $f''(x_0)<0$, то точка с абсциссой $x=x_0$ лежит на выпуклой части графика, если же $f''(x_0)>0$ — то на вогнутой его части (см. § 43). Следовательно, в первом случае имеет место максимум, во втором — минимум, поскольку сама точка $x=x_0$ по предположению является стационарной, так что необходимое условие экстремума выполнено.

Таким образом, мы приходим ко второму способу испытания на экстремум значения x_0: *подставляем x_0 во вторую производную $f''(x)$, и если при этом $f''(x_0)<0$, то функция имеет максимум, если же $f''(x_0)>0$ — то минимум.* Если, наконец, при подстановке $x=x_0$ в выражение $f''(x)$ мы получим нуль или бесконечность, т. е. $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)=\infty$, то вторая производная не дает возможности исследовать значение $x=x_0$ и приходится обращаться к непосредственному исследованию знака $f'(x)$ или к старшим производным, на чем остановимся позже. В итоге получаем схему исследования, приведенную в табл. 16.

Таблица 16

x	$f'(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
x_0	0	«—» «+» 0 | ∞	Максимум Минимум Способ неприменим

Таблица 17

x	-1	$+1$	$+2$
$f'(x)$ $f''(x)$	0 «+»	0 «—»	0 «+»
$f(x)$	min $-5\frac{3}{4}$	max $+2\frac{1}{4}$	min $+1$

Отметим также, что второй способ имеет, вообще говоря, более узкий круг применимости: он, например, кроме уже отмеченных случаев явно не применим к тем точкам, в которых первая производная терпит разрыв, ибо в таких точках о второй производной не может быть и речи.

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1.$$

Решение. Находим точки, которые обращают в нуль первую производную:

$$f'(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 3(x^2 - 1)(x - 2) = 0,$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = +1; \quad x_3 = +2,$$

и, подставив их во вторую производную

$$f''(x) = 9x^2 - 12x - 3,$$

получаем соответственно

$$f''(-1) = +18, \quad f''(+1) = -6, \quad f''(+2) = +9.$$

Дальнейший ход исследования ясен из табл. 17.

Вычислив значения $f(x)$ в экстремальных точках, а также в трех-четырех дополнительных точках, строим график рассматриваемой функции (рис. 130).

Пример 2. Определить экстремумы и точки перегиба функции

$$y = x^{\mu}.$$

Решение. Находим первую и вторую производные искомой функции:

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu - 1)x^{\mu-2}.$$

Приравняв y' нулю, видим, что единственной критической точкой является точка $x = 0$. Но в этой точке y'' также обращается в нуль, поэтому второй способ определения экстремума неприменим и мы должны исследовать перемену знака $y'(x)$ в окрестности нуля. Если $\mu = n$ — целое четное число, то производная $y = nx^{n-1}$ суть нечетная функция, которая при переходе через точку $x = 0$ изменяет знак «—» на «+». То же будет происходить со второй

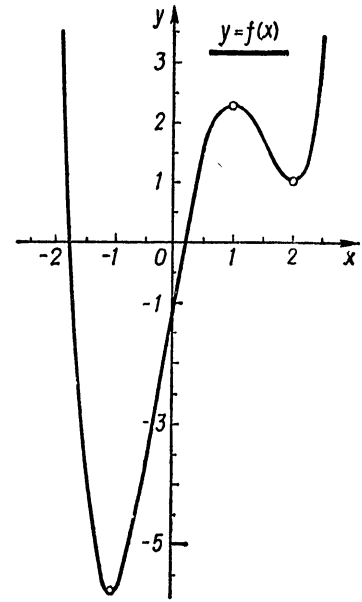


Рис. 130.

производной при нечетном n. Следовательно, точка $x=0$ есть точка минимума при $n=2, 4, 6, \ldots$ и точка перегиба при $n=3, 5, 7, \ldots$. При $n=1$ исследуемая функция переходит в прямую $y=x$ — биссектрису первого и третьего координатных углов (рис. 131). Отметим также, что все семейство кривых $y=x^{\mu}$, какое бы значение ни принимало μ, проходит через точки (0; 0) и (± 1; ± 1).

Если мы отразим график, построенный при целом $\mu=n$, в биссектрисе $y=x$, то согласно результатам § 30 получим график обратной функции. На рис. 131 пунктиром изображен график функции $y=x^{1/3}$, обратной к функции $x=y^3$. Функция $y=x^{1/3}$ в точке $x=0$ имеет точку перегиба с вертикальной касательной, поскольку при $\mu=\frac{1}{3}$

$$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};\quad y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

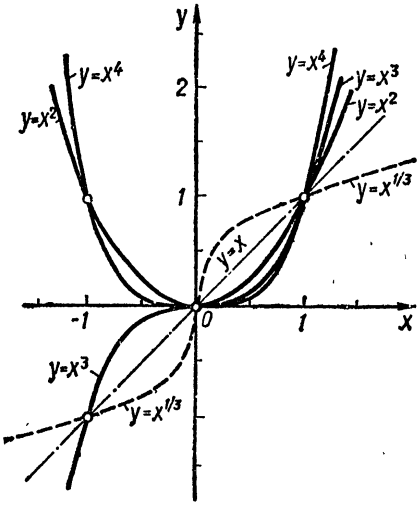


Рис. 131.

и, следовательно, $y'(0)=y''(0)=\infty$.

При целых четных значениях μ функция $y=x^{1/\mu}$, в отличие от случая нечетных μ, уже не будет иметь ни одной действительной однозначной ветви.

Упражнения

1. В дополнение к рис. 131 построить графики функций $y=x^5$, $y=x^6$ и $y=x^{1/5}$.

2. Исследовать вторым способом на экстремум функцию $y=e^{-x^2}$, рассмотренную в примере 5 § 43.

В табл. 16 случай, когда $f'(x_0)$ и $f''(x_0)$ одновременно равны нулю, остался неисследованным. Как уже отмечалось, в этом случае можно обратиться к первому способу, изложенному в § 43, но можно также воспользоваться и следующим правилом, в котором применяются старшие производные*.

Правило Маклорена. *Если из производных $f^{(n)}(x)$, не обращающихся в точке $x=x_0$ в нуль, первой оказывается производная нечетного порядка, то $f(x)$ не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума (но может иметь точку перегиба). Если же отличной от нуля является производная четного порядка, то $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум или минимум, в зависимости от того, будет ли $f^{(n)}(x)$ отрицательна или положительна.*

Например, для функции $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ точка $x=0$ является стационарной, так как в этой точке производная обращается в нуль:

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x;\quad f'(0)=1-1=0.$$

Далее имеем:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x;\quad f''(0)=1+1-2=0,$$
$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x;\quad f'''(0)=1-1=0,$$
$$f^{IV}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x;\quad f^{IV}(0)=1+1+2=4.$$

* Это правило привел в 1742 г. шотландский математик Колин Маклорен (Colin MacLaurin, 1698—1746) в своем «Трактате о флюксиях». Доказательство правила Маклорена можно найти, например, в книге Г. М. Фихтенгольца [149, т. 1, стр. 206].

Так как первой отличной от нуля является производная четного порядка, то имеем экстремум, а именно — минимум, поскольку $f^{IV}(0) > 0$.

Упражнение 3. Показать, что $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ есть четная функция, а затем, воспользовавшись таблицами, приведенными в конце книги, построить ее график на сегменте $[-1; +1]$.

§ 45. Задачи на максимум и минимум функции

Теория максимума и минимума функции широко применяется как в самой математике, так и в ее многочисленных технических приложениях.

Для задач данного типа характерным является то, что нас чаще всего интересует не само решение, а только определение $x_{экст}$. Не имея возможности более подробно остановиться на этом вопросе, решим несколько простейших задач.

Задача 1. Найти прямоугольник максимальной площади, вписанный в окружность радиуса R.

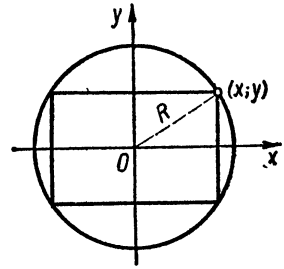


Рис. 132.

Решение. Впишем в окружность

$$x^2 + y^2 = R^2$$

прямоугольник со сторонами $2x$ и $2y$ (рис. 132). Площадь этого прямоугольника, очевидно, будет

$$S = 4xy.$$

В данном случае проще искать не максимум функции S, а максимум функции

$$z = S^2 = 16x^2y^2 = 16x^2(R^2 - x^2) = 16(R^2x^2 - x^4).$$

Найдя теперь производную функции $z = z(x)$ и приравняв ее нулю, мы и решаем поставленную задачу:

$$z' = 16(2R^2x - 4x^3) = 32x(R^2 - 2x^2) = 0,$$

$$x_1 = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 0.$$

При $x = x_1$ из уравнения окружности имеем

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

т. е. $x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, искомый прямоугольник есть квадрат со стороной $2x = R\sqrt{2}$, площадь которого

$$S = 2R^2 = S_{max}.$$

Значение $x = x_2 = 0$, при котором функция z имеет минимум, дает $S = 0$, что соответствует наименьшему положительному значению функции $S = S(x)$, поэтому мы его отбрасываем как значение, не отвечающее условиям задачи.

В том, что значения x_1 и x_2 действительно есть экстремальные для функции z, проще всего убедиться, определив знак второй производной в этих точках:

$$z'' = (z')' = 16(2R^2 - 12x^2) = 32(R^2 - 6x^2);$$

$$z''\Big|_{x=\frac{R}{\sqrt{2}}} = 32(R^2 - 3R^2) < 0; \quad z''|_{x=0} = 32R^2 > 0.$$

Таким образом, при $x = x_1$ $z' = 0$, $z'' < 0$, а при $x = x_2$ $z' = 0$, $z'' > 0$, так что согласно табл. 16 в первой точке функция z имеет максимум, а во второй — минимум.

Упражнение 1. Решить задачу 1, найдя непосредственно максимум функции

$$S = 4xy = 4x\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Доказать, что функции $S = 4xy$ и $z = S^2 = 16x^2y^2$ имеют максимумы в одной, и той же точке.

Задача 2. Отрезок $AB = a$ делится на две части точкой C и на отрезках AC и CB, как на сторонах, строится прямоугольник $ACBD$ (рис. 133). Определить наибольшее значение его площади S.

Решение. Примем в качестве аргумента x длину отрезка AC, тогда

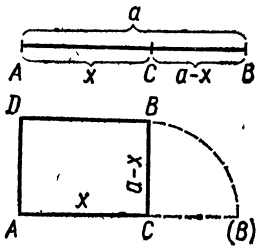


Рис. 133.

$$CB = a - x \text{ и } S = x(a - x).$$

Аргумент x непрерывной функции S изменяется в промежутке $(0; a)$.

Ищем экстремумы функции

$$S = x(a - x) = ax - x^2,$$

Решая уравнение

$$S' = a - 2x = 0,$$

находим критическое значение $x = \frac{a}{2}$. Соответствующее ему значение

$$S = \frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4},$$

являющееся единственным экстремумом (и притом максимумом, поскольку $S''(x) = -2 < 0$), будет одновременно и наибольшим значением, так как на обоих концах промежутка изменения аргумента $(0; a)$ имеем $S = 0$.

Прямоугольник $ACBD$ переменной площади всегда имеет один и тот же периметр, равный $2a$. Значит, *из всех прямоугольников данного периметра $2a$ квадрат со стороной $x = AC = BC = \frac{a}{2}$ имеет наибольшую площадь.*

Заметим, что при $x = 0$ или $x = a$ функция $S = x(a - x)$ принимает свое наименьшее значение $S = 0$ в замкнутом промежутке $[0; a]$. Но это значение не является минимумом функции S. Последняя на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$ вообще минимума не имеет, и ее графиком является парабола, ветви которой уходят в отрицательном направлении оси ординат в бесконечность.

Однако при $x = 0$ и $x = a$ мы не имеем прямоугольника в собственном смысле слова — он вырождается в отрезок AB, так что если задачу рассматривать в реальной физической постановке, то концы промежутка 0 и a надо исключить из рассмотрения, т. е. рассматривать функцию S на интервале $(0; a)$ а не на сегменте $[0; a]$.

Упражнение 2. Прямоугольный участок земли площадью 400 $м^2$ надо огородить забором. При какой форме прямоугольника длина забора будет минимальной?

Задача 3. Требуется сделать открытый цилиндрический резервуар объемом V. Стоимость материала, из которого делается дно резервуара, в m раз больше стоимости материала, идущего на его боковые стенки. При каких размерах резервуара его постройка будет наиболее дешевой?

Решение. Развернутая поверхность открытого сверху цилиндра состоит из нижнего основания $S_1 = \pi R^2$ и боковой поверхности $S_2 = 2\pi Rh$ (рис. 134). Стоимость всех затраченных материалов определится формулой*:

$$y = m\pi R^2 + 2\pi Rh.$$

Таким образом, нам надо найти минимум функции y при условии, что

$$\pi R^2 h = V.$$

Определив из этого равенства

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

и внося найденное значение в предыдущую формулу, представим y как функцию одной независимой переменной R:

$$y = m\pi R^2 + \frac{2V}{R}. \qquad \text{(IV.10)}$$

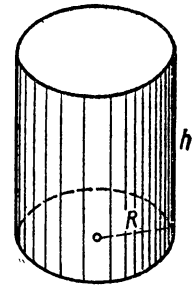


Рис. 134.

Взяв теперь производную по R и приравняв ее нулю, находим единственный корень полученного уравнения:

$$y' = 2m\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0; \quad m\pi R^3 - V = 0;$$

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{m\pi}} = \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{1/3}. \qquad \text{(IV.11)}$$

В таком случае

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{m\pi}\right)^{2/3}} = m\left(\frac{V}{m\pi}\right)^{1/3} = mR$$

и, следовательно, стоимость сооружения будет минимальной, если высота цилиндра будет в m раз превышать радиус его основания:

$$h_{\min} = mR_{\min}. \qquad \text{(IV.12)}$$

В том, что найденное $R = R_{\min}$ доставляет функции y минимум, проще всего убедиться, определив знак второй производной в критической точке:

$$y'' = \left(2m\pi R - \frac{2V}{R^2}\right)' = 2m\pi + \frac{4V}{R^3},$$

$$y''\Big|_{R=\left(\frac{V}{m\pi}\right)^{1/3}} = 2m\pi + \frac{4V}{\left(\frac{V}{m\pi}\right)} = 6m\pi > 0.$$

В заключение заметим, что при $m = 1$

$$h_{\min} = R_{\min}.$$

Так как, с другой стороны, при $m = 1$ минимальная стоимость достигается при минимальном расходе материала, то мы приходим к следующему результату. Для того чтобы изготовить открытый цилиндр заданного объема V и затратить

* В данной формуле в качестве единицы принята стоимость материала, идущего на боковые стенки. Однако саму эту единицу в рассматриваемом случае нет надобности включать в формулу, так как мы ищем минимум функции y, а не ее величину.

на это минимальное количество материала, надо высоту цилиндра взять равной его радиусу. Необходимый для этого расход материала (не учитывая запаса на изготовление швов) определяется по формулам (IV.10) и (IV.11) при $m = 1$. Например, при $V = 1\ л = 1000\ см^3$ имеем (взяв $\pi = 3{,}1416$ и ограничиваясь в окончательном результате одним десятичным знаком точности)

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \sqrt[3]{318{,}3} = 6{,}828\ см,$$

$$y = \pi R^2 + \frac{2V}{R} = 3\pi R^2 = 439{,}4\ см^2.$$

При любой другой форме цилиндра расход материала будет большим, в чем читателю полезно убедиться при помощи непосредственных вычислений.

Упражнение 3. Определить наименьшее количество жести, из которого можно изготовить цилиндрическую консервную банку объемом $V = 1\ л$. Решить задачу непосредственно, а затем по формулам (IV.10)—(IV.12), в которых надо положить $m = 2$.

В дополнение к упражнению 3 приведем следующий небольшой расчет. Банка для рыбных консервов, чаще всего, имеет размеры $R = 49\ мм$, $h = 47\ мм$. В таком случае объем $V = 354{,}5\ см^3$ при расходе материала $S_{\text{п}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{б}} = 295{,}6\ см^2$, или $w_1 = 70{,}1\ г$ (если взять жесть толщиной 0,3 $мм$ с удельным весом $\gamma = 7{,}9\ г/см^3$).

Этот же объем V можно получить, взяв

$$h_{\min} = 2R_{\min};\quad R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 3{,}835\ см.$$

При этих данных

$$S_{\text{п}} = 277{,}3\ см^2,\ \text{или}\ w_2 = 65{,}7\ г,$$

так что перерасход материала на каждой банке составит 4,4 $г$, или 4,4 $т$ остродефицитной белой жести на каждом миллионе банок. Проведя аналогичный анализ для других емкостей (различных металлических, стеклянных и пластмассовых банок, бутылок, стаканов и т. д.), легко убедиться, что за счет придания им более рациональных форм можно сэкономить до 5% материала, а иногда и больше. Так как одна наша консервная промышленность выпускает несколько миллиардов банок в год, то данная проблема заслуживает внимания.

Задача 4. [138, стр. 223, № 45]. Расход угля, $т/час$, паровым катером определяется экспериментально установленной формулой

$$z = 0{,}3 + 0{,}001v^3,$$

где v — скорость катера, $км/час$. Найти наиболее экономичную скорость катера.

Решение. Разделив z на v, вводим новую функцию

$$y = \frac{z}{v} = \frac{0{,}3}{v} + 0{,}001v^2,$$

которая определяет собой удельный расход топлива, выраженный в тоннах на один километр пути. По условию задачи надо найти такое v, при котором y имеет минимум. Для этого находим первую и вторую производные:

$$y' = -\frac{0{,}3}{v^2} + 0{,}002v;\quad y'' = \frac{0{,}6}{v^3} + 0{,}002$$

и, решив уравнение $y' = 0$, получаем ответ:

$$v_{\min} = \sqrt[3]{150} \approx 5{,}3\ км/час;\quad y''(v_{\min}) > 0.$$

Проиллюстрируем при помощи непосредственных вычислений, что найденное $v = v_{min}$ удовлетворяет условиям задачи. При $v = v_{min} = 5{,}3$ *км/час* получаем

$$y = y_{min} = \frac{0{,}3}{v} + 0{,}001v^2 = 0{,}0566 + 0{,}0281 \approx 0{,}085 \text{ т/км}.$$

При $v = 10$ или 15 *км/ч* имеем:

$$y(10) = 0{,}030 + 0{,}100 = 0{,}130 \text{ т/км};$$
$$y(15) = 0{,}020 + 0{,}225 = 0{,}245 \text{ т/км},$$

т. е. удельный расход топлива равен соответственно 153 и 288% минимального расхода y_{min}. Таким образом, пословица «тише едешь — дальше будешь» в данном случае (если в пути не пополнять запас топлива) подкрепляется расчетом.

Замечание. Подчеркнем, что в непосредственной окрестности стационарной точки исследуемая функция изменяется очень медленно. Поэтому при решении задач на экстремум часто бывает целесообразно несколько отклониться от наивыгоднейшего значения и улучшить за этот счет другие показатели. Например, при скорости $v = 6{,}0$ *км/час* $= 113\%\ v_{min}$ имеем

$$y(6{,}0) = 0{,}050 + 0{,}036 = 0{,}086 \text{ т/км} = 101\%\ y_{min},$$

т. е. перерасход топлива составит всего 1%, в то время как скорость увеличится на 13%, а следовательно, соответственно сократится и время пребывания в пути.

Задачи, в которых исследуемая функция определяется экспериментально, можно решать графически, построив по непосредственным данным измерений график этой функции и определив затем его экстремальные точки. Например, каждому автолюбителю полезно построить график удельного расхода машиной топлива как функцию скорости v, измерив непосредственно этот расход y при различных фиксированных значениях v. Имея в своем распоряжении такой график, легко определять скорость движения, которая отвечала бы тем или другим требованиям.

Задача 5. Пренебрегая сопротивлением воздуха*, в первом приближении можно считать, что движение вертикально запущенной метеорологической ракеты происходит по закону

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость, $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}. Определить, какую надо придать ракете начальную скорость v_0, для того чтобы она поднялась на высоту 200 *км*.

Решение. Высота подъема ракеты совпадает с максимальным значением $h = h_{max}$. Поэтому, найдя производную и приравняв ее нулю, имеем

$$h' = v_0 - gt = 0;\ v_0 = gt_{max};\ h'' = -g < 0.$$

Отсюда

$$t_{max} = \frac{v_0}{g},$$

так что, внося это значение в исходное уравнение, получаем

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

и, следовательно,

$$v_0 = \sqrt{2gh_{max}} = \sqrt{400000g} = 200\sqrt{g} \approx 626 \text{ м/сек}.$$

* Эту задачу с учетом сопротивления воздуха мы рассмотрим в § 117 гл. IX.

Задача 6. [66. т. I, стр. 195]. Закон преломления. Пусть даны две точки A и B по разные стороны от оси x. Какой путь ведет в самое короткое время из точки A в точку B, если скорость по одну сторону от оси x равна c_1, а по другую сторону равна c_2?

Решение. Ясно, что этот «кратчайший путь» должен состоять из двух прямолинейных отрезков, которые смыкаются в некоторой точке P оси x. При обозначениях рис. 135 длины отрезков PA и PB равны соответственно

$$\sqrt{h_1^2 + x^2} \text{ и } \sqrt{h_2^2 + (a-x)^2},$$

и время, необходимое для прохождения пути APB, определяется делением этих длин на соответствующие скорости. Таким образом, это время равно

$$f(x) = \frac{1}{c_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

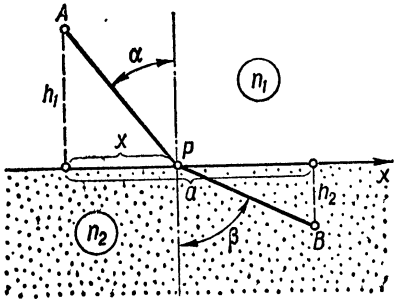


Рис. 135.

Отсюда, дифференцируя, получаем

$$f'(x) = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{h_1^2}{\left(h_1^2 + x^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{c_2}\cdot\frac{h_2^2}{\left[h_2^2 + (a-x)^2\right]^{3/2}}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$, т. е.

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{1}{c_2}\cdot\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}},$$

как легко видеть из чертежа, эквивалентно условию

$$\frac{1}{c_1}\sin\alpha = \frac{1}{c_2}\sin\beta,$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Физический смысл рассматриваемой задачи вытекает из принципа кратчайшего времени распространения света. Луч света проходит между двумя точками тот путь, для которого требуется наименьшее время. Если c_1 и c_2 означают скорости света по обе стороны плоскости раздела двух оптических сред, то путь светового луча должен определяться формулой (IV.13), так что мы получили закон преломления, установленный голландским астрономом, математиком и физиком Виллебрордом Снеллиусом (Willebrord Snellius, или Snel van Royen, 1580 — 1626).

Так как скорости распространения света c_1 и c_2 обратно пропорциональны коэффициентам преломления сред n_1 и n_2, то формулу (IV.13) можно также представить в следующем виде:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad \text{(IV.14)}$$

т. е. *отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β есть величина, постоянная для двух данных сред**.

* Независимо от Снеллиуса этот же закон был сформулирован в 1637 г. Рене Декартом.

Для полной строгости надо еще доказать, что P есть единственная точка, удовлетворяющая условию задачи, и что в этой точке, действительно, функция $f(x)$ достигает своего минимума. Все это читателю будет полезно выполнить самостоятельно в виде упражнения.

Упражнения*

4. Среди всех прямоугольников, имеющих данную площадь, требуется найти прямоугольник с наименьшим периметром.

5. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник наибольшей площади.

6. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, который имеет наибольший объем.

7. Из всех цилиндров, вписанных в шар радиуса R, найти тот, который имеет наибольший объем.

8. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Дан периметр окна. Каким должно быть соотношение между его шириной и высотой, чтобы количество света, пропускаемое окном (т. е. его площадь), было наибольшим?

9. Разбить число 12 на два слагаемых, произведение которых имело бы максимальное значение.

10. Разбить число 10 на два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

11. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

12. Сечение шлюзового канала имеет вид прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 4,5 *м*. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь?

13. Прочность прямоугольной балки пропорциональна произведению ширины ее на квадрат высоты. Найти размеры наиболее прочной балки, которую можно вырезать из цилиндрического бревна диаметром a, *см*.

14. Из квадрата со стороной a сделана открытая прямоугольная коробка высотой x (рис. 79). При каком значении x объем коробки $V=x(a-2x)^2$ будет максимальным?

15. На параболе $y^2=2x$ найти точку, ближайшую к точке $A(3;\ 0)$.

§ 46. Уравнение касательной и нормали к кривой. Дифференцирование неявных функций

С помощью производной легко решить важную задачу аналитической геометрии — задачу о нахождении касательной к кривой $y=f(x)$. Координаты точки касания M считаются заданными: $x=x_0$, $y=y_0=f(x_0)$.

Найти касательную это значит найти ее уравнение — уравнение прямой, проходящей через точку касания. Уравнение любой прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0;\ y_0)$, согласно формуле (I.17) § 8 можно написать в виде

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Для того чтобы найти уравнение касательной, остается определить ее угловой коэффициент k. Но в § 32 гл. III было установлено, что угловой коэффициент касательной равен производной функции $f(x)$ в рассматриваемой точке

$$k=\frac{dy}{dx}=f'(x_0).$$

Объединяя эти результаты, получаем уравнение касательной к кривой $y=f(x)$:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad \text{(IV.15)}$$

Пример 1. Найти уравнение касательной к кубической параболе $y=x^3$ в точке $M(2;\ 8)$.

* Часть из приводимых ниже упражнений заимствована нами из [41; 66, т. I; 69; 138].

Р е ш е н и е. В данном случае $x_0 = 2$; $y_0 = x_0^3 = 8$. Продифференцировав уравнение заданной кривой, имеем

$$y' = 3x^2;\ y'|_{x=2} = f'(x_0) = 6.$$

Следовательно, согласно (IV.15) искомое уравнение касательной есть

$$y - 8 = 6(x - 2),\ \text{или}\ y = 6x - 4.$$

Положив в найденном уравнении $x = 0$, получаем $y = -4$, т. е. касательная проходит также через точку $(0; -4)$. По этим двум точкам — заданной точке $(2; 8)$ и точке пересечения касательной с осью ординат $(0; -4)$ — проще всего построить искомую касательную.

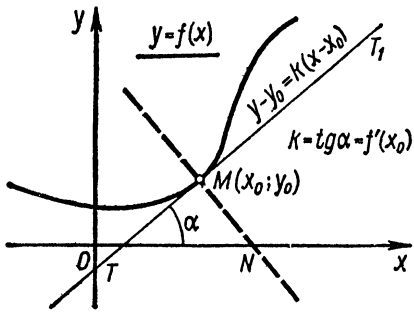


Рис. 136.

У п р а ж н е н и е 1. Найти уравнение касательной к параболе четвертой степени $y = x^4 - 2x + 3$ в точке $M(1; 2)$.

Нормалью (от лат. *normalis* — прямой) *к линии* $y = f(x)$ *в точке* $M(x_0; y_0)$ *называется прямая, проходящая через* M *перпендикулярно к касательной в этой точке* (рис. 136).

Воспользовавшись условием перпендикулярности прямых (I.22), выведенным в § 10 гл. I, из (IV.15) получаем уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad \text{(IV.16)}$$

П р и м е р 2. Найти уравнение нормали к синусоиде $y = \sin x$ в точке $M(\pi; 0)$.

Р е ш е н и е. Продифференцировав уравнение заданной кривой и учтя, что $x_0 = \pi$, $y_0 = \sin\pi = 0$, имеем

$$y' = \cos x;\ y'|_{x=\pi} = f'(x_0) = \cos\pi = -1,$$

так что согласно (IV.16) уравнение нормали есть

$$y = x - \pi.$$

Итак, искомая нормаль суть прямая, проходящая через точку $(\pi; 0)$ параллельно биссектрисе $y = x$ первого и третьего координатных углов.

У п р а ж н е н и е 2. Написать уравнения касательной и нормали к синусоиде $y = \sin x$ в точках $M_1(0; 0)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ и уравнение касательной в точке $M_3(\pi; 0)$. Построить рисунок.

Формулы (IV.15) и (IV.16) остаются справедливыми и в том случае, когда кривая задана уравнением в неявном виде.

Как уже говорилось раньше, *функция* y *от* x *называется неявной, если она определена уравнением* $F(x, y) = 0$ (или уравнением, сводящимся к этому виду), *не разрешенным относительно* y.

Например, уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \text{или}\ F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

определяет y как неявную функцию от x. Эту функцию в данном случае можно выразить и в явном виде, разрешив уравнение $f(x, y) = 0$ относительно y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Продифференцировав y по формулам (III. 49) и (III. 55), имеем

$$y' = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

так как $\pm\sqrt{a^2-x^2} = \frac{a}{b}y$.

Однако производную неявной функции $F(x, y) = 0$ можно найти, не преобразовывая ее в явную функцию $y = f(x)$. Так в данном примере, продифференцировав по x непосредственно обе части уравнения эллипса и считая при этом y функцией x, получаем по правилу дифференцирования сложной функции (III.49):

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\cdot y' = (1)' = 0.$$

Отсюда

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

что полностью совпадает с предыдущим результатом.

Рассмотрим еще один пример неявной функции от x:

$$x^5 + \sin y = xy^2,$$

в котором выразить y в явном виде через элементарные функции невозможно.

Дифференцируя по x обе части этого равенства в предположении, что y есть функция от x и учтя, что согласно (III. 44) и (III.49) $(xy^2)' = y^2\cdot(x)' + x\cdot(y^2)' = y^2 + 2xyy'$, получаем

$$5x^4 + y'\cos y = y^2 + 2xyy',$$

откуда

$$y' = \frac{5x^4 - y^2}{2xy - \cos y}.$$

Из рассмотренных примеров вытекает следующее правило дифференцирования неявной функции.

Для того чтобы получить производную y' неявной функции y от x, определяемой равенством $F(x, y) = 0$, надо продифференцировать по x обе части этого равенства, считая y сложной функцией от x. Так как производная от любой постоянной C, в том числе и при $C = 0$, равна нулю, то в результате получаем новое равенство

$$\{F(x, y)\}' = (0)' = 0,$$

связывающее x, y и y'. Разрешая полученное уравнение относительно y', мы и находим искомую производную. Она будет выражена через x и y. Таким образом, для того чтобы вычислить значение производной от функции заданной неявно, надо не только задать значение независимого переменного $x = x_0$, но и знать значение функции y в этой точке, для чего надо уметь находить корни $y = y_0$ уравнения $F(x_0, y) = 0$. На последнем вопросе мы остановимся в гл. VII.

Если неявная функция задана уравнением*

$$\varphi(x, y) = \psi(x, y), \qquad \text{(IV.17)}$$

то производную находим из нового уравнения, полученного дифференцированием по x обеих частей исходного уравнения:

$$\{\varphi(x, y)\}' = \{\psi(x, y)\}'. \qquad \text{(IV.18)}$$

Упражнение 3. Определить производную y' для такой неявной функции:

$$x^5 - y^5 = xy + 2.$$

* Это уравнение легко привести к предыдущему случаю, представив его в виде

$$F(x, y) = \varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0.$$

Выведенное правило дифференцирования неявных функций позволяет более детально изучать эти функции и, в частности, определять их экстремумы, на чем мы еще остановимся в § 49. Возвращаясь же к основной теме данного параграфа, приведем в табл. 18 уравнения касательной и нормали к кривым второго порядка

Таблица 18

Кривая	Уравнение кривой	Уравнение касательной	Уравнение нормали
Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$	$\frac{x-x_0}{b^2x_0}=\frac{y-y_0}{a^2y_0}$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$	$\frac{x-x_0}{b^2x_0}=\frac{y_0-y}{a^2y_0}$
Парабола	$y^2=2px$	$y_0y=p(x+x_0)$	$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y_0-y}{y_0}$

В качестве пояснения к табл. 18 остановимся на выводе уравнений касательной и нормали к эллипсу, а остальные формулы читатель легко выведет сам, если он усвоил предыдущий материал.

Дифференцируя уравнение эллипса, мы уже нашли производную

$$y'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

которая в точке $M(x_0;\ y_0)$ принимает следующий вид:

$$y'|_{x=x_0}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}.$$

Подставив это значение $y'(x_0)=f'(x_0)$ в уравнение касательной (IV.15), имеем

$$y-y_0=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$

или

$$b^2x_0x+a^2y_0y=b^2x_0^2+a^2y_0^2.$$

Разделив обе части полученного равенства на a^2b^2, приходим к искомому результату:

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

так как точка $M(x_0;\ y_0)$ по условию лежит на эллипсе и поэтому x_0 и y_0 должны удовлетворять его уравнению, т. е. должно иметь место равенство

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$$

Подставив это же значение $f'(x_0)=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ в (IV.16), получаем уравнение нормали к эллипсу, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$:

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0),\ \text{или}\ \frac{x-x_0}{b^2x_0}=\frac{y-y_0}{a^2y_0}.$$

В случае окружности, как отмечалось в § 15 гл. II, $a = b$ и уравнение нормали принимает следующий вид:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x,$$

т. е. нормалью к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M(x_0; y_0)$ является прямая, проходящая через ее центр (0; 0).

Отсюда непосредственно получаем известную теорему элементарной геометрии: *касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному через точку касания.*

§ 47. Кривизна и соприкасающаяся окружность

Наиболее естественное представление об искривлении линии мы получим, если будем при движении по кривой следить за изменением угла α, который образует касательная с осью абсцисс. Из двух дуг одинаковой длины более искривленной будет та дуга, для которой касательная повернется на больший угол, т. е. для которой приращение $\Delta\alpha$ будет бо́льшим. Как было установлено в гл. III, скорость изменения какой-либо функции характеризуется ее производной. В таком случае *вторая производная, являясь производной от производной,* определяет собой скорость изменения тангенса угла наклона касательной к оси абсцисс, т. е. скорость изменения кривизны. Уточним это понятие, для чего введем «эталон кривизны». В качестве последнего наиболее естественно взять окружность, которая касается данной кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$. Очевидно, что таких окружностей можно построить сколько угодно, если их центры брать на нормали к кривой, проходящей через точку M (рис. 137).

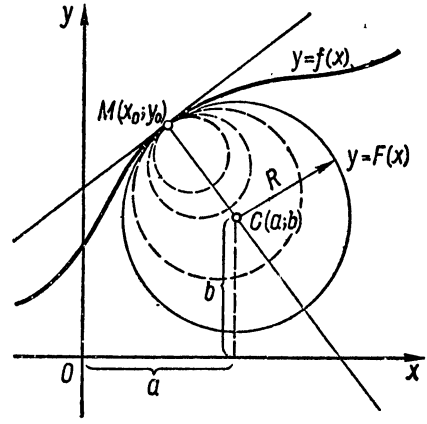


Рис. 137.

Для того чтобы задачу сделать однозначной, из всех возможных окружностей выберем ту, которая наиболее близка к кривой $y = f(x)$ в окрестности точки $M(x_0; y_0)$. Окружность и кривая проходят через точку M и касаются друг друга в этой точке. Поэтому если уравнение окружности есть $y = F(x)$, то $f(x_0) = F(x_0)$ и $f'(x_0) = F'(x_0)$. Так как рассматриваемая окружность однозначно определяется тремя условиями, то потребуем, чтобы соблюдалось равенство: $f''(x_0) = F''(x_0)$. В таком случае касательные к кривой $y = f(x)$ и окружности $y = F(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ сольются в общую касательную и скорость их поворота при $x = x_0$ будет одинакова. Естественно считать, что окружность, удовлетворяющая всем перечисленным выше требованиям, а именно, окружность, центр которой расположен на нормали со стороны вогнутости и для которой

$$\left.\begin{aligned} F(x_0) &= f(x_0), \\ F'(x_0) &= f'(x_0), \\ F''(x_0) &= f''(x_0), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV.19)}$$

будет наиболее близкой к кривой $y = f(x)$. По аналогии с касательной такую окружность называют *соприкасающейся окружностью**, а ее радиус R называют

* В литературе соприкасающуюся окружность часто называют также *кругом кривизны*, употребляя в этом контексте слово «круг» привычным образом в смысле «окружность».

радиусом кривизны кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$. Величину, обратную радиусу кривизны

$$K = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{1}{K}, \tag{IV.20}$$

называют *кривизной кривой* в данной точке $M(x_0; y_0)$. Действительно, величины K и R являются величинами обратно пропорциональными: чем меньше R, тем больше изогнута кривая, и наоборот, чем больше R, тем кривая меньше отличается от прямой, и в пределе при $R \to \infty$ кривизна $K \to 0$, так что прямую можно рассматривать как линию с нулевой кривизной.

Покажем теперь, что кривизна линии $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ и ее радиус кривизны R вычисляются по формулам

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{IV.21}$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \tag{IV.22}$$

а координаты центра кривизны $C(x_c; y_c)$ — по формулам

$$x_c = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad y_c = y \mp \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{IV.23}$$

или

$$x_c = x - R \sin \alpha, \quad y_c = y \mp R \cos \alpha, \tag{IV.24}$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = f'(x_0).$$

В этих формулах, простоты ради, под x, y, y', y'' следует понимать $x = x_0$, $y = y|_{x=x_0} = f(x_0)$, $y' = y'|_{x=x_0} = f'(x_0)$, $y'' = y''|_{x=x_0} = f''(x_0)$, а также $x_c = a$, $y_c = b$ (см. рис. 137).

Если $y'' = 0$, то кривизна равна нулю, радиус кривизны бесконечен и центра кривизны нет. Так всегда бывает, например, в точках перегиба.

Далее, поскольку R и K — величины всегда положительные, то в формулах (IV.21) и (IV.22) берем абсолютное значение второй производной $|y''|$, а корень $(1 \mp y'^2)^{3/2} = \sqrt{(1 \mp y'^2)^3}$ берем со знаком «$+$». Знаки координат центра кривизны x_c, y_c могут быть любыми, т. е. как «$+$», так и «$-$».

Для того чтобы вывести формулу (IV.22), исключим параметры a и b из уравнения окружности (см. § 14). Для этого, учтя, что y есть функция от x, продифференцируем дважды уравнение окружности. В результате имеем

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$
$$2(x - a) \mp 2(y - b) \cdot y' = (R^2)' = 0$$

или после сокращения на два

$$(x - a) \mp (y - b) \cdot y' = 0,$$
$$1 + y'^2 \mp (y - b) \cdot y'' = 0,$$

так как $R^2 = \text{const}$, $(R^2)' = 0$, $(x - a)' = 1$, $(y - b)' = y'$, а согласно формуле (III.44) производная от произведения

$$\{(y - b) \cdot y'\}' = (y - b)' \cdot y' \mp (y - b) \cdot (y')' = y' \cdot y' + (y - b) \cdot y'' = y'^2 + (y - b) y''.$$

Из двух последних равенств находим

$$y - b = -\frac{1 + y'^2}{y''},$$

$$x - a = -(y - b) y' = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}.$$

Подставив эти значения в исходное уравнение окружности, получаем

$$R^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{y'^2 (1 + y'^2)^2}{y''^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2} = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2},$$

и после извлечения корня

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

По найденному R определяем согласно (IV.20)

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Доказательство формул (IV.24) ясно из рис. 138, а эквивалентность формул (IV.23) и (IV.24) читатель легко докажет сам, учтя, что $y' = \operatorname{tg}\alpha$ и, следовательно,

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}.$$

Строго говоря, формулу (IV.22) мы вывели для окружности. Но условия (IV.19) показывают, что такое же R будет в точке $M(x_0; y_0)$ и в случае произвольной кривой $y = f(x)$, так как мы воспользовались производными только до второго порядка включительно. Но для окружности $R = \text{const}$ и $K = \frac{1}{R} = \text{const}$, т. е. *окружность есть линия постоянной кривизны*, а для кривой $y = f(x)$ эти величины изменяются, вообще говоря, от точки к точке. Изменяются также и координаты центра кривизны $a = x_C$, $b = y_C$. *Геометрическое место центров кривизны линии $y = f(x)$ называется эволютой этой линии.* Для окружности эволютой служит одна единственная точка — ее центр $(a; b)$. В общем случае уравнения (IV.23) одновременно являются параметрическими уравнениями эволюты, причем роль параметров выполняют соответственно x и y.

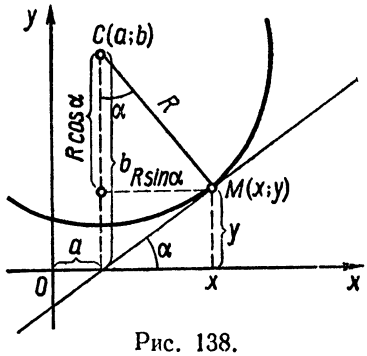


Рис. 138.

Пример 1. Определить кривизну прямой $y = ax + b$ в ее произвольной точке $M(x; y)$.

Решение. Имеем

$$y = ax + b, \quad y' = a, \quad y'' = 0.$$

Подставив эти значения в формулу (IV.21), получаем

$$K = 0.$$

Таким образом, прямая представляет собой «линию нулевой кривизны», как было отмечено выше.

Пример 2. Найти радиус кривизны и координаты центра кривизны для синусоиды $y = \sin x$ в ее произвольной точке $M(x; y)$, а также в точках $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ и $M_2(\pi; 0)$.

Решение. В данном случае

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x.$$

Подставив эти значения в (IV.22) и (IV.23), после очевидных упрощений находим

$$R = \frac{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}{|\sin x|},$$

$$x_C = x + \frac{\cos x\,(1 + \cos^2 x)}{\sin x}, \quad y_C = \sin x - \frac{1 + \cos^2 x}{\sin x}.$$

Отсюда для точки M_1, т. е. при $x=\frac{\pi}{2}$, имеем $\sin x=1$, $\cos x=0$, так что

$$R=1,\quad x_c=x=\frac{\pi}{2},\quad y_c=1-1=0.$$

При $x=\pi$ $\sin x=0$ и, следовательно, $R=\infty$, $K=0$, т. е. в точке $M_2(\pi;\ 0)$ соприкасающаяся окружность переходит в касательную $y=-x$, а сама M_2 есть точка перегиба, так как в этой точке $y''=-\sin x=0$. Аналогично в точке $M(0;\ 0)$ $R=\infty$ и соприкасающаяся окружность будет совпадать с касательной

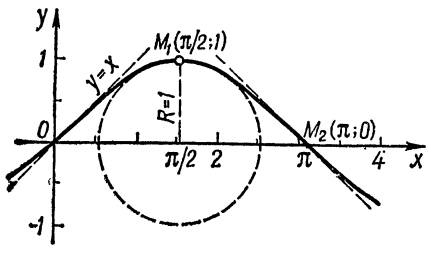


Рис. 139.

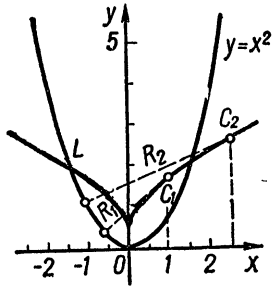


Рис. 140.

$y=x$ (рис. 139). Проанализировав полученные результаты, видим, что при $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ радиус кривизны будет монотонно убывать от $R=\infty$ до $R=1$, а при $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$ — монотонно возрастать от $R=1$ до $R=\infty$. Например, при $x=\frac{\pi}{6}$ имеем $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, так что

$$R=\frac{\left(1+\frac{3}{4}\right)^{3/2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\left(1+\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{1}{4}\sqrt{343}\approx\frac{18{,}52}{4}=4{,}63;$$

$$x_c=\frac{\pi}{6}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{7}{4}\sqrt{3}\approx 0{,}827;\quad y_c=\frac{1}{2}-\frac{1+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=-3.$$

Упражнение 1. Найти радиус кривизны и координаты центра кривизны для косинусоиды $y=\cos x$ в произвольной ее точке $M(x;\ y)$ и в точках $M_1(0;\ 1)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $M_3(\pi;\ -1)$.

Пример 3. Найти эволюту параболы $y=x^2$.

Решение. Учтя, что в данном случае $y'=2x$, $y''=2$, согласно формулам (IV.23) имеем

$$x_c=x-\frac{2x(1+4x^2)}{2}=-4x^3;\quad y_c=x^2+\frac{1+4x^2}{2}=\frac{1}{2}+3x^2.$$

Обозначив текущие координаты эволюты $X = x_c$, $Y = y_c$ и исключив параметр x из найденных уравнений для координат центра кривизны $(x_c; y_c)$, получаем искомое уравнение эволюты параболы:

$$Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}.$$

Графики параболы $y = x^2$ и ее эволюты L представлены на рис. 140. В частности, при $x = 0$ имеем

$$x_c = 0, \quad y_c = \frac{1}{2}, \quad R = y_c = \frac{1}{2}.$$

Упражнения

2. Определить радиус и центр кривизны для параболы $y = 3 - (x-2)^2$ в точках $M_1(2; 3)$ и $M_2(0; -1)$.

3. Определить радиус и центр кривизны в вершинах эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. В дополнение к результатам примера 2 определите радиус и центр кривизны для синусоиды $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{8}$; $x = \frac{\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{8}$ и по найденным точкам $(x_c; y_c)$ постройте график эволюты синусоиды на рассмотренном участке.

В заключение остановимся на вопросе о так называемых переходных кривых, применяемых при разбивке железнодорожных закруглений.

Как установлено в механике, при движении материальной точки по кривой развивается центробежная сила, величина которой определяется формулой

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

где m — масса точки, v — ее скорость, R — радиус кривизны кривой в данной точке.

Рассмотрим участок железнодорожного пути, состоящий из прямолинейного отрезка AB и дуги окружности BM радиуса r, касательной к отрезку в конце B (рис. 141). Линия ABM всюду непрерывна и всюду имеет непрерывную первую производную, так как в точке B прямая гладко сопрягается с дугой окружности, имея общую касательную в этой точке. Поэтому, на первый взгляд, кажется, что, выполнив закругление по линии ABM, мы и решим поставленную задачу. Однако это не так. В точке B радиус кривизны скачком изменится от значения $R_{BA} = \infty$ к значению $R_{BM} = r$, и поэтому сила F в точке B также будет терпеть разрыв непрерывности, мгновенно переходя от значения $F = 0$ к значению $F = \frac{mv^2}{r} \neq 0$. Такой переход вызовет резкий и сильный толчок, вредный и для подвижного состава, и для верхнего строения пути. Для того чтобы избежать этого, прямолинейную часть пути сопрягают с круговой при помощи некоторой *переходной кривой* (рис. 142), радиус кривизны которой должен постепенно убывать от бесконечного значения (в точке стыка с прямолинейной частью пути) до величины $R = r$ (в точке стыка с круговой дугой). Соответственно этому центробежная сила будет также увеличиваться постепенно.

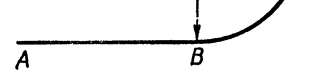


Рис. 141.

В качестве переходной кривой можно, например, воспользоваться кубической параболой

$$y = \frac{x^3}{6q},$$

которая в начале координат имеет точку перегиба. В этом случае имеем

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

так что для радиуса кривизны согласно (IV.22) получаем

$$R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{3/2}.$$

При $x = 0$ имеем $y' = y'' = 0$ и $R = \infty$, следовательно, наша кривая в точке B, принятой в качестве начала координат, касается оси абсцисс и имеет нулевую кривизну. Взяв затем какое-либо фиксированное значение $x = x_1$, мы можем так подобрать параметр q, чтобы во второй точке сопряжения B_1 соблюдалось равенство $R = r$. Для этого надо только определить q из уравнения

$$r^2 = \frac{q^2}{x_1^2}\left(1 + \frac{x_1^4}{4q^2}\right)^3.$$

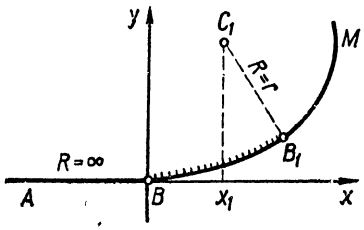


Рис. 142.

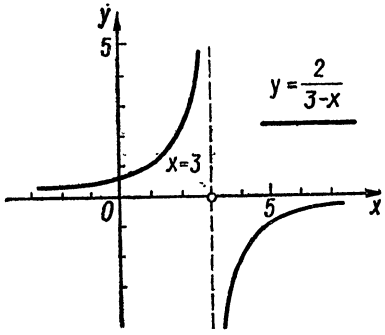


Рис. 143.

§ 48. Асимптоты

Перейдем к изучению бесконечных ветвей кривой, на которых x или y, или обе эти координаты одновременно беспредельно возрастают. Парабола и гипербола дают нам примеры кривых с бесконечными ветвями.

Асимптотой кривой с бесконечной ветвью называется такая прямая, расстояние точек которой до данной кривой при беспредельном удалении по бесконечной ветви стремится к нулю *.

Наиболее просто определить асимптоты, параллельные осям координат. Уравнение асимптоты, параллельной оси Oy, должно иметь вид $x = C = \text{const}$, и в этом случае при движении по соответствующей бесконечной ветви $x \to C$, а $y \to \infty$.

Другими словами, *все асимптоты кривой $y = f(x)$, параллельные оси Oy, можно получить, найдя те значения $x = C$, при приближении к которым $f(x)$ стремится к бесконечности.* Для того чтобы установить, как расположена кривая относительно своей асимптоты, надо определить знак $f(x)$ при стремлении x к C слева и справа.

Проведя аналогичные рассуждения, легко показать, что асимптота, параллельная оси Ox (если она существует), определяется уравнением

$$y = C = \text{const}, \text{ где } C = \lim_{x \to \infty} f(x). \qquad \text{(IV.25)}$$

Пример 1. Кривая $y = \dfrac{2}{3 - x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, так как $y \to \pm\infty$ при $x \to 3$ (рис. 143).

* Слово «асимптота» происходит от греческого ἀσύμπτωτος — несовпадающий, несоприкасающийся.

Пример 2. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{5\pi}{2}$, ..., поскольку $\operatorname{tg} x \to \pm\infty$, когда x стремится к значениям $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ..., или $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, ..., т. е. когда

$$x \to \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

График кривой $y = \operatorname{tg} x$ представлен на рис. 144. на котором пунктирными прямыми показаны соответствующие асимптоты.

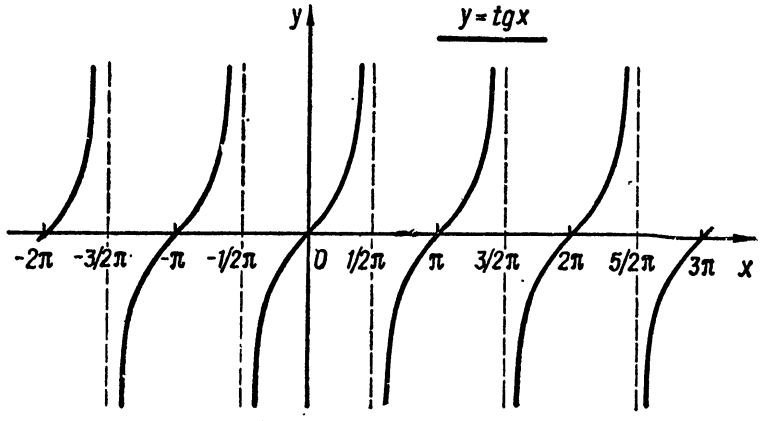


Рис. 144.

Пример 3. Кривая $y = 2^{\frac{1}{x}}$ (см. рис. 95) имеет вертикальную асимптоту, так как

$$\lim_{x \to +0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

В данном случае, в отличие от предыдущих примеров, кривая $y = f(x)$ имеет бесконечную ветвь только при стремлении x к нулю со стороны положительных значений, в то время как

$$\lim_{x \to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Кривая $y = 2^{\frac{1}{x}}$ имеет также и горизонтальную асимптоту $y = 1$, так как согласно (IV. 25) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$, что было показано при решении примера 5 § 28.

Упражнение 1. Спределить асимптоты кривых $y = \frac{1}{x-1}$ и $y = \frac{\sin x}{x-1}$, а также построить графики этих кривых.

Перейдем к нахождению асимптот, непараллельных осям координат. Допустим, что кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, образующую угол $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ с по-

ложительным направлением оси Ox (рис. 145). В таком случае уравнение асимптоты будет иметь вид

$$y = kx + b,$$

где параметры k и b надлежит еще определить.

Пусть $M(x; y)$ — переменная точка данной кривой $y = f(x)$, а P — точка асимптоты $y = kx + b$ с той же абсциссой x. Опустим перпендикуляр из точки M на асимптоту, тогда длина отрезка $\overline{MN}$ будет равна расстоянию точки M до асимптоты. Из прямоугольного треугольника MNP будем иметь

$$\overline{PM} = \frac{\overline{MN}}{\cos\varphi}; \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}; \quad \cos\varphi \neq 0,$$

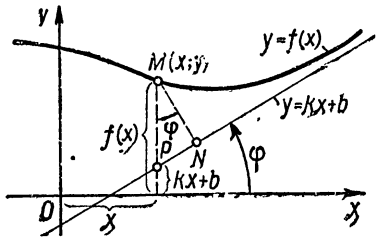


Рис. 145.

и, следовательно, условие

$$\lim \overline{MN} = 0,$$

которым определяется асимптота, можно заменить условием

$$\lim \overline{PM} = 0. \qquad \text{(IV.26)}$$

В случае асимптоты, непараллельной оси Oy, при движении по соответствующей бесконечной ветви x стремится к бесконечности. Учтя, что $\overline{PM}$ есть разность ординат кривой и асимптоты при одинаковых абсциссах, условие (IV.26) можно переписать так:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0, \qquad \text{(IV.27)}$$

откуда мы и должны получить значения k и b.

Умножив и разделив выражение, стоящее в квадратных скобках, на x, представим условие (IV.27) в виде

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - \left(k + \frac{b}{x}\right)\right] = 0.$$

Но множитель x стремится к бесконечности, а поэтому второй множитель должен стремиться к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \left(k + \frac{b}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k = 0,$$

т. е.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Найдя k, параметр b определим из условия (IV.27), которое можно переписать в виде

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx].$$

Итак, *для существования наклонной асимптоты у кривой* $y = f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы при движении по бесконечной ветви аргумент* x *беспредельно возрастал и чтобы существовали конечные пределы*

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx], \qquad \text{(IV.28)}$$

и тогда уравнение асимптоты будет

$$y = kx + b. \qquad \text{(IV.29)}$$

В частности, если $k = 0$, то асимптотой будет служить прямая (IV.25), параллельная оси Ox. Если же конечных пределов (IV.28) или одного из них нет, то у исследуемой кривой нет и наклонных асимптот.

Для исследования расположения кривой относительно асимптоты надо отдельно разобрать случаи стремления x к $+\infty$ и к $-\infty$ и в каждом из этих случаев определить знак разности

$$f(x) - (kx + b).$$

Если он будет «+», то кривая расположена над асимптотой, а если «—» — то под асимптотой. Если же эта разность при $x \to \pm\infty$ не будет сохранять неизменного знака, то кривая будет колебаться около своей асимптоты.

Пример 4. Кривая $y = x + \dfrac{\sin x}{x}$ имеет своей асимптотой прямую $y = x$ (рис. 146), так как согласно формулам (IV.28)

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \dfrac{\sin x}{x}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

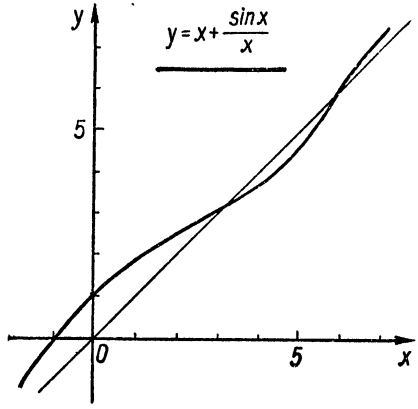


Рис. 146.

Определение асимптот является одним из существенных элементов построения графиков. Дальнейшие примеры мы рассмотрим в следующем параграфе, а пока заметим, что кривая $y = f(x)$ может иметь две различные асимптоты: при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Однако следует иметь в виду, что далеко не всякая кривая, имеющая бесконечные ветви, имеет и наклонные асимптоты.

Упражнение 2. Доказать, что парабола $y = x^2$ никаких асимптот не имеет.

§ 49. Построение графиков

В предыдущих параграфах мы неоднократно строили графики исследуемых функций. Но если при построении графика не соблюдать известной осторожности и выбирать точки произвольно, без всякой системы, то можно допустить грубую ошибку.

Чтобы вычертить график с большой точностью при небольшом числе точек, целесообразно предварительно выяснить его характерные особенности

1. Установить, в какой области функция $y = f(x)$ определена и не имеет ли она разрывов. Для каждого бесконечного разрыва учесть знак $f(x)$ справа и слева, в результате чего найти вертикальные асимптоты. Вычислив затем предел (IV.25) $C = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, найти горизонтальные асимптоты или доказать, что их нет.

2. Определить точки пересечения кривой с осями координат, решив уравнение* $y = f(x) = 0$, корни которого и есть точки пересечения кривой с осью Ox, и вычислить значение $y = f(0)$ при $x = 0$, что дает точки пересечения с осью Oy.

3. Установить наличие симметрии относительно оси Oy или начала координат по четности или нечетности функции.

4. Определить вершины кривой, а также найти участки возрастания и убывания функции.

5. Определить участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой.

6. Определить асимптоты, непараллельные оси Oy.

* Решение уравнений вида $f(x) = 0$ будет подробно рассмотрено в гл. VII

Для более точного вычерчивания кривой полезно также наметить небольшое число промежуточных точек, вычисляя их координаты при помощи уравнения кривой. В отдельных случаях бывает целесообразно определить радиус и центр кривизны в наиболее характерных точках. Все результаты надо фиксировать в таблице, а график функции лучше всего строить на координатной бумаге, например на миллиметровой. Сами точки, по которым вычерчивается график, удобно отмечать двумя тонкими короткими рисками, параллельными осям координат.

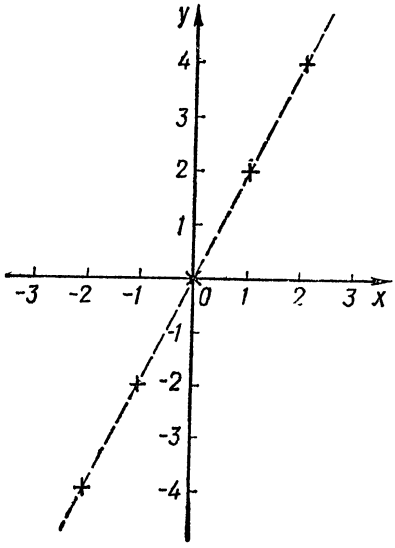


Рис. 147.

Намеченная схема построения графиков является, конечно, примерной, и в каждом конкретном случае ее можно видоизменять, исходя из особенностей заданной функции. Так, например, если мы выяснили, что заданная функция непрерывна и дифференцируема, и нашли точки максимума и минимума этой функции, то тем самым уже определили и участки возрастания и убывания функции.

Пример 1. Исследовать функцию

$$y = -\frac{32x}{15}\left(x^4 - 5x^2 + 3\frac{1}{16}\right)$$

и построить ее график.

Решение. Если мы вычислим значения функции $y(x)$ в равноотстоящих точках $x = -2;\ -1;\ 0;\ +1;\ +2$ (что на первый взгляд может показаться наиболее простым и естественным способом построения графика), то получим результаты, представленные на рис. 147 и в табл. 19.

Все вычисленные точки легли на прямую $y = 2x$ и невольно создается впечатление, что исследуемая кривая должна быть близкой к этой прямой. Однако это не так, в чем мы сразу же убедимся, перейдя к исследованию по пунктам 1—6 предложенной выше схемы.

1. Рассматриваемая функция всюду непрерывна и дифференцируема, так как является полиномом (см. § 35). Поэтому вертикальных асимптот она не имеет и определена на всей действительной оси $-\infty < x < +\infty$. При $x \to \pm\infty$ имеем $y \to \mp\infty$, так что функция $y(x)$ имеет бесконечные ветви.

Таблица 19

x	x^2	x^4	$x^4-5x^2+3\frac{1}{16}$	$-\frac{32}{15}x$	y
-2	4	16	$-\frac{15}{16}$	$+\frac{64}{15}$	-4
-1	1	1	$-\frac{15}{16}$	$+\frac{32}{15}$	-2
0	0	0	0	0	0
$+1$	1	1	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{32}{15}$	$+2$
$+2$	4	16	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{64}{15}$	$+4$

2. Точки пересечения кривой с осью Oy находим, положив $x=0$ и вычислив $y=f(0)$ (в данном случае $y(0)=0$), а с осью Ox — решив уравнение $y=f(x)=0$. В данном случае уравнение $x\left(x^4-5x^2+3\frac{1}{16}\right)=0$ распадается на линейное $x=0$ и биквадратное $x^4-5x^2+3\frac{1}{16}=0$, корни которого будут

$$x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-12{,}25}}{2}=\frac{5\pm 3{,}5707\ldots}{2}.$$

Отсюда, ограничиваясь тремя десятичными знаками точности, находим $x^2_{1;\,4}=4{,}285$; $x^2_{2;\,3}=0{,}715$; $x_{1;\,4}=\pm 2{,}070$; $x_{2;\,3}=\pm 0{,}846$.

3. Рассматриваемая функция является нечетной, поэтому она симметрична относительно начала координат, так что дальнейшие исследования достаточно вести только для положительных значений x, а затем полученные результаты отразить в точке (0; 0), как в зеркале.

4. Исследуем функцию на экстремумы. Из равенства

$$y'=-\frac{32}{15}\left(5x^4-15x^2+\frac{49}{16}\right)=-\frac{32}{3}(x^4-3x^2+0{,}6125)=0$$

находим критические точки

$$x^2=\frac{3\pm\sqrt{6{,}55}}{2}=\frac{3\pm 2{,}5593}{2};$$

$$x^2_{1;\,4}=2{,}780;\quad x^2_{2;\,3}=0{,}220;\quad x_{1;\,4}=\pm 1{,}667;\quad x_{2;\,3}=\pm 0{,}469.$$

Определив знак второй производной в этих точках, устанавливаем тип экстремума, а затем вычисляем координаты вершин кривой. Все необходимые вычисления приведены в табл. 20.

Таблица 20

x	x^2	x^4	$x^4-5x^2+3{,}0625$	y	y'	y''	Поведение функции
0,469	0,2200	0,0484	+2,0109	—2,012	0	«+»	Минимум
1,225	1,5000	2,2500	—2,1875	+5,717	+17,47	0	Точка перегиба
1,667	2,7800	7,7284	—3,1091	+11,057	0	«—»	Максимум

5. Области выпуклости и вогнутости находим, определив из равенства

$$y''=-\frac{32}{15}(20x^3-30x)=-\frac{128}{3}x\left(x^2-\frac{3}{2}\right)=0$$

точки перегиба:

$$x_1=0;\quad x_{2;\,3}=\pm\sqrt{1{,}5}=\pm 1{,}225,$$

а затем установив, что вторая производная на участке $0<x<1{,}225$ имеет знак «+», а на участке $1{,}255<x<+\infty$ — знак «—». Следовательно, на первом участке кривая вогнута («собирает дождь»), а на втором выпукла («рассеивает дождь»). При переходе на отрицательную полуось абсцисс знаки второй производной как нечетной функции меняются на обратные.

6. Для рассматриваемой кривой первое из условий (IV.28) не выполняется, поскольку

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = -\frac{32}{15}\lim_{x\to\infty}\left(x^4 - 5x^2 + 3\frac{1}{16}\right) = \mp\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот $y = kx + b$ исследуемая кривая не имеет (так же как и асимптот, параллельных осям Ox и Oy).

График кривой представлен на рис. 148 (на котором масштаб по оси Oy взят в два раза меньшим, чем по оси Ox), и, как видим, она очень сильно отличается от прямой $y = 2x$, хотя и имеет с этой прямой общие точки при $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$.

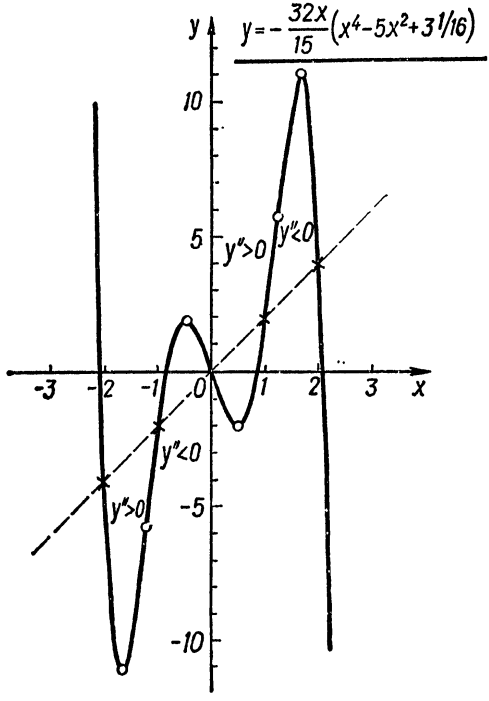


Рис. 148.

Пример 2. Исследовать функцию

$$y = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$$

и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = +2$, где она имеет бесконечный разрыв. По обе стороны от точки разрыва функция имеет знак плюс. Таким образом, находим асимптоту $x = +2$, причем обе бесконечные ветви кривой в окрестности вертикальной асимптоты направлены вверх (рис. 149). Далее, согласно (IV.25) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, так что горизонтальной асимптоты нет.

2. Положив $x = 0$, находим, что кривая пересекает ось ординат в точке $y(0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(-2)^2} = +\frac{1}{16}$. Приравняв $y = 0$, получаем уравнение $(x+1)^3 = 0$, единственный корень которого $x = -1$ дает нам точку пересечения кривой с осью абсцисс.

3. Исследуемая функция не является четной или нечетной, поэтому ни центральной ни осевой симметрией она не обладает.

4. Согласно формуле (III.48) находим

$$y' = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x+1)^2(x-8)}{(x-2)^3};\quad y'' = \frac{27}{2}\cdot\frac{x+1}{(x-2)^4}.$$

Обе производные существуют всюду, кроме точки разрыва. Уравнение $y' = 0$ имеет два корня:

$$x_1 = -1,\quad x_2 = 8.$$

Соответствующие значения функции $y(-1) = 0$, $y(8) = 5{,}0625$ вычислены в табл. 21. При $x = 8$ вторая производная положительна, так что в этой точке функция имеет минимум. Точку $x = -1$, в которой $y' = y'' = 0$, мы исследуем в следующем пункте.

Знаки производных y' и y'' отмечены непосредственно в нижней части рисунка 149. Анализируя знаки первой производной y', видим, что на участках $-\infty < x < 2$ и $8 < x < +\infty$ функция монотонно возрастает, а на участке $2 < x < 8$ — монотонно убывает.

5. Уравнение $y''=0$ имеет единственный корень $x=-1$. При $x<-1$ вторая производная отрицательна, а при $x>-1$ — положительна. Поэтому в точке $x=-1$, в которой также и $y'=0$, экстремума нет, а она является точкой перегиба. Левее точки $x=-1$ кривая всюду выпукла («рассеивает дождь»), а правее — вогнута («собирает дождь»).

6. Исследуемая кривая имеет наклонную асимптоту

$$y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4},$$

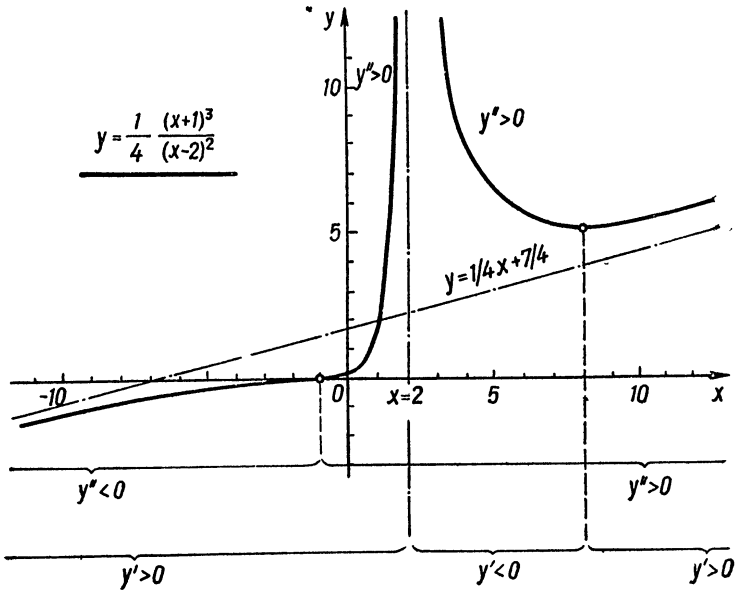


Рис. 149.

Таблица 21

$y=\frac{(x+1)^3}{4(x-2)^2}$; $y'=\frac{(x+1)^2(x-8)}{4(x-2)^3}$; $y''=\frac{27}{2}\frac{x+1}{(x-2)^4}$								Поведение функции: оценка по y'; по y''
x	$(x+1)^2$	$(x+1)^3$	$4(x-2)^2$	$4(x-2)^3$	y	y'	y''	
−10	81	−729	576	−6912	−1,266	0,211	«−»	Растет; выпукла
−5	16	−64	196	−1372	−0,327	0,152	«−»	Растет; выпукла
−1	0	0	36	−108	0	0	0	Точка перегиба
0	1	1	16	−32	0,063	0,250	«+»	Растет; вогнута
∔1	4	8	4	−4	2,000	7,000	«∔»	Растет; вогнута
+1,5	6,25	15,625	1	−0,5	15,63	81,25	«+»	Растет; вогнута
∔2	—	—	0	0	∞	∞	∞	Разрыв II рода
∔3	16	64	4	4	16,00	−20,00	«∔»	Убывает; вогнута
+4	25	125	16	32	7,813	−3,125	«∔»	Убывает; вогнута
∔5	36	216	36	108	6,000	−1,000	«∔»	Убывает; вогнута
∔8	81	729	144	864	5,063	0	«∔»	Минимум
∔10	121	1331	256	2048	5,199	0,118	«∔»	Растет; вогнута

так как согласно формулам (IV.28) получаем

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x(x^2-4x+4)} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{4}\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}-\frac{1}{4}x\right] = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-x(x-2)^2}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-x+1}{x^2-4x+4} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{7}{4}.$$

Действительно, постоянную $C=\frac{1}{4}$ при вычислении k выносим за знак предела (см. § 26). Затем, разделив числитель и знаменатель дроби на x^3 и учтя, что предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, а предел суммы равен сумме пределов, причем при $x\to\infty$ $\lim\frac{3}{x}=\lim\frac{3}{x^2}=\lim\frac{1}{x^3}=0$; $\lim\frac{4}{x}=\lim\frac{4}{x^2}=0$, мы и получаем $k=\frac{1}{4}$. Второй предел $b=\frac{7}{4}$ вычисляется аналогично.

Исследуем теперь, как расположена кривая относительно своей наклонной асимптоты. Правая ветвь кривой всюду идет выше асимптоты $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$, а левая ветвь пересекает асимптоту в точке $x=1$, в которой ордината асимптоты $y=\frac{1+7}{4}=2$ равна ординате кривой

$$y|_{x=1} = \frac{1}{4}\frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} = 2.$$

При $x<1$ левая ветвь кривой уже будет все время идти ниже наклонной асимптоты, монотонно к ней приближаясь (см. рис. 149). Для того чтобы уточнить ход кривой, вычисляем в табл. 21 несколько дополнительных точек, которые также наносим на график.

Пример 2 легко обобщить, рассмотрев функцию данного типа в общем виде:

$$y = A\frac{(x+a)^3}{(x+c)^2},\quad a\neq c. \tag{IV.30}$$

Дифференцируя y как дробь, согласно (III.48) имеем

$$y' = A\frac{3(x+a)^2(x+c)^2-2(x+c)(x+a)^3}{(x+c)^4} =$$

$$= A\frac{(x+a)^2[3(x+c)-2(x+a)]}{(x+c)^3},$$

или

$$y' = A\frac{(x+a)^2[x \mp (3c-2a)]}{(x+c)^3},$$

и, следовательно, $y' = 0$ при $x_1 = -a$ и $x_2 = 2a - 3c$.

Выполнив повторное дифференцирование (что читателю полезно осуществить в виде упражнения), находим

$$y'' = 6A(a-c)^2 \cdot \frac{x+a}{(x \mp c)^4};$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -a.$$

Далее, из (IV.30) следует, что $y = \infty$ при $x = -c$, а согласно формулам (IV.28) получаем

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = A\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 \mp 3ax^2 + 3a^2x \mp a^3}{x(x^2+2cx+c^2)} = A;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[A\frac{(x+a)^3}{(x+c)^2} - Ax\right] =$$

$$= A\lim_{x\to\infty}\frac{(x \mp a)^3 - x(x \mp c)^2}{(x+c)^2} = A(3a-2c).$$

Таким образом, кривая (IV.30) имеет точку перегиба $x_1 = -a$, экстремальную точку $x_2 = 2a - 3c$, вертикальную асимптоту $x = -c$ и наклонную асимптоту $y = kx \mp b$, с угловым коэффициентом $k = A$ и отрезком на оси ординат $b = A(3a - 2c)$. Тип экстремума определяется знаком $y''(x)$ в точке $x = x_2$, т. е. знаком величины

$$A(x_2 + a) = A(3a - 3c) = 3A(a-c),$$

поскольку $(a-c)^2$ и $(x+c)^4$ величины всегда положительные. Другими словами, если $A(a-c) < 0$, то в точке $x = x_2$ будет максимум, а если $A(a-c) > 0$ — то минимум.

Направление ветвей кривой в окрестности вертикальной асимптоты, как легко видеть из уравнения (IV.30), также определяется знаком величины $A(a-c)$: при $A(a-c) < 0$ обе ветви направлены вниз, при $A(a-c) > 0$ — вверх.

В частности, при $A = \frac{1}{4}$; $a = \mp 1$; $c = -2$ мы получим кривую, представленную на рис. 149. При любых других значениях параметров A, a, c схематический вид кривой будет тот же самый, но асимптоты и характерные точки кривой могут располагаться самым различным образом.

Упражнения

1. Построить два варианта кривой (IV.30) при таких значениях параметров:

$$A = \frac{1}{3},\ a = 2,\ c = -\frac{3}{2} \text{ и } A = 1,\ a = \frac{1}{2},\ c = 2.$$

2. Набросайте эскиз кривой, рассмотренной в примере 1, воспользовавшись только данными, приведенными в табл. 20, и точками пересечения с осью Ox. Отметьте на этом эскизе знаки производных y' и y'' по образцу рис. 149, а затем определите участки возрастания и убывания рассматриваемой кривой.

3. Исследовать функцию $y=\frac{x}{24}(x^3+2x^2-x+46)$, которая в точках $x=0;\ \pm1;\ \pm2$ принимает следующие значения:

x	-2	-1	0	$+1$	$+2$
y	-4	-2	0	$+2$	$+5$

Построить график.

Указание. Вначале набросайте эскиз кривой, воспользовавшись только этими точками, а затем проведите полный анализ кривой.

4. Исследовать следующие функции и построить их графики:

а) $y=\frac{4x}{1-x^2}$; б) $y=\frac{4x}{1+x^2}$; в) $y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

5. Показать, что ось абсцисс $y=0$ является асимптотой кривой Гаусса (см. § 43, пример 5).

Замечание. Все необходимые вычисления следует выполнять по образцу табл. 21, расположив расчетные формулы непосредственно над самой таблицей. Расстояние между строками таблицы надо брать достаточно большим, для того чтобы можно было вписать дополнительную строку, если возникнет необходимость уточнить ход кривой на отдельных участках. Кроме значения функции y необходимо также вычислять и значение первой производной y', которая равна угловому коэффициенту касательной. По известной y' легко построить в данной точке $(x;\ y)$ небольшой отрезок касательной (см. § 40 гл. III), что существенно облегчает построение графика функции. Вторую производную, вообще говоря, вычислять не надо, а для построения графика достаточно только отметить в расчетной таблице ее знак.

§ 50. Раскрытие неопределенностей

При исследовании функций может возникнуть необходимость отыскания предела дроби $\frac{f(x)}{\varphi(f)}$, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, когда $x\to a$. Вычисление таких пределов получило название «*раскрытие неопределенности вида* $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$». В § 26 гл. III мы уже встречались с этой задачей, когда непосредственным путем установили, что $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Более простое правило раскрытия неопределенностей было опубликовано французским математиком Гийомом Франсуа де Лопиталем (Guillaume François de L'Hôpital, 1661—1704) в его книге* «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий», вышедшей в свет в 1696 г. и явившейся первым печатным курсом дифференциального исчисления. Свою книгу Лопиталь составил на основе работ и писем братьев Бернулли и Лейбница, а также лекций Иогана Бернулли (Johann Bernoulli, 1667—1748) — известного швейцарского математика и механика, почетного члена Петербургской академии наук, которому принадлежит разработка ряда вопросов теории интегрирования рациональных дробей, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории движения тел в сопротивляющейся среде и некоторых других. Совместно со своим братом Яковом Бернулли (Jacob Bernouili, 1654—1705) он положил начало разработке основ вариационного исчисления. Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700—1782), сын Иогана, член Петербургской академии наук, где

* Г. Ф. де Лопиталь. Анализ бесконечно малых, Гостехиздат, М. —Л., 1935.

он активно работал с 1725 до 1733 г., решил ряд задач в области дифференциальных уравнений, разработал основы механики идеальной жидкости, а также дал определение числа e как предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Правило Лопиталя—Бернулли* *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x=a$, в которой они обращаются в нуль, т. е. $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда если существует предел отношения $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to a$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$*, причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{IV.31}$$

Величина a может быть как конечной ($a<\infty$), так и бесконечно большой ($a=\infty$).

Если отношение производных тоже приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то к нему можно применить это же правило и т. д.

Формулу (IV.31) обычно выводят, исходя из теоремы о среднем значении. Еще проще ее вывести путем разложения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, к чему мы вернемся в § 98 гл. VIII. Здесь ограничимся только решением наиболее типичных примеров.

Пример 1. Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}.$$

Решение. При $x=2$ числитель и знаменатель рассматриваемой дроби обращаются в нуль. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, воспользуемся формулой (IV.31) и получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x^2-4)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 2}x=3.$$

Найденный результат в данном случае легко проконтролировать, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3.$$

Пример 2. Раскрыть неопределенность

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}.$$

---

* В математической литературе и литературе по истории математики нет еще единого мнения в отношении авторства: обычно это правило называют именем Лопиталя, часто отмечают, что оно было впервые сформулировано (хотя и несколько в ином виде, чем это принято теперь) И. Бернулли, иногда называют его только именем Бернулли. По-видимому, эти два имени надо объединить, так как трудно переоценить значение первого учебника дифференциального исчисления и заслугу его автора. Ведь ни Исаак Ньютон, ни Готфрид Лейбниц, ни Яков и Иоган Бернулли не смогли найти времени для того, чтобы создать учебник, доступный широкому кругу читателей, и их работы читать в оригинале довольно трудно. А без учебника невозможно рассчитывать на массовое распространение новой математики, полной оригинальных идей и целого аппарата, очень далекого от аппарата привычной алгебры. В предисловии к своей книге Лопиталь указал и те источники, которыми он пользовался: «В заключение я должен признать, что я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшему из них, состоящему в настоящее время профессором в Гронингене. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить».

Более подробные сведения о творцах высшей математики читатель сможет найти в хорошо написанной книге Л. С. Фреймана [151].

Решение. Искомый ответ получим, применив три раза подряд формулу (IV.31)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6},$$

так как в данном примере отношение первых и вторых производных функций $f(x)=x-\sin x$ и $\varphi(x)=x^3$, для которых $f'(x)=1-\cos x$, $f''(x)=\sin x$, $f'''(x)=\cos x$; $f'''(0)=\cos 0=1$, и соответственно $\varphi'(x)=3x^2$, $\varphi''(x)=6x$, $\varphi'''(x)=6$, снова приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Из найденного результата получаем следующую приближенную формулу для функции синус:

$$\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3, \qquad \text{(IV.32)}$$

которая значительно точнее формулы $\sin x\approx x$. Например, при $x=0{,}1$ радиана согласно (IV.32) имеем

$$\sin 0{,}1=0{,}1-\frac{0{,}001}{6}=0{,}1-0{,}000167=0{,}099833$$

и притом, как можно проверить по таблице, все вычисленные знаки верные.

Упражнения

1. Доказать, воспользовавшись пять раз подряд формулой (IV.31), что

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-\sin x}{x^5}=-\frac{1}{120},$$

и на основании этого результата вывести приближенную формулу

$$\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5. \qquad \text{(IV.33)}$$

2. Построить на миллиметровой бумаге в масштабе $1=100$ *мм* графики функций

$$y_1=\sin x;\quad y_2=x;\quad y_3=x-\frac{1}{6}x^3;\quad y_4=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5,$$

совместив их на одном чертеже, и найти затем те точки $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, для которых соответственно

$$|x-\sin x|\geqslant 0{,}01;\quad \left|x-\frac{1}{6}x^3-\sin x\right|\geqslant 0{,}01;\quad \left|x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\sin x\right|\geqslant 0{,}01.$$

Правило Лопиталя—Бернулли остается в силе и при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, так как ее можно легко привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, представив, например, рассматриваемую дробь в таком виде:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Тогда если при $x \to a$ $f(x) \to \infty$, $\varphi(x) \to \infty$, то $\frac{1}{\varphi(x)} \to 0$, $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

Пример 3. Раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x}.$$

Решение. Воспользовавшись правилом Лопиталя—Бернулли, заменяем отношение функций, каждая из которых при $x \to \frac{\pi}{2}$ стремится к бесконечности, отношением их производных:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{5}{\cos^2 5x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 5 \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos 5x}\right)^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5},$$

так как согласно той же формуле (IV.31)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 5x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-5 \sin 5x} = \frac{1}{5}.$$

Путем тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести и неопределенности других видов, таких как

$$0 \cdot \infty;\ \infty - \infty;\ 1^{\infty};\ 0^0;\ \infty^0.$$

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$, т. е. произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$, где $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to \infty$, приводим к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)},$$

а затем применяем правило Лопиталя—Бернулли.

Пример 4. Найти $\lim_{x \to 0} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

Решение. Преобразуем $x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = x : \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \left[1 : \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}\right] = 2 \lim_{x \to 0} \cos^2 \frac{x}{2} = 2.$$

В остальных случаях поступаем аналогично, но при раскрытии неопределенностей вида 1^{∞}; 0^0; ∞^0 заданное выражение предварительно логарифмируем и находим предел от его логарифма.

В заключение отметим, что формула (IV.31) не всегда приводит к результату и неопределенности можно раскрывать и другими способами. Например, найдем предел отношения

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}.$$

Числитель и знаменатель рассматриваемого отношения стремятся к бесконечности. Воспользовавшись формулой (IV.31), получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}.$$

Но $1+\cos x$ при беспредельном возрастании x ни к какому пределу не стремится, ибо $\cos x$ будет все время колебаться между $(+1)$ и (-1). С другой стороны, нетрудно увидеть, что искомый предел можно вычислить непосредственно:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Итак, в этом случае неопределенность раскрывается, но правило Лопиталя—Бернулли ничего не дает. Однако этот результат не противоречит правилу Лопиталя—Бернулли, так как в нем утверждалось лишь то, что если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.

§ 51. Приращение и дифференциал функции. Аппроксимация любой дифференцируемой функции отрезками прямых

Рассмотрим график функции $y=f(x)$, имеющей в точке $M(x;\ y)$ с координатами x и $y=f(x)$ конечную производную y' (рис. 150). Проведем в этой точке касательную MT. Как мы видели в § 32 гл. III, ее угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha$ равен производной $y'=f'(x)$. Если абсциссе x придать приращение $\Delta x=dx$, то ордината y получит приращение $\Delta y=PM_1$. В то же время ордината касательной получит приращение $PT=dy$, которое будем обозначать символом dy.

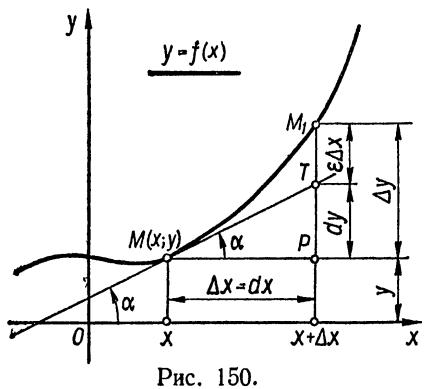


Рис. 150.

Поставим перед собой задачу по известным x, y, y' определить для заданной функции $y=f(x)$ ее приращение Δy, соответствующее заданному приращению аргумента $\Delta x=dx$. Из прямоугольного треугольника MPT мы легко можем определить приращение dy, которое получает касательная, так как

$$dy=PT=MP\cdot\operatorname{tg}\alpha=f'(x)\,\Delta x. \quad \text{(IV.34)}$$

Что же касается приращения самой функции Δy, то данные, которыми мы располагаем, являются недостаточными, и нам не остается ничего другого, как принять приближенно, что

$$\Delta y\approx dy.$$

Исследуем более подробно, можно ли это приближенное равенство сделать достаточно точным и пригодным для практических вычислений. Согласно рис. 150 имеем $PM_1=PT+TM_1$, т. е. $\Delta y=dy+\varepsilon\Delta x$, или, заменяя dy его значением (IV.34):

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\varepsilon\Delta x. \quad \text{(IV.35)}$$

Величина ε зависит от Δx и притом так, что при $\Delta x\to 0$ она также стремится к нулю, а в таком случае произведение $\varepsilon\cdot\Delta x$ будет бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая $\Delta x=dx$. Это обстоятельство и позволяет записать

$$\Delta y\approx f'(x)\,\Delta x=dy \quad \text{(IV.36)}$$

с погрешностью равной $\varepsilon\Delta x$, которую можно сделать меньше любой наперед заданной величины, взяв достаточно малым Δx.

Пример 1. Дана металлическая квадратная пластинка с ребром $x = 100$ *мм*. При нагревании ребро пластинки удлинится на $\Delta x = 0{,}1$ *мм* (рис. 151). Насколько увеличится при этом площадь пластинки S?

Решение. Имеем $S = x^2$, $S' = 2x$, так что согласно формуле (IV.36) получаем

$$\Delta S \approx dS = 2x \cdot \Delta x = 20 \text{ мм}^2.$$

Полное вычисление дало бы

$$\Delta S = (100{,}1)^2 - (100)^2 = 10020{,}01 - 10000 = 20{,}01 \text{ мм}^2.$$

Следовательно, погрешность формулы (IV.36) в данном примере, т. е. для функции $y = x^2$, равна $\varepsilon\Delta x = (\Delta x)^2 = 0{,}01$ *мм*^{2}, что составляет очень малую величину по сравнению с Δy, и ею на практике можно пренебречь.

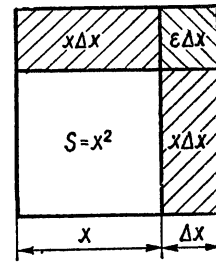


Рис. 151.

При $\Delta x \to 0$ погрешность для функции $y = x^2$ будет убывать как бесконечно малая величина второго порядка $\varepsilon\Delta x = (\Delta x)^2$. Например, при $\Delta x = 0{,}01$ будем иметь $\varepsilon\Delta x = (\Delta x)^2 = 0{,}0001$; при $\Delta x = 0{,}001$ — соответственно $\varepsilon\Delta x = 0{,}000001$ и т. д., что и проиллюстрировано на рис. 151. Поэтому, взяв достаточно малым Δx, мы можем обеспечить сколь угодно высокую точность вычислений по формуле (IV.36).

Подведем итог полученным результатам.

Итак, приращение Δy любой функции, имеющей производную, можно представить в виде (IV.35). Первое слагаемое правой части этого равенства весьма просто зависит от Δx, а именно: оно линейно, т. е. пропорционально первой степени Δx. Его называют главной частью приращения функции $y = f(x)$, или ее дифференциалом *.

Точнее, *дифференциалом функции* $y = f(x)$ *называют главную часть приращения этой функции* $f'(x)\,\Delta x$, *линейно зависящую от приращения аргумента* Δx.

Дифференциал функции $y = f(x)$ принято обозначать символом dy (читается: дэ игрек), который является единым целым, а не произведением d на y. Дифференциал аргумента dx принимают тождественно равным приращению аргумента (так как Δx является независимой переменной):

$$dx \equiv \Delta x. \qquad \text{(IV.37)}$$

Поэтому равенство (IV.34) можно переписать теперь в следующем виде:

$$dy = y'\,dx, \qquad \text{(IV.38)}$$

т. е. *дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента.*

Из формулы (IV.38) следует

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad \text{(IV.39)}$$

так что производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Обозначением (IV.39) мы уже пользовались в гл. III.

Второе слагаемое $\varepsilon\Delta x$ в формуле (IV.35) характерно тем, что оно стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ быстрее, чем Δx, благодаря наличию в нем сомножителя ε. Несмотря на то, что величина $TM_1 = \varepsilon\Delta x$ для большинства функций является

---

* Термин «дифференциал» принадлежит Лейбницу и происходит от латинского слова *differentia*, означающего «разность», поскольку $dy \approx y(x + \Delta x) - y(x)$.

трудноопределимой, мы можем ею пренебречь, если выберем достаточно малым Δx. Проиллюстрируем это на дальнейших примерах.

Пример 2. Вычислить небольшую часть таблицы функции $y = e^x$.

Решение. В данном случае $y = e^x$, так что $y' = e^x = y$. Поэтому согласно формуле (IV.36) находим

$$\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x = y\Delta x$$

и, следовательно,

$$y(x \dotplus \Delta x) = y \dotplus \Delta y \approx y \dotplus \Delta x \cdot y. \qquad \text{(IV.40)}$$

При $x = 0$ имеем $y(0) = e^0 = 1$. Дальнейшие значения функции $y = e^x$ вычисляем по приближенной формуле (IV.40), взяв $\Delta x = 0{,}01$. Эти вычисления, выполненные с пятью десятичными знаками, приведены в табл. 22. Техника вычислений в данном примере предельно проста. Определив приращение $\Delta y \approx \Delta x \cdot y$, что при $\Delta x = 0{,}01$ сводится к переносу запятой на два знака влево и округлению до пяти десятичных знаков полученного результата, записываем его в данной строке x, после чего остается только сложить значения y и Δy, стоящие в одной и той же строке. В результате получаем следующее табличное значение $y(x + \Delta x)$ с выбранным нами шагом $\Delta x = 0{,}01$, что позволяет повторить весь цикл вычислений.

Таблица 22

$y = e^x$; $y' = e^x = y$; $y(x + \Delta x) \approx y + \Delta x \cdot y$					
$\Delta x = 0{,}01$			$\Delta x = 0{,}001$		Точное
x	y	$\Delta x \cdot y$	y	$\Delta x \cdot y$	e^x
0,00	1,00000	0,01000	1,00000	0,00100	1,00000
0,01	1,01000	0,01010	1,01005	0,00101	1,01005
0,02	1,02010	0,01020	1,02020	0,00102	1,02020
0,03	1,03030	0,01030	1,03045	0,00103	1,03046
0,04	1,04060	0,01041	1,04080	0,00104	1,04081
0,05	1,05101	0,01051	1,05125	0,00105	1,05127
0,06	1,06152	0,01062	1,06181	0,00106	1,06184
0,07	1,07214	0,01072	1,07247	0,00107	1,07251
0,08	1,08286	0,01083	1,08324	0,00108	1,08329
0,09	1,09369	0,01094	1,09412	0,00109	1,09417
0,10	1,10463	—	1,10511	—	1,10517

Таблица 23

$\Delta x = 0{,}001$					
x	y	$\Delta x \cdot y$	x	y	$\Delta x \cdot y$
0,000	1,00000	100	0,005	1,00500	101
0,001	1,00100	100	0,006	1,00601	101
0,002	1,00200	100	0,007	1,00702	101
0,003	1,00300	100	0,008	1,00803	101
0,004	1,00400	100	0,009	1,00904	101
0,005	1,00500	—	0,010	1,01005	—

В последней колонке табл. 22 для сравнения приведены точные значения рассматриваемой функции $y = e^x$, а на рис. 152 схематически показаны заданная кривая и та ломаная линия, которой мы ее заменили при вычислении по приближенной формуле (IV.40). Очевидно, что, уменьшив Δx, мы увеличим число звеньев ломаной и тем самым повысим точность приближения. Для иллюстрации в табл. 22 вычислены также значения y при $\Delta x = 0{,}001$, т. е. в том случае, когда число звеньев ломаной увеличено в десять раз, что повысило точность результатов примерно на один дополнительный десятичный знак. Все вычисления при $\Delta x = 0{,}001$ выполняются по той же формуле (IV.40) и начало этих вычислений приведено в табл. 23. Но поскольку при данной точности вычислений величина $dy_n = y_n \Delta x$ сохраняет постоянное значение на сегментах [0,000; 0,004], [0,005; 0,014], [0,015; 0,024], ..., то в данном случае эти вычисления можно вести без записи промежуточных результатов, как это и выполнено в табл. 22.

Упражнение 1. Продолжить вычисление табл. 23 до $x = 0{,}050$.

Приближенное выражение каких-либо величин (или геометрических объектов) через другие, более известные величины называется *аппроксимацией* (от латинского слова *approximare* — приближаться). Например, кривые линии можно аппроксимировать ломаными, иррациональные числа — рациональными, непрерывные функции — многочленами и т. д.

На рис. 152 показана аппроксимация показательной функции совокупностью отрезков линейных функций, т. е. ломаной, каждое звено которой строится в соответствии с формулой (IV. 36). Легко видеть, что таким путем можно аппроксимировать отрезками прямых любую дифференцируемую функцию, так как нам надо знать в узловых точках $(x_n;\ y_n)$ только производную $y'_n = f'(x_n)$, которая и определяет собой угловой коэффициент $k_n = f'(x_n)$ очередного n-го звена ломаной линии.

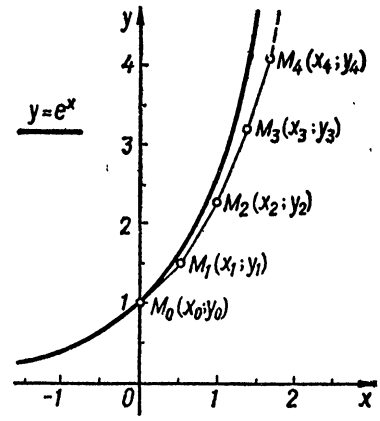


Рис. 152.

Пример 3. Вычислить на сегменте [0; 0,1 радиана] таблицу значений функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с шагом $\Delta x = 0{,}01$.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, а $(\cos x)' = -\sin x$, то согласно формуле (IV.36) находим

$$\Delta(\sin x) \approx f'(x)\,\Delta x = \Delta x \cdot \cos x; \quad \Delta(\cos x) \approx -\Delta x \cdot \sin x$$

и, следовательно,

$$\sin(x \dotplus \Delta x) = \sin x \dotplus \Delta(\sin x) \approx \sin x \dotplus \Delta x \cdot \cos x, \qquad \text{(IV.41)}$$

$$\cos(x \dotplus \Delta x) = \cos x \dotplus \Delta(\cos x) \approx \cos x - \Delta x \cdot \sin x. \qquad \text{(IV.42)}$$

Все необходимые вычисления (с пятью десятичными знаками) при $\Delta x = 0{,}01$ приведены в табл. 24, в которой для сравнения даны также и точные значения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Техника вычислений аналогична описанной в примере 2. При $x = 0$ нам известны исходные значения функций $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. По известному $\cos x$ и $\Delta x = 0{,}01$ находим приращение $\Delta y = \Delta(\sin x) \approx \Delta x \cdot \cos x$ функции $y = \sin x$. Сложив затем в соответствии с формулой (IV.41) значения $\sin x$ и $\Delta(\sin x)$, стоящие в одной и той же строке x, мы и находим следующее табличное значение синуса: $\sin(x \dotplus \Delta x)$. Вычисление косинуса выполняется аналогично по известному $\sin x$, с той лишь разницей, что приращение для косинуса есть величина отрицательная и ее надо вычитать.

Таблица 24

$\sin(x+\Delta x) \approx \sin x + \Delta x \cdot \cos x$; $\cos(x+\Delta x) \approx \cos x - \Delta x \cdot \sin x$						
	$\Delta x = 0{,}01$				Точные	
x	$\sin x$	$\Delta x \cdot \cos x$	$\cos x$	$\Delta x \cdot \sin x$	$\sin x$	$\cos x$
0,00	0,00000	0,01000	1,00000	0,00000	0,00000	1,00000
0,01	0,01000	0,01000	1,00000	0,00010	0,01000	0,99995
0,02	0,02000	0,01000	0,99990	0,00020	0,02000	0,99980
0,03	0,03000	0,01000	0,99970	0,00030	0,03000	0,99955
0,04	0,04000	0,00999	0,99940	0,00040	0,03999	0,99920
0,05	0,04999	0,00999	0,99900	0,00050	0,04998	0,99875
0,06	0,05998	0,00999	0,99850	0,00060	0,05996	0,99820
0,07	0,06997	0,00998	0,99790	0,00070	0,06994	0,99755
0,08	0,07995	0,00997	0,99720	0,00080	0,07992	0,99680
0,09	0,08992	0,00996	0,99640	0,00090	0,08988	0,99595
0,10	0,09988	—	0,99550	—	0,09983	0,99500

Упражнения

2. Продолжить вычисление табл. 24 до $x = 0{,}15$.

3. Вычислить, заменяя приращение функции ее дифференциалом, таблицу значений функции $y = \sqrt{1-x}$ на сегменте $[0;\ 0{,}1]$ с шагом $\Delta x = 0{,}01$ и конечный результат сравнить с точным значением этой функции в точке $x = 0{,}1$.

Указание. Так как $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2y}$, то расчетная формула будет $y(x \pm \Delta x) \approx y(x) - \dfrac{\Delta x}{2y}$.

Равенство $\Delta y \approx dy$ является точным и не зависящим от величины приращения аргумента Δx только в случае линейной функции $y = kx \pm b$, график которой совпадает с касательной. Отсюда, в частности для функции $y = x$, для которой $y' = 1$, получаем $dy = dx = \Delta x$, как это отмечалось в формуле (IV.37). Для любой другой дифференцируемой функции равенство $\Delta y = dy$ будет только приближенным, дающим удовлетворительные результаты лишь при достаточно малых * Δx. При больших значениях Δx величина $\varepsilon \Delta x$, которой мы пренебрегали, может стать больше, чем сам дифференциал dy (см. рис. 150). Не следует также думать, что всегда $\Delta y > dy$. Например, случай $\Delta y < dy$ получим, если на рис. 150 возьмем такую кривую $y = f(x)$, которая будет идти ниже касательной.

Однако принципиальное значение имеет тот факт, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции Δy как угодно мало отличается от ее дифференциала dy, т. е. дугу любой дифференцируемой функции всегда можно как угодно точно аппроксимировать ломаной с бесконечным числом звеньев. На возможности такой аппроксимации, собственно говоря, и построено интегральное исчисление и вывод многих важных дифференциальных уравнений, описывающих самые различные процессы.

Остановимся теперь на дифференциалах высшего порядка. Дифференциал от дифференциала dy функции называется *дифференциалом второго порядка* и обозначается символом d^2y (читается: дэ два игрек). Таким образом, по определению,

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)\,dx].$$

* В гл. VIII и X мы получим более эффективные приближенные формулы, которые обеспечат любую наперед заданную точность при небольшом объеме вычислений.

Дифференциал какого-либо выражения есть произведение производной этого выражения на дифференциал dx независимой переменной x. Следовательно,

$$d^2y = [f'(x)\,dx]'\,dx.$$

Дифференциал dx есть произвольное приращение независимой переменной x и от значения x не зависит. Поэтому при дифференцировании выражения $f'(x)\,dx$ множитель dx должен рассматриваться как величина постоянная. В силу этого

$$[f'(x)\,dx]' = f''(x)\,dx$$

и тогда

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

Вместо $(dx)^2$, простоты ради, пишут * dx^2. Таким образом,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего, четвертого и более высоких порядков. По определению, дифференциал третьего порядка, обозначаемый d^3y, есть $d(d^2y)$. Так как $d^2y = f''(x)\,dx^2$, то

$$d^3y = [f''(x)\,dx^2]'\,dx = f'''(x)\,dx^3,$$

$$d^4y = [f'''(x)\,dx^3]'\,dx = f^{IV}(x)\,dx^4 \text{ и т. д.}$$

Из полученных формул легко также выразить старшие производные как отношения соответствующих дифференциалов:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ (читается: дэ два игрек по дэ икс квадрат),} \qquad \text{(IV.43)}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \text{ (читается: дэ три игрек по дэ икс куб),} \qquad \text{(IV.44)}$$

. . . . . .

В дальнейшем, в зависимости от обстоятельств, будем пользоваться либо обозначениями производных при помощи штрихов, либо как отношением дифференциалов.

Контрольные упражнения

1. Определить промежутки возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 10$; б) $y = x^3 + 6x - 8$; в) $y = \frac{5}{x^2} + 2$;

г) $y = 3x^2 + \ln x$; д) $y = \operatorname{tg} x$; е) $y = \sin x$; ж) $y = 3e^{-x^2}$.

2. Найти экстремумы функций, а затем построить их графики:

а) $y = x^2 + 4x - 10$; б) $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$; в) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2$;

г) $y = e^x + e^{-x} - 3$; д) $y = 5x^3 + 8x$; е) $y = \frac{1}{2}x^2 - \operatorname{arctg} x$.

---

* Подчеркнем, что под символом dx^2 нельзя понимать дифференциал от функции x^2. Если же речь идет о вычислении дифференциала от функции x^2, то надо писать $d(x^2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанных отрезках:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$; б) $y = \frac{2-x}{2+x}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 3)$;

в) $y = \sin 3x - 2x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; г) $y = e^x - 2x - 1$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

4. Показать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

5. Построить равнобочную трапецию с углом $\alpha = 30°$ при основании, которая при данной площади S имела бы наименьший периметр.

6. В прямоугольной системе координат дана точка (2; 3). Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала с положительным направлением осей координат треугольник наименьшей площади.

7. На оси параболы $y^2 = 4x$ дана точка на расстоянии $x = 3$ единицы от вершины. Найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой.

8. Из листа жести, имеющего форму круга радиуса R, вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить конус наибольшей вместимости.

9. Для того чтобы уменьшить трение жидкости о стенки канала, площадь сечения, смачиваемого водой, должна быть возможно меньшей. Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданной площадью поперечного сечения является такая, при которой ширина канала вдвое превышает его высоту.

10. Производные различных порядков:

а) $y = 4x^3 + 7x^2 - 5x + 3$, найти y', y''' и y^{IV};

б) $y = x^2 + \sin x + \ln(1+x)$, найти y'' и y''';

в) $y = \operatorname{tg} x + x \operatorname{arctg} x + e^x$, найти y'''.

11. Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^4 - 2x^2 + x - 1$ в точке, абсцисса которой равна -1.

12. Показать, что касательная к кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ в точке $M(a; b)$ есть $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

13. Исследовать на выпуклость и вогнутость следующие кривые и найти их точки перегиба:

а) $y = x^3 - 5x + 2$; б) $y^3 = 2x + 1$; в) $y = e^x - 2$.

14. Найти радиус кривизны приведенных ниже кривых в заданных точках:

а) $y = x + x^3$ в точке (1; 2); б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в точках $(a; 0)$ и $(0; b)$;

в) $y = \cos x$ в точке (0; 1); г) $xy = 1$ в точке $\left(2; \frac{1}{2}\right)$.

15. Найти асимптоты следующих кривых:

а) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$; б) $y = e^{\frac{1}{x}} + 2$; в) $y = \frac{x^2+1}{x-1}$.

16. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \frac{x}{x^2-4}$; б) $y = x - \operatorname{arctg} x$; в) $y = x - e^{-\frac{1}{x}}$.

Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Переходя к изложению основ интегрального исчисления, рассмотрим сначала неопределенный, а затем определенный интегралы, тесно связанные между собой. Эта связь выражается формулой Ньютона — Лейбница, на чем мы остановимся более подробно в § 58.

§ 52. Отыскание функции по ее производной. Первообразная и неопределенный интеграл

Как было показано в гл. III, одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала заданной функции.

Первой основной задачей интегрального исчисления является обратная задача — отыскание функции по ее производной или заданному ее дифференциалу. Второй основной задачей интегрального исчисления, которую мы рассмотрим в § 58 и 62, является определение площади, ограниченной заданной кривой.

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется первообразной * для функции $f(x)$, если $f(x)$ является производной от $F(x)$ или, что эквивалентно, $f(x)\,dx$* служит дифференциалом от $F(x)$. Очевидно, что в данном случае функции $F(x)$ и $f(x)$ связаны следующими соотношениями:

$$F'(x) = f(x) \tag{V.1}$$

или

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{V.2}$$

Например, функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как

$$(\sin x)' = \cos x$$

или

$$d\sin x = \cos x\,dx.$$

Первообразной для функции $f(x) = 3x^2$ является функция $F(x) = x^3$, поскольку

$$(x^3)' = 3x^2 \text{ или } d(x^3) = 3x^2dx.$$

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то она не является единственной. Так, в предыдущем примере в качестве первообразных можно взять следующие функции: $F(x) = x^3 - 5$; $F(x) = x^3 + 2$ или в общем виде $F(x) = x^3 + C$, где C — произвольная постоянная, так как при любом значении C

$$(x^3 + C)' = (x^3)' + (C)' = 3x^2,$$

поскольку производная от постоянной равна нулю.

В связи с этим возникает вопрос, исчерпывает ли функция вида $x^3 + C$ все возможные первообразные для $3x^2$ или существуют еще функции другого вида, которые также будут первообразными для $3x^2$. Ответ на него дает следующая теорема.

---

* Термин «первообразная функция» (так же как и термин «производная») принадлежит Лагранжу и был введен им на рубеже XVIII и XIX веков.

Теорема. *Если $F(x)$ есть какая-либо из первообразных для данной функции $f(x)$, то самое общее выражение для первообразной имеет вид*

$$F(x)+C,$$

где C есть произвольная постоянная.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ есть любая функция, имеющая своей производной

$$F_1'(x)=f(x).$$

С другой стороны, рассматриваемая функция $F(x)$ также имеет $f(x)$ своей производной, а поэтому и

$$F'(x)=f(x).$$

Вычитая это равенство из предыдущего, имеем

$$F_1'(x)-F'(x)=[F_1(x)-F(x)]'=f(x)-f(x)\equiv 0$$

и, следовательно,

$$F_1(x)-F(x)\equiv C,$$

где C есть постоянная, что и требовалось доказать.

Действительно, если производная некоторой непрерывной и дифференцируемой функции $\varphi'(x)\equiv 0$, то сама функция $\varphi(x)$ может быть только постоянной. Геометрически это очевидно, и мы данный вопрос уже рассматривали в § 34 гл. III. Строгое же обоснование последнего утверждения вытекает из теоремы Лагранжа, доказательство которой в доступном изложении читатель может найти в книгах [102, т. I, гл. IV, § 2 и гл. X, § 1], [125, т. I, гл. II, § 4, п. 63].

Полученный результат можно сформулировать и так: *если производные (или дифференциалы) двух функций тождественно равны, то сами функции отличаются лишь постоянным слагаемым.*

Определение 2. *Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.*

Таким образом, по определению

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{V.3}$$

если

$$F'(x)=f(x).$$

При этом функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, переменную x — *переменной интегрирования*, а знак $\int$ — *знаком интеграла*. Действие, с помощью которого по данной функции $f(x)$ находим ее первообразную $F(x)$, называется *интегрированием функции* $f(x)$. Постоянное слагаемое C обычно подразумевается включенным в само обозначение $\int f(x)\,dx$.

Пример. Найти неопределенный интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x}$.

Решение. Первообразной от $\frac{1}{x}$ будет функция

$$F(x)=\ln x,$$

так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. В таком случае

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Упражнение. Найти неопределенный интеграл от следующих функций:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \frac{3}{x^2}$; в) $f(x) = 2\sin x$.

§ 53. Геометрическая интерпретация неопределенного интеграла. Определение произвольной постоянной по начальным данным

Для того чтобы нагляднее представить себе введенные в предыдущем параграфе понятия, дадим геометрическое истолкование задачи нахождения первообразной и неопределенного интеграла для заданной функции. Соотношение $y' = f(x)$ показывает, что график искомой первообразной функции или, как обычно говорят, *интегральной* кривой

$$y = F(x)$$

есть кривая, касательная к которой при любом значении переменной x имеет заданное направление, определяемое угловым коэффициентом

$$y' = f(x).$$

Другими словами, при любом значении независимой переменной x задано направление касательной к кривой $y' = f(x)$ и требуется найти саму кривую $y = F(x)$. Если построена одна такая интегральная кривая, то все кривые $y = F(x) + C$, которые получим, перемещая кривую $y = F(x)$ на произвольный отрезок C параллельно оси абсцисс, будут иметь при заданном значении x касательные, параллельные между собой, с одним и тем же угловым коэффициентом $k = y' = f(x)$. Этот параллельный перенос равносилен прибавлению к ординатам одной из полученных кривых постоянного слагаемого C, что мы и подчеркиваем, записав семейство интегральных кривых, отвечающих задаче в виде

$$y = F(x) + C. \qquad \text{(V.4)}$$

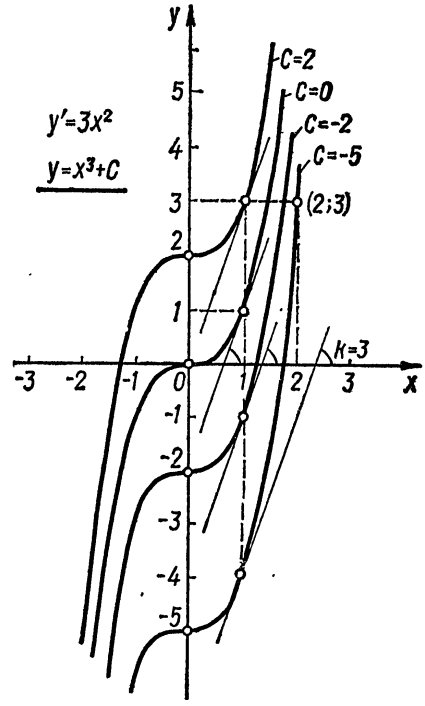


Рис. 153.

На рис. 153 представлено семейство первообразных $F(x) = x^3 + C$ (при $C = -5$; -2; 0; $+2$) для функции $f(x) = 3x^2$, которое и является неопределенным интегралом от заданной функции $y' = f(x)$:

$$y = \int 3x^2 dx = x^3 + C. \qquad \text{(V.5)}$$

Таким образом, каждая отдельная кривая $y = x^3 + C$ при каком-либо конкретном значении постоянной C является первообразной для $y' = 3x^2$, а все семейство этих кривых, соответствующее всем возможным значениям C, является

неопределенным интегралом от $dy = 3x^2dx$. Рассматриваемое семейство обладает тем свойством, что производная при любом значении переменной интегрирования x должна быть равна значению подынтегральной функции $y' = 3x^2$ в этой точке. Так, например, на рис. 153 касательные к любой из интегральных кривых, проходящие через точки с абсциссами $x = 1$, параллельны и имеют уклон $k = 3$, так как в этих точках $y' = 3x^2|_{x=1} = 3$. При $x = 0$ касательные к любой интегральной кривой будут идти параллельно оси абсцисс, поскольку в этих точках $y' = 0$. При $x = \frac{1}{2}$ будем иметь $y' = k = \frac{3}{8}$ и т. д.

Неопределенность выражения (V.3) связана с наличием произвольной постоянной C и ее легко устранить, если потребовать, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку $(x_0; y_0)$. Это требование равносильно заданию начального значения y_0 искомой функции $y = F(x)$, которое она должна иметь при заданном значении $x = x_0$. Тогда, подставив координаты заданной точки $(x_0; y_0)$ в формулу (V. 4), получим уравнение для определения произвольной постоянной C:

$$y_0 = F(x_0) + C, \quad \text{откуда } C = y_0 - F(x_0). \tag{V.6}$$

Например, если мы хотим из интегральных кривых, представленных на рис. 153, выделить ту, которая проходит через точку (1; 1), то должны положить $C = 0$, так как, подставив в выражение $y = x^3 + C$ значения $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, мы и получим $C = 0$. Если нас интересует интегральная кривая, которая проходила бы через точку $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, то, подставив эти начальные данные в найденный неопределенный интеграл (V.5), получим $C = -5$ и т. д.

Таким образом, задав одну точку $(x_0; y_0)$, через которую должна проходить интегральная кривая, мы согласно равенству (V.6) определяем произвольную постоянную C и тем самым придаем задаче интегрирования полную однозначность. Если же в условии задачи не приведены начальные значения переменных, то можно найти только неопределенный интеграл данной функции, т. е. все семейство первообразных $F(x) + C$, зависящее от одного параметра C. Данным обстоятельством и обусловлен сам термин «неопределенный интеграл». Однако ни в коем случае не следует считать, что, найдя неопределенный интеграл, мы получили какое-то неполноценное, ущербное решение. Суть дела диаметрально противоположна. Найденный неопределенный интеграл является наиболее общей формой решения поставленной задачи, а неопределенность легко устраняется заданием еще одного дополнительного условия — начальных данных, которым должно удовлетворять это решение.

Пример. Найти интегральные кривые для функции $f(x) = \frac{1}{3}x$, а затем выделить из них ту первообразную, которая проходит через точку (2; —1).

Решение. Имеем

$$\int \frac{1}{3} x dx = \frac{1}{6} x^2 + C,$$

поскольку

$$\left(\frac{1}{6} x^2 + C\right)' = \frac{1}{3} x.$$

Таким образом, семейством интегральных кривых будет семейство парабол $y = \frac{1}{6}x^2 + C$. Подставив в найденное решение начальные данные $x_0 = 2$, $y_0 = -1$, определяем произвольную постоянную:

$$C = -1\frac{2}{3}.$$

Внося это значение C в неопределенный интеграл, получаем искомую первообразную

$$y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3},$$

которая, как легко непосредственно проверить, действительно проходит через заданную точку (2; —1).

Упражнения

1. Построить по образцу рис. 153 семейство парабол $y = \frac{1}{6}x^2 + C$ при $C = -2; -1; 0; +1; +2$, а затем провести к каждой из этих парабол касательные через точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 2$. Результаты графических построений проверить при помощи заданной подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{3}x$.

2. Найти интегральные кривые для функции $f(x) = -2\cos x$ и определить произвольную постоянную C для той из них, которая проходит через точку (0; 1). Построить рисунок.

§ 54. Обращение формул дифференцирования. Таблица простейших интегралов

Основное свойство неопределенного интеграла, которое непосредственно вытекает из его определения, можно выразить следующей формулой:

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \tag{V.7}$$

т. е. *интеграл, взятый от дифференциала некоторой функции $dF(x) = F'(x)\,dx$, равен этой функции плюс произвольная постоянная C.*

Равенство (V.7) позволяет найти интегралы для многих элементарных функций путем обращения соответствующих формул дифференцирования. Например, в силу равенства (V.7) имеем:

$$\int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1).$$

Но согласно формулам (III.45) и (III.54)

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)\,x^n = x^n,$$

следовательно,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1). \tag{V.8}$$

Формула (III.54), а потому и формула (V.8) справедливы при любом значении показателя степени n — целом или дробном, положительном или отрицательном, рациональном или иррациональном, и только при $n = -1$ формула (V.8) теряет смысл, так как знаменатель $n + 1$ обращается в нуль. Полученный пробел легко устранить, если учесть, что

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

а в таком случае

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C. \tag{V.9}$$

Таблица 25

Степенные функции

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Тригонометрические функции

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

Дробные рациональные функции

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + C$$

(для $|x| < a$)

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + C$$

(для $|x| > a$)

Показательные функции

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Гиперболические функции

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{cth} x\, dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

Иррациональные функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

Однако согласно формуле (V.9), интегрируя степенную функцию $f(x) = x^{-1}$, получаем трансцендентную функцию $\ln|x|$, в то время как при любом другом значении $n \neq -1$ интегрирование степенной функции согласно (V.8) приводит снова к степенной функции с показателем степени, увеличенным на единицу.

Заметим также, что поскольку логарифмическая функция (в действительной области) определена только для положительных значений аргумента, то в формуле (V.9) под знаком логарифма следует брать абсолютное значение аргумента $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Однако многие авторы этого правила не придерживаются и пишут $\ln x$, подразумевая, что x берется только положительным.

Таким же путем можно обратить любую другую формулу дифференцирования. В частности, прочитав в обратном порядке простейшие формулы дифференцирования из табл. 8 гл. III, мы получим табл. 25, которая является таблицей простейших интегралов и поэтому в дальнейшем будет играть основную роль при решении многих задач интегрального исчисления. Формулы, приведенные в табл. 25, надо выучивать наизусть по мере их закрепления упражнениями. Формулы интегрирования гиперболических функций, которые мы привели здесь для полноты картины, будут рассмотрены более подробно в § 65 и 137.

Для проверки табл. 25 достаточно установить, что производная правой части равенства тождественна с подынтегральной функцией левой части, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. Вообще говоря, зная ту функцию, от которой заданная функция $f(x)$ есть производная, мы тем самым согласно формуле (V.7) получаем ее неопределенный интеграл. Но обыкновенно, даже в самых простейших случаях, заданные функции не находятся в таблице производных, что и делает задачу интегрального исчисления гораздо более трудной, чем задача дифференциального исчисления. В принципе все дело сводится к преобразованию данного интеграла к таким, которые содержатся в таблице простейших интегралов, т. е. к сведению данного интеграла к табличному. Преобразование это требует практики и навыка, что облегчается применением основных правил и методов интегрального исчисления, к рассмотрению которых мы и переходим. В тех же случаях, когда данный интеграл не удается свести к табличному, а это, к сожалению, встречается довольно часто, задача решается численными методами, которым в дальнейшем будет также уделено внимание.

§ 55. Основные свойства неопределенного интеграла

Как мы видели, две первообразные для одной и той же функции отличаются лишь постоянным слагаемым. Отсюда вытекает первое свойство неопределенного интеграла:

1. Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянное слагаемое.

Наоборот, для того чтобы проверить, что две функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым, достаточно показать, что их производные (или дифференциалы) тождественны.

Следующие два свойства непосредственно вытекают из определений 1 и 2 § 52.

2. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал — подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{V.10}$$

Пример.

$$\left(\int 4x^3 dx\right)' = 4x^3 \text{ или } d\int 4x^3 dx = d(x^4 + C) = 4x^3 dx.$$

3. Одновременно с (V.10) имеем

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

и поскольку $dF(x) = F'(x)\,dx$, то эту формулу можно представить в следующем виде:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \tag{V.11}$$

Отсюда, учитывая свойство 2, приходим к выводу: *стоящие рядом знаки* d *и* $\int$, *в каком бы порядке они ни следовали, взаимно уничтожаются, если условиться в случае необходимости добавлять к результату произвольную постоянную в равенстве между неопределенными интегралами.*

Пример.

$$\int d\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т. е. если $a = \text{const}$, то

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + C. \tag{V.12}$$

Для того чтобы доказать равенство (V.12), достаточно проверить, что производные от его левой и правой частей совпадают.

Дифференцируя левую и правую части, получаем

$$\left(\int af(x)\,dx\right)' = af(x),$$

$$\left(a\int f(x)\,dx + C\right)' = a\left(\int f(x)\,dx\right)' + (C)' = af(x),$$

а это и значит, что равенство (V.12) справедливо.

Пример.

$$\int 7\cos x\,dx = 7\int \cos x\,dx = 7\sin x + C.$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен сумме их интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx. \tag{V.13}$$

Прежде чем доказывать это равенство, постараемся уяснить себе его точный смысл. Когда говорят о равенстве двух неопределенных интегралов, то подразумевают, что любая первообразная, входящая в первый неопределенный интеграл, может отличаться от любой первообразной второго неопределенного интеграла только на постоянное слагаемое C. В этом смысле и равенство (V.12) часто записывают более кратко, опуская произвольную постоянную C, т. е. в следующем виде:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$

что и мы будем делать в дальнейшем.

Переходя к доказательству равенства (V.13), продифференцируем его левую и правую части и убедимся, что полученные производные тождественно совпадают между собой:

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx\right)' = f_1(x) + f_2(x)$$

и

$$\left(\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx\right)' = \left(\int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\int f_2(x)\,dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Следовательно, равенство (V.13) справедливо (в указанном выше смысле).

Аналогичное рассуждение можно провести и для любого числа слагаемых.

Пример.

$$\int (3x^5 - 6\sin x + 10e^x)\,dx = 3\int x^5 dx - 6\int \sin x\,dx + 10\int e^x dx =$$

$$= 3\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) - 6(-\cos x + C_2) + 10(e^x + C_3) = \frac{x^6}{2} + 6\cos x + 10e^x + C,$$

где

$$C = 3C_1 - 6C_2 + 10C_3.$$

В качестве пояснения к решению этого примера заметим, что мы воспользовались вначале формулой (V.13) и представили данный интеграл в виде алгебраической суммы трех интегралов, а затем согласно формуле (V.12) вынесли постоянные за знак интегрирования, но оба этих действия объединили. В результате мы привели данный интеграл к сумме трех табличных интегралов и, воспользовавшись табл. 25, написали ответ. При этом каждый из табличных интегралов имеет свое постоянное слагаемое C_1, C_2, C_3, но мы их объединили, введя новое постоянное слагаемое $C = 3C_1 - 6C_2 + 10C_3$.

Замечание. При промежуточных вычислениях нет необходимости выписывать постоянное слагаемое для каждого интеграла; достаточно приписать его по выполнении всех интегрирований, что мы в дальнейшем всегда будем делать без дополнительных объяснений.

Упражнения

1. Воспользовавшись формулами (V.10) и (V.11), показать, что

а) $\left(\int \frac{7}{2}x^4 dx\right)' = \frac{7}{2}x^4$; б) $\int d\sin^2 x = \sin^2 x + C$;

в) $\int d\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} - \cos\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x^3\right\} = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} - \cos\sqrt{x} + \operatorname{arctg} x^3 + C$.

2. Найти следующие интегралы:

а) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int\left(x + \frac{1}{x}\right)dx$; б) $\int \frac{3x^2 - 2x + 5}{x}\,dx$;

в) $\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$; г) $\int (x^3 + 2\sin x - 3\cos x)\,dx$.

3. Найти функцию, производная которой есть $x^2 + 2$, зная, что при $x = 3$ функция принимает значение, равное 20.

§ 56. Простейшие способы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой

Ознакомившись с общими свойствами неопределенного интеграла, перейдем к изложению техники интегрирования и рассмотрим прежде всего непосредственное интегрирование и интегрирование при помощи подстановки, которые являются простейшими и вместе с тем наиболее распространенными способами интегрирования.

Непосредственное интегрирование. Под непосредственным интегрированием понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл удается привести к одному или нескольким табличным интегралам. К табличному виду обычно удается привести не очень сложные интегралы путем элементарных тож-

дественных преобразований подынтегральной функции, а также воспользовавшись основными свойствами неопределенного интеграла, рассмотренными в предыдущем параграфе. Поясним сказанное примерами.

Пример 1.

$$\int (x-3)^2\,x\,dx = \int (x^2-6x+9)\,x\,dx = \int (x^3-6x^2+9x)\,dx =$$

$$= \int x^3dx - 6\int x^2dx + 9\int x\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 + C.$$

Выполнив под знаком интеграла очевидные тождественные преобразования и воспользовавшись затем формулами (V.13) и (V.12), сводим данный интеграл к трем табличным интегралам:

$$\int x^n dx \quad \text{при} \quad n = 3;\ 2;\ 1.$$

Постоянная C (которая в данном случае равна алгебраической сумме трех постоянных: $C = C_1 - C_2 + C_3$) появляется тогда, когда исчезают знаки интеграла.

Пример 2.

$$\int \left(\frac{3}{x} + 2\sin x\right) dx = 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \sin x\,dx = 3\ln x - 2\cos x + C,$$

поскольку согласно табл. 25

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C_1; \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C_2.$$

Пример 3.

$$\int \frac{\sin 2x}{3\sin x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x}\,dx = \frac{2}{3}\int \cos x\,dx = \frac{2}{3}\sin x + C.$$

В данном случае решение получаем, воспользовавшись известным тригонометрическим тождеством $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, формулой (V.12) и табличным интегралом от функции косинус.

Упражнение 1. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int \frac{x^4 - 5x^3 + 1}{x}\,dx$; б) $\int (2+\sqrt{x})^2\,dx$; в) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

Интегрирование подстановкой. Во многих случаях $\int f(x)\,dx$ можно упростить, если вместо x ввести новую переменную t, положив *

$$x = \varphi(t); \qquad dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{V.14}$$

Тогда для приведения данного интеграла к новой переменной достаточно привести к новой переменной его подынтегральное выражение

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + C, \qquad \text{где } x = \varphi(t), \tag{V.15}$$

в справедливости чего легко убедиться, продифференцировав обе части равенства (V.15) и воспользовавшись затем формулами (V.10) и (V.14).

На первый взгляд может показаться, что замена, осуществленная по формуле (V.15), приводит к более сложному подынтегральному выражению, чем исходное. Но это не так, и *метод подстановки*, или, как его также называют, *метод замены*

* Заметим, что вместо переменной t можно, конечно, употреблять любую другую переменную, например z, τ, ω и т. д.

переменной, является одним из наиболее эффективных и распространенных методов интегрирования. С другой стороны, не существует общих правил, которые во всех случаях позволяли бы найти подстановку, ведущую к желаемой цели. Поэтому, чем больше примеров самостоятельно решит читатель, тем с большим успехом он овладеет методом подстановки.

Пример 4. Найти $\int e^{2x+3}dx$.

Решение. В табл. 25 такого интеграла нет, но есть интеграл $\int e^x dx$, сходный с данным. Поэтому попробуем ввести новую переменную t, связанную с x зависимостью

$$2x+3=t, \quad \text{или} \quad x=\frac{1}{2}(t-3).$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$2dx=dt; \quad dx=\frac{1}{2}dt.$$

Подставив результат в исходный интеграл, имеем

$$\int e^{2x+3}dx=\int e^t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int e^t\,dt=\frac{1}{2}e^t+C,$$

так как согласно табл. 25 для показательной функции *

$$\int e^t\,dt=e^t+C_1, \quad C=\frac{1}{2}C_1.$$

Возвращаясь к переменной x, находим окончательно

$$\int e^{2x+3}dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C.$$

Для надежности проверяем результат дифференцированием и по формуле дифференцирования сложной функции (III.49) получаем (рассматривая $2x+3=t$ в качестве вспомогательного аргумента)

$$\left(\frac{1}{2}e^{2x+3}+C\right)'=\frac{1}{2}e^{2x+3}\cdot(2x+3)'=e^{2x+3}.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{(5+4x)^3}$.

Решение. Вводим замену

$$5+4x=t; \quad 4dx=dt; \quad dx=\frac{1}{4}dt.$$

В таком случае исходный интеграл приводится к табличному виду и дальнейшее интегрирование выполняется без особого труда:

$$\int\frac{dx}{(5+4x)^3}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{1}{4}\int t^{-3}dt=\frac{-1}{2\cdot4}t^{-2}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, решаем поставленную задачу:

$$\int\frac{dx}{(5+4x)^3}=\frac{-1}{8}(5+4x)^{-2}+C=\frac{-1}{8(5+4x)^2}+C.$$

Полученный результат остается проверить дифференцированием, что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

* Заметим, что мы ввели новую постоянную $C=\frac{1}{2}C_1$.

Замечание 1. Если подынтегральная функция (как в примерах 4 и 5) имеет вид $f(ax+b)$, то может оказаться полезной подстановка $ax+b=t$.

Упражнение 2. Найти при помощи линейной подстановки следующие интегралы:

$$\text{а)}\ \int \sqrt{x+3}\,dx; \quad \text{б)}\ \int \cos(2x-5)\,dx; \quad \text{в)}\ \int \frac{dx}{1+(x-2)^2}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos x\,dx$.

Решение. Среди табличных интегралов подобного данному нет, так что подстановку в этом примере найти несколько труднее, чем в предыдущих примерах. Обратим, однако, внимание на то, что дифференциал функции $\sin x$ есть $\cos x\,dx$. Поэтому заменим $\sin x$ через новую переменную z, т. е. выполним подстановку

$$\sin x = z; \quad d\sin x = \cos x\,dx = dz,$$

и мы получим

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \int \sin^4 x\,d\sin x = \int z^4\,dz = \frac{1}{5}z^5 + C.$$

Для того чтобы завершить решение примера, остается лишь вернуться к переменной x, подставив $\sin x$ вместо z:

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

Контроль дифференцированием подтверждает, что интегрирование выполнено правильно, так как согласно формуле (III.49), имеем

$$\left(\frac{1}{5}\sin^5 x + C\right)' = \frac{1}{5}\cdot 5\sin^4 x\cdot(\sin x)' = \sin^4 x\cos x.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int x^2 e^{x^3}\,dx$.

Решение. Заметив, что дифференциал от x^3 есть $3x^2\,dx$, вводим подстановку

$$x^3 = t; \quad 3x^2\,dx = dt; \quad x^2\,dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\,dt$$

и получаем:

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3} d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

В данном примере мы имели не точный дифференциал функции x^3, а лишь дифференциал с точностью до постоянного множителя. Но поскольку постоянный множитель можно выносить как из под знака интеграла, так и из под знака дифференциала, то это обстоятельство не усложнило решение примера.

Замечание 2. Если подынтегральное выражение можно разбить на два сомножителя и в одном из них легко распознать дифференциал некоторой функции $\varphi(x)$, то при вычислении такого интеграла может оказаться полезной подстановка $\varphi(x)=t$.

Упражнение 3. Найти при помощи подстановки следующие интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием:

$$\text{а)}\ \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б)}\ \int \frac{3x\,dx}{1+x^2}; \quad \text{в)}\ \int \frac{1}{x}\ln x\,dx;$$

$$\text{г)}\ \int \frac{4x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}; \quad \text{д)}\ \int \frac{3dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}; \quad \text{е)}\ \int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx.$$

Указание. В упражнении 3а внешнее сходство данного интеграла с табличным $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ обманчиво, так как наличие в числителе множителя $2x$ существенно меняет вид первообразной функции. Поэтому надо применить подстановку $1 - x^2 = t$; $2x\,dx = -dt$. Это же замечание относится и к упражнению 3б, в котором данный интеграл не следует пытаться свести к табличному интегралу $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, а надо воспользоваться подстановкой $1 + x^2 = t$.

Пример 8. Вычислить интегралы $\int \cos^2 x\,dx$ и $\int \sin^2 x\,dx$.

Решение. Воспользовавшись известными тождествами

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

каждый из рассматриваемых интегралов приводим к сумме двух более простых интегралов:

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

При этом интеграл $\int \cos 2x\,dx$ вычисляем, воспользовавшись согласно замечанию 1 подстановкой $2x = z$, что читателю полезно выполнить как упражнение.

Пример 9. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Решение. Выражение, стоящее под знаком корня, подсказывает нам тригонометрическую подстановку

$$x = a\sin t; \quad dx = a\cos t\,dt.$$

В таком случае

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\cos t$$

и, следовательно, учтя результат примера 8, имеем

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C.$$

Для перехода к x подставляем $t = \arcsin\frac{x}{a}$, а также принимаем во внимание, что

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t \cdot a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Окончательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad (V.16)$$

Формулу (V.16), которую читателю полезно проверить дифференцированием, следует заучить наизусть, так как многие интегралы сводятся к интегралу $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$, и его мы можем теперь считать табличным.

Пример 10. Найти $\int \cos^3 x\,dx$.

Решение. Подстановка $t = \cos x$ в данном примере не приведет к цели, так как, воспользовавшись этой подстановкой, мы не сможем найти достаточно простое выражение для дифференциала новой переменной dt. Поэтому попробуем из подын-

тегрального выражения в качестве дифференциала новой переменной z выделить множитель $\cos x\,dx$, в результате чего придем к подстановке

$$\sin x = z; \quad \cos x\,dx = dz.$$

Выражение, остающееся под интегралом после выделения множителя $\cos x\,dx$, а именно:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2,$$

также рационально выражается через z, что и обеспечивает успех введенной подстановки. Объединяя эти результаты, получаем окончательно:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - z^2)\,dz =$$
$$= z - \frac{z^3}{3} + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

Упражнение 4. Найти приведенные ниже интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием:

$$\text{а)} \int \sin^3 x\,dx; \quad \text{б)} \int \cos^5 x\,dx; \quad \text{в)} \int \frac{4x\,dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

В заключение отметим, что формула интегрирования (V.15) эквивалентна формуле дифференцирования сложной функции, чем и обусловлена та роль, которую она играет в интегральном исчислении. Для закрепления полученных навыков читателю полезно решить достаточно много примеров, которые можно найти в книгах [3, 8, 16, 33, 41, 42, 63, 66, 102, 125, 138, 139, 149].

§ 57. Интегрирование по частям

Если u и v — две любые дифференцируемые функции от x, то согласно (III.44) и (IV.39) дифференциал произведения uv вычисляется по следующей формуле:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{V.17}$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, и если функции u и v удается подобрать так, чтобы последний интеграл брался проще, чем исходный (и чтобы при этом отыскание функции v по ее дифференциалу dv не представляло больших трудностей), то цель будет достигнута. Поскольку любое подынтегральное выражение можно бесчисленным количеством способов представить в виде произведения $u\,dv$, то формула (V.17) открывает широкие возможности при интегрировании различных сложных функций. Умение разбивать подынтегральное выражение на подходящие множители u и dv вырабатывается в процессе решения задач, и мы на ряде примеров проиллюстрируем это.

Пример 1. Найти $\int x \cos x\,dx$.

Решение. Положим

$$u = x, \quad dv = \cos x\,dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = \int \cos x\, dx = \sin x.$$

Следовательно, в соответствии с формулой (V.17)

$$\int x \cdot \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C,$$

так как интеграл

$$\int v\, du = \int \sin x\, dx = -(\cos x + C),$$

к которому мы свели заданный интеграл

$$\int u\, dv = \int x \cdot \cos x\, dx,$$

оказался табличным.

Попробуем разбить подынтегральное выражение на множители u и dv другим способом, взяв

$$u = \cos x, \quad dv = x\, dx.$$

В таком случае

$$du = -\sin x\, dx, \quad v = \int x\, dx = \frac{1}{2} x^2$$

и согласно (V.17)

$$\int x \cos x\, dx = \int \cos x \cdot x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x\, dx,$$

так что в итоге приходим к интегралу $\int v\, du$ более сложному, чем исходный. Следовательно, при таком неудачном способе разбиения подынтегральной функции формула интегрирования по частям ничего не дает.

Пример 2. Вычислить $\int x^2 \sin x\, dx$.

Решение. Возьмем в качестве u и dv следующие выражения:

$$u = x^2, \quad dv = \sin x\, dx.$$

Тогда

$$du = 2x\, dx, \quad v = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

и, следовательно,

$$\int x^2 \cdot \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x\, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx.$$

Заменив $\int x \cos x\, dx$ его значением, найденным при решении примера 1, получаем окончательно

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Найденный результат контролируем дифференцированием:

$$(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C)' =$$
$$= -2x \cos x - x^2 (-\sin x) + 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = x^2 \sin x,$$

и после приведения подобных членов убеждаемся, что мы действительно получили подынтегральную функцию. Значит, интегрирование было выполнено верно.

Упражнение 1. Вычислить $\int x \sin x\, dx$, $\int x^2 \cos x\, dx$, $\int x^3 \cos x\, dx$, а затем полученные результаты проконтролировать дифференцированием.

Замечание. При определении функции v по ее дифференциалу dv можно брать любую произвольную постоянную C_1, так как в конечном результате мы ее всегда можем включить в постоянную C интеграла $\int v\,du$. Поэтому удобно считать постоянную C_1 равной нулю, чем мы пользовались, когда в примере 1 нашли, что $v = \int \cos x\,dx = \sin x + C_1$, $C_1 = 0$ и, соответственно, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$, $C_1 = 0$ в примере 2.

Пример 3. Найти $\int \ln x\,dx$.

Решение. Возьмем

$$u = \ln x, \quad dv = dx,$$

так что

$$du = d(\ln x) = \frac{1}{x}\,dx; \quad v = \int dx = x.$$

Подставив эти результаты в формулу (V.17), получаем искомый интеграл

$$\int \ln x \cdot dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C,$$

поскольку в данном примере интеграл

$$\int v\,du = \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int dx = x.$$

Пример 4. Вычислить $\int x^4 \ln x\,dx$.

Решение. Так как дифференцирование функции $\ln x$ приводит к упрощению, то полагаем

$$u = \ln x, \quad dv = x^4\,dx,$$

а затем, определив du и v, имеем

$$\int \ln x \cdot x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{5}\int x^5 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5 + C.$$

Контроль дифференцированием подтверждает правильность выполненного интегрирования:

$$\left(\frac{1}{5}x^5 \ln x - \frac{1}{25}x^5 + C\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 \ln x + \frac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x} - \frac{5}{25}x^4 = x^4 \ln x.$$

Таким образом, формула (V.17) позволила заменить сложное подынтегральное выражение $x^4 \ln x$ на более простое $v\,du = \frac{1}{5}x^5 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{5}x^4\,dx$. Попутно для получения v пришлось проинтегрировать выражение $x^4\,dx$ — отсюда и название: *интегрирование по частям*.

Упражнение 2. Вычислить по формуле (V.17) следующие интегралы и полученные результаты проверить дифференцированием:

а) $\int x^2 \ln x\,dx$; б) $\int xe^x\,dx$; в) $\int \operatorname{arctg} x\,dx$; г) $\int (x+3)\cos 2x\,dx$.

Пример 5. Найти $\int e^x \sin x\,dx$.

Решение. Проинтегрировав два раза по частям, имеем:

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx,$$

причем первый раз мы положили

$$u = \sin x; \quad dv = e^x\,dx, \text{ так что } du = \cos x\,dx; \quad v = e^x,$$

а затем, вычисляя, в свою очередь, $\int e^x \cos x\,dx$, взяли

$$u = \cos x; \quad dv = e^x\,dx.$$

В результате искомый интеграл $I(x) = \int e^x \sin x\,dx$ мы выразили через него же, т. е. получили уравнение для определения неизвестной величины $I(x)$. Поэтому, приведя подобные члены, имеем:

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$

и окончательно

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Проверка дифференцированием, которую читателю полезно выполнить как упражнение, подтверждает, что найденный результат верный.

Подводя итог, отметим, что привило интегрирования по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной. Но есть целые классы интегралов, таких как

$$\int x^k \ln x\,dx, \quad \int x^k \sin bx\,dx, \quad \int x^k \cos bx\,dx, \quad \int x^k e^{ax}\,dx \text{ и т. д.},$$

которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. Аналогично, повторным применением этого правила вычисляются интегралы

$$\int P(x)\, e^{ax}\,dx, \quad \int P(x) \sin bx\,dx, \quad \int P(x) \cos bx\,dx,$$

где $P(x)$ есть целый относительно x полином.

Упражнение 3. Найти следующие интегралы:

а) $\int (x^2 + 2x - 1)\, e^{3x}\,dx$; б) $\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x\,dx$; в) $\int \arcsin x\,dx$.

Полученные результаты проверить дифференцированием.

§ 58. Определенный интеграл и его связь с неопределенным интегралом. Формула Ньютона—Лейбница

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$ и не принимающую на этом отрезке отрицательных значений. Фигуру, ограниченную кривой AB графика $y = f(x)$, ординатами aA, bB и отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, будем называть *криволинейной трапецией* (рис. 154). Поставим перед собой задачу: определить площадь S криволинейной трапеции $aABb$.

Рассмотрим вначале часть криволинейной трапеции $aAXx$, отсекаемую от трапеции $aABb$ ординатой xX, восставленной в произвольной точке x отрезка $[a, b]$. При изменении x площадь $S(x)$ трапеции $aAXx$ будет изменяться вместе с x, так что $S(x)$ будет непрерывной функцией аргумента x, причем ее производная

$$S'(x) = f(x). \tag{V.18}$$

Для того чтобы доказать это, придадим x некоторое, скажем положительное, приращение Δx, в результате чего площадь $S(x)$ получит приращение ΔS.

Обозначим через m и M наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке $[x, x+\Delta x]$ и сравним площадь ΔS с площадью каждого из двух прямоугольников, имеющих общее основание Δx, а высоту, соответственно, m и M. На рис. 154 эти прямоугольники показаны пунктирными линиями. Очевидно, что

$$m\,\Delta x < \Delta S < M\,\Delta x,$$

откуда

$$m < \frac{\Delta S}{\Delta x} < M.$$

Если $\Delta x \to 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} m = \lim_{\Delta x \to 0} M = f(x),$$

а тогда

$$S'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

что и доказывает формулу (V.18).

Таким образом, мы установили следующую теорему.

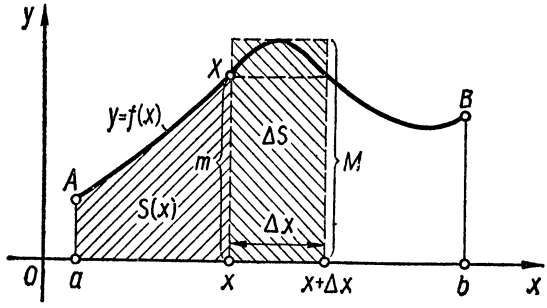


Рис. 154.

Теорема. *Производная от площади $S(x)$ криволинейной трапеции $aAXx$ в произвольной точке x равна ординате $y = f(x)$ в этой точке.*

Другими словами, переменная площадь $S(x)$ представляет собой первообразную для данной функции $y = f(x)$. Среди всех других первообразных эта первообразная выделяется по тому признаку, что она обращается в нуль при $x = a$. Поэтому если известна одна из первообразных $F(x)$ (безразлично какая) для функции $f(x)$, то

$$S(x) = F(x) + C_0,$$

причем постоянную C_0 легко определить, положив $x = a$, при котором $S(x)|_{x=a} = 0$. В таком случае

$$0 = F(a) + C_0, \text{ так что } C_0 = -F(a).$$

Отмечая знаком $S(a, x)$ обе ординаты, ограничивающие криволинейную трапецию, приходим к окончательному результату:

$$S(a, x) = F(x) - F(a). \tag{V.19}$$

В частности, для вычисления площади $S(a, b)$ всей криволинейной трапеции $aABb$ надо взять $x = b$ и тогда имеем

$$S(a, b) = F(b) - F(a), \tag{V.20}$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, график которой представлен

на рис. 154. Если же $x = a$, то согласно формуле (V.19) $S(a, a) = 0$, как и должно быть, поскольку в этом случае криволинейная трапеция переходит в одну единственную ординату, т. е. в трапецию с основанием равным нулю.

Пример 1. Найти площадь $S(a, b)$ криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y = x^2$, ординатами, проходящими через точки $a = 1$, $b = 2$ и отрезком [1; 2] оси абсцисс (рис. 155).

Решение. Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных будет

$$F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}.$$

Подставив это значение в формулу (V.20) и учтя, что в данном примере $a = 1$, $b = 2$, приходим к искомому ответу:

$$S(a, b) = F(b) - F(a) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Этот же результат получим, взяв любую другую первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3} + C_1$, так как и в этом случае имеем

$$S(a, b) = \left(\frac{2^3}{3} + C_1\right) - \left(\frac{1^3}{3} + C_1\right) = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) + (C_1 - C_1) = 2\frac{1}{3},$$

причем произвольная постоянная C_1 уничтожается.

Подведем итог сказанному выше.

Определение. *Разность значений при $x = b$ и при $x = a$ любой первообразной функции для $f(x)$ называется определенным интегралом функции $f(x)$ и обозначается символом*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Эта запись читается так: интеграл от a до b эф от икс дэ икс. Концы a, b данного промежутка — *промежутка интегрирования* $[a, b]$ — называются *пределами интегрирования: a — нижним, b — верхним.*

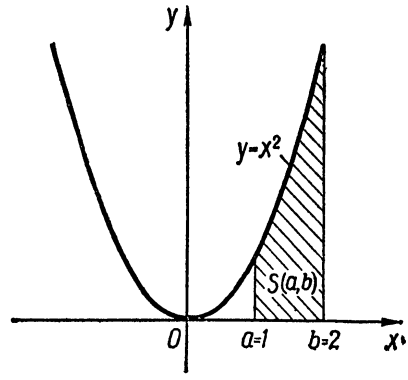


Рис. 155.

Знак $\int$, который называют *знаком интеграла*, представляет собой стилизованную букву S — начальную букву латинского слова Summa. Этот знак должен напоминать, что определенный интеграл геометрически можно интерпретировать как площадь криволинейной трапеции $aABb$. Функция $f(x)$, как и в случае неопределенного интеграла, называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, а сама буква x — *переменной интегрирования.*

Подчеркнем, что значение определенного интеграла зависит только от вида функции $f(x)$ и от пределов a, b, но совершенно не зависит от того, какой буквой обозначили переменную интегрирования, поскольку выражения

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(\omega)\,d\omega \text{ и т. д.}$$

представляют собой одно и тоже постоянное число — площадь $S(a, b)$ криволинейной трапеции $aABb$.

Итак, если $F(x)$ есть какая-нибудь первообразная для $f(x)$, то по определению имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (V.21)$$

Для разности, стоящей в правой части равенства (V.21), также ввели специальный символ — символ (или знак) *двойной подстановки:* $[F(x)]_a^b$ или $F(x)\Big|_a^b$. Поэтому в более развернутом виде формулу (V.21) записывают так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (V.22)$$

Пользуясь введенными обозначениями, весь ход решения примера 1 можно записать более кратко в следующем виде:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл для функции $y = x^3$ в пределах от $a = 1$ до $b = 3$.

Решение. Взяв неопределенный интеграл $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ и воспользовавшись формулой (V.22), решаем поставленную задачу:

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Подчеркнем, что в конечном результате мы произвольную постоянную C не стали записывать, поскольку при двойной подстановке она сокращается.

Упражнение 1. Вычислить следующие определенные интегралы:

$$\text{а)}\ \int_1^3 x\,dx; \quad \text{б)}\ \int_0^5 2x\,dx; \quad \text{в)}\ \int_0^2 e^x\,dx.$$

В начале параграфа мы предполагали, что график функции $y = f(x)$ полностью находится над осью абсцисс, т. е. что все ординаты этого графика положительны. Освободимся от этого ограничения и рассмотрим общий случай, при котором некоторые части графика $f(x)$ находятся над осью, а другие — под осью абсцисс, причем пределы a и b могут также принимать какие угодно положительные, нулевые или отрицательные значения (рис. 156). Для этого достаточно условиться считать отрицательными площади частей криволинейной трапеции $aABb$, расположенные под осью Ox, а положительными — площади частей, расположенные над осью Ox.

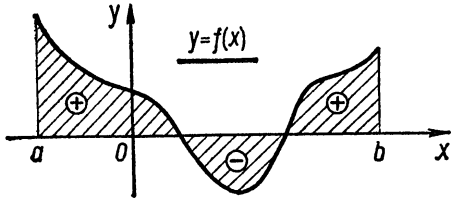


Рис. 156.

Таким образом, в общем случае с геометрической точки зрения определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

представляет собой алгебраическую сумму площадей, заключенных между осью Ox, графиком функции $y=f(x)$ и ординатами $x=a$, $x=b$. При этом площади над осью Ox учитываются со знаком «$+$», а под осью Ox — со знаком «$-$». Формула (V.21) остается в силе и для общего случая.

Пример 3. Вычислить определенные интегралы $\int_0^{3/2\pi} \cos x\,dx$ и $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos x\,dx$.

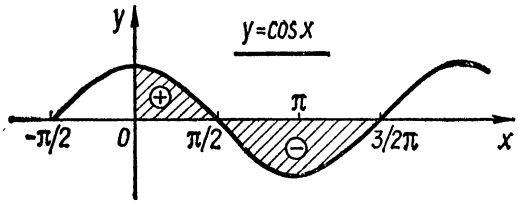


Рис. 157.

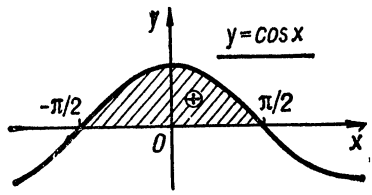


Рис. 158.

Решение. Найдя неопределенный интеграл (первообразную) для заданной функции $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ и воспользовавшись формулой (V.22), получаем для первого из рассматриваемых определенных интегралов

$$\int_0^{3/2\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{3/2\pi} = \sin\frac{3}{2}\pi - \sin 0 = -1$$

и, соответственно, для второго

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2.$$

Рис. 157 и 158 иллюстрируют решение примера, причем подынтегральная функция $y=\cos x$ для обоих интегралов одна и та же, а изменяются только пределы интегрирования.

Упражнение 2. Найти по формуле (V.22) следующие определенные интегралы:

$$\text{а)}\ \int_0^{2\pi} \cos x\,dx;\quad \text{б)}\ \int_{-\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx;\quad \text{в)}\ \int_1^2 (e^x-3)\,dx,$$

а затем для большей наглядности сделать рисунки.

Формула (V.21), которая сводит вычисление определенного интеграла от заданной функции к отысканию ее первообразной и, таким образом, объединяет в себе дифференциальное и интегральное исчисление, получила название *формулы Ньютона — Лейбница*.

В этой связи надо подчеркнуть, что интегральное исчисление возникло из практической необходимости создать общий метод определения площадей, объемов,

Архимед.

поверхностей, центров тяжести и т. д. Еще в античной математике при вычислении площадей и объемов применяли методы, подобные методам вычисления определенного интеграла как предела суммы, на чем мы остановимся в § 62. Значительных успехов в этом достиг величайший древнегреческий математик и инженер Архимед.

Архимед (Ἀρχιμήδης, ок. 287—212 гг. до н. э.) родился и провел большую часть своей жизни в Сиракузах (Сицилия). Образование получил в Александрии, где сблизился с учениками Евклида — Эратосфеном, Кононом и Досифеем.

Большинство работ Архимеда утрачено и о них узнали из трудов других ученых. В своих работах «О квадратуре параболы», «О шаре и цилиндре», «О коноидах и сфероидах» Архимед вычислил при помощи разработанного им метода неделимых площадь сегмента параболы, поверхность и объем шара, шарового сегмента, цилиндра, а также объемы тел, образуемых вращением параболы, гиперболы, эллипса и их сегментов. Ему же принадлежит прием определения касательных к кривым, который является в принципе дифференциальным методом. Архимед впервые изучил спираль, названную его именем, нашел приближенное значение числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

доказал бесконечность натурального ряда чисел.

Работы Архимеда по гидромеханике и статике до сегодняшнего дня могут служить образцом применения математики в вопросах природоведения и техники. Особое значение имеет его труд «О плавающих телах», в котором сформулирован основной закон гидростатики, известный с тех пор как закон Архимеда. Ему же принадлежит открытие закона рычага, разработка методов определения центра тяжести тел, состава сплавов и т. д.

Свои познания Архимед широко использовал при конструировании различных сооружений и машин. Он изобрел винтовой насос (архимедов винт), разработал систему рычагов, блоков и винтов для подъема грузов, сконструировал несколько военных метательных машин и кранов с крюками, опрокидывающими корабли. Архимед выступил активным участником обороны Сиракуз и был убит римскими воинами при взятии ими этого города.

В дальнейшем число решенных задач подобного рода постепенно увеличивалось, но при этом каждая конкретная задача решалась специфическим, присущим только ей, способом, а общая методика отсутствовала.

Создание общего метода решения рассматриваемых задач происходило чрезвычайно медленно. Прошли почти два тысячелетия, пока был накоплен достаточно большой теоретический и вычислительный материал, который, в свою очередь, находился в теснейшей связи с потребностями практики. Процесс накопления и обобщения резко ускорился в конце средних веков, когда бурное развитие производительных сил в Европе вызвало революционную ломку феодальных производственных отношений и их переход в отношения капиталистические, что послужило началом развития новых форм производства.

Важным этапом в развитии интегрального исчисления (которое исторически начали разрабатывать раньше, чем дифференциальное исчисление) были работы Иоганна Кеплера (Johannes Kepler, 1571—1630), Бонавентуры Кавальери (Bonaventura Cavalieri, 1598—1647), Евангелисты Торричелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647), Пьера Ферма (Pierre de Fermat, 1601—1665), Блэза Паскаля (Blaise Pascal, 1623—1662) и других ученых. В 1659 г. Исаак Барроу (Isaak Barrow, 1630—1677) установил связь между задачей о разыскании площади и задачей о разыскании касательной. Развивая эти идеи, Барроу в «Лекциях по оптике и геометрии» (1669 г.) показал взаимную обратимость интегрирования и дифференцирования и тем самым сделал последний завершающий шаг в предыстории анализа. Быть может, это и совпадение, но все же очень символично, что именно Барроу был учителем Исаака Ньютона (Isaak Newton, 1642—1727), основоположника интегрального и дифференциального исчисления. Независимо от Ньютона большой вклад в развитие анализа внесли Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716), а также их многочисленные ученики и последователи.

В XVIII веке дальнейшему развитию интегрального и дифференциального ис-

Исаак Ньютон.

числения больше всего способствовали братья Яков и Иоганн Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654—1705; Johann Bernoulli, 1667—1748), Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707—1783), Жан Лерон Даламбер (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783) и Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813), на чем мы остановимся в § 71. В XIX веке интегральное исчисление перестраивают на уровень возросших требований математической строгости Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857), Бернгард Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866), Мари Энмон Камиль Жордан (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838—1922). Важные результаты принадлежат также отечественным ученым, академикам Михаилу Васильевичу Остроградскому (1801—1861) и Пафнутию Львовичу Чебышеву (1821—1894), проложившему новые пути во многих областях науки и техники.

В XX веке развитию интегрального исчисления (и примыкающих к нему областей) особенно благоприятствовали работы французских математиков Эмиля Бореля (Émile Borel, 1871—1956), Арно Данжуа (Arnaud Denjoy, 1884), Анри Леона Лебега (Henri Léon Lebesque, 1875—1941) и советских математиков: академиков Николая Николаевича Боголюбова (1909), Мстислава Всеволодовича Келдыша (1911), Андрея Николаевича Колмогорова (1903), Михаила Алексеевича Лаврентьева (1900), Николая Николаевича Лузина (1883—1950), Николая Ивановича Мусхелишвили (1891), Ивана Георгиевича Петровского (1901), Владимира Ивановича Смирнова (1887), Андрея Николаевича Тихонова (1906), Александра Яковлевича Хинчина (1894—1959) и других.

Возвращаясь к формуле (V.21), отметим, что название ее до некоторой степени условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Но Ньютон и Лейбниц впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенного интеграла. Эта связь кратко выражается именно формулой (V.21), и поэтому в математической и исторической литературе другого названия кроме формулы Ньютона — Лейбница она не имеет. Но роль Ньютона и Лейбница выходит далеко за рамки создания одной, хотя и очень важной, формулы, поскольку они являются творцами основ математического анализа.

Исаак Ньютон, выдающийся английский физик, механик, астроном и математик, родился 25 декабря 1642 г. (по старому стилю) в деревне Вульстроп, вблизи небольшого города Грэнтэма.

Ньютон сформулировал основные законы классической механики, установил закон всемирного притяжения, закон разложения белого света на монохроматические лучи, разработал независимо от Лейбница дифференциальное и интегральное исчисление (которое он назвал методом флюксий). Ньютон разрабатывал также вопросы интерференции света в тонких пленках, дифракции и поляризации света, вывел формулу для вычисления любой положительной степени бинома, а также выполнил ряд других исследований.

Ньютону принадлежит большое число публикаций, которые он обычно публиковал по прошествии многих лет после самих открытий. Например, как творец метода флюксий Ньютон стал известен только через 30 лет после разработки этого метода, как автор закона всемирного тяготения — через 20 лет и т. д.

Причинами этого были, главным образом, чрезвычайно высокая требовательность Ньютона в отношении точности своих выводов, а также желание избежать дискуссий, которые отвлекали его от научных исследований.

Готфрид Вильгельм Лейбниц, выдающийся немецкий ученый, математик и философ-идеалист, родился в Лейпциге 1 июля 1646 г.

В области математики работы Лейбница охватывают широкий круг вопросов, таких как теория рядов, где он разложил в ряд многие функции, а также вывел критерий сходимости знакопеременных рядов, теории дифференциальных уравнений, теории чисел и т. д. Лейбниц является также изобретателем счетной машины и механизма для приближенного графического интегрирования. Отметим попутно, что машина Лейбница выполняла все четыре основных действия, возведение в степень и извлечение квадратного корня, в то время как созданная через 27 лет аналогичная машина Паскаля производила только сложение и вычитание.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Главной заслугой Лейбница является то, что он (одновременно с Ньютоном) завершил создание основ дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц разработал простейшие правила дифференцирования, определил дифференциал как бесконечно малую разность двух близких значений переменной величины, интеграл — как сумму бесконечного числа дифференциалов, подчеркивая одновременно взаимно обратный характер этих основных операций математического анализа.

Большое внимание Лейбниц уделял также созданию математической символики. Обозначение таких основных понятий математического анализа, как дифференциал dx, второй дифференциал d^2x, интеграл $\int y\,dx$, производная $\frac{d}{dx}$, были предложены Лейбницем. Тот факт, что эти обозначения употребляются до настоящего времени, говорит о том, насколько они удачны.

Хорошо выбранная символика весьма способствует быстроте и легкости производимых выкладок и рассуждений, а, кроме того, удачная символика иногда ограждает нас от ошибочных заключений. Все это Лейбниц хорошо понимал, а поэтому в своем творчестве очень большое внимание уделял выбору обозначений и терминов. В частности, Лейбницу принадлежат такие термины, как «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «координаты», «функция», «алгоритм» и т. д.

Более подробные исторические сведения читатель может найти в книгах [24, 44, 45, 141, 151, 157, 162, 172, 173, 175], а также в соответствующих статьях «Большой Советской Энциклопедии» или «Української Радянської Енциклопедії», откуда мы заимствовали часть материала.

§ 59. Основные свойства определенного интеграла

Формула (V.21), являющаяся основной формулой интегрального исчисления, сводит вычисление определенного интеграла к взятию неопределенного интеграла с последующей операцией двойной подстановки. Благодаря этому определенный

интеграл, унаследовав все свойства неопределенного интеграла, обладает еще рядом свойств, присущих только ему.

Не останавливаясь во всех деталях на этом вопросе, который излагается в любом полном курсе математического анализа, сформулируем только пять основных свойств определенного интеграла.

I. При перемене местами верхнего и нижнего пределов интегрирования определенный интеграл, сохраняя абсолютное значение, меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad \text{(V.23)}$$

II. Для любых трех чисел a, b, c справедливо равенство

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx, \qquad \text{(V.24)}$$

если эти три интеграла существуют.

III. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt. \qquad \text{(V.25)}$$

IV. Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла, т. е.

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \text{(V.26)}$$

V. Определенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме определенных интегралов от каждого слагаемого:

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad \text{(V.27)}$$

Все эти свойства легко доказать при помощи основной формулы интегрального исчисления (V.21). Действительно, согласно (V.21) имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = [F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx,$$

и мы пришли к формулам (V.23) и (V.24).

Далее,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

и, следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt,$$

о чем мы уже говорили в предыдущем параграфе.

Формулы (V.26) и (V.27) доказываются аналогично, если воспользоваться соответствующими свойствами неопределенного интеграла, так что читателю полезно это выполнить в виде упражнения. Отметим также, что формулу (V.27) легко обобщить на случай произвольного числа слагаемых.

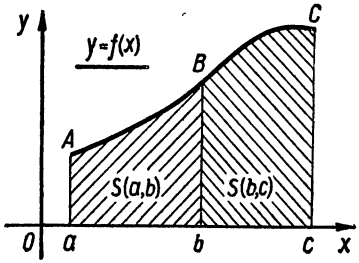


Рис. 159.

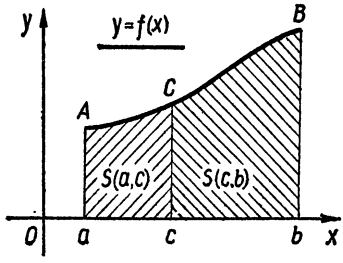


Рис. 160.

Для полноты картины приведем еще два очевидных равенства:

$$\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a \qquad \text{(V.28)}$$

и

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) \equiv 0, \qquad \text{(V.29)}$$

которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Остановимся на геометрической интерпретации формулы (V.24). Пусть точки a, b, c расположены в порядке возрастания аргумента, как показано на рис. 159. Тогда имеем:

$$S(a, c) = S(a, b) + S(b, c),$$

где $S(a, c)$ — площадь трапеции $aACc$, а $S(a, b)$ и $S(b, c)$ — площади трапеций $aABb$ и $bBCc$. Заменив в полученном равенстве каждую из криволинейных трапеций соответствующим ей интегралом, приходим к формуле (V.24). Формула (V.24), как отмечалось, остается справедливой и при любом другом расположении точек a, b, c. Например, если точка b лежит вне промежутка (a, c), то как следует из рис. 160:

$$S(a, c) + S(c, b) = S(a, b),$$

или

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда, после очевидных преобразований, снова приходим к формуле (V.24)

$$\int_a^c = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c,$$

так как согласно (V.23)

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Отметим также, что вместо трех точек a, b, c в формуле (V.24) можно взять любое их число. Например, если взять пять точек a, b, c, d, e, то получим

$$\int_a^e f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^e f(x)\,dx.$$

Доказать эту формулу предоставляем читателю.

§ 60. Вычисление определенного интеграла подстановкой и интегрированием по частям

Для вычисления определенного интеграла при помощи подстановки поступают так же, как и при решении соответствующих примеров § 56. Но при этом есть одна особенность, суть которой заключается в том, что неопределенный интеграл суть *функция*, а определенный интеграл есть *число*.

Как было показано, для того чтобы при помощи подстановки привести заданный неопределенный интеграл к табличному, аргумент выражают через новую переменную, затем находят неопределенный интеграл и полученный результат снова выражают через первоначальный аргумент. *В случае же определенного интеграла возвращаться к первоначальной переменной необходимости нет.* Действительно, вычислив новый интеграл, мы получим некоторое число, а этому и только этому числу будет равняться также исходный интеграл. Необходимые для дальнейшего расчетные формулы выведены при решении примеров.

Пример 1. Найти $\int_1^2 \frac{3x^2dx}{(1+x^3)^2}$.

Решение. Введем новую переменную τ при помощи подстановки $x = \varphi(\tau)$ или обратной к ней подстановки

$$\tau = \psi(x), \tag{V.30}$$

которая во многих случаях быстрее приводит к цели, хотя обе эти подстановки, в принципе, эквивалентны. В данном примере более удобной является подстановка

$$1 + x^3 = \tau;\ 3x^2dx = d\tau. \tag{V.30'}$$

Тогда

$$\frac{3x^2dx}{(1+x^3)^2} = \frac{d\tau}{\tau^2} = \tau^{-2}d\tau,$$

и мы свели заданный интеграл к табличному.

Так как мы ввели новую переменную $\tau = \psi(x)$, связанную с прежней равенством $\tau = 1 + x^3$, то границы изменения переменной $\tau = \tau(x)$, т. е. пределы интегрирования по переменной τ, будут уже другие. Эти новые пределы

$$\alpha = \tau(x)|_{x=a} \quad \text{и} \quad \beta = \tau(x)|_{x=b} \tag{V.31}$$

найдем из равенства (V.30') заменой аргумента x его значениями $x = a = 1$ и $x = b = 2$. Выполнив эту замену, получаем

$\alpha = \tau(a) = 1 + 1^3 = 2$ — новый нижний предел

и

$$\beta = \tau(b) = 1 + 2^3 = 9 \text{ — новый верхний предел,}$$

которые соответствуют исходным нижнему и верхнему пределам $x = a = 1$; $x = b = 2$.

Заменив в заданном интеграле согласно (V.30′) и (V.31) подынтегральное выражение и пределы интегрирования, завершаем решение примера:

$$\int_1^2 \frac{3x^2 dx}{(1 + x^3)^2} = \int_2^9 \frac{d\tau}{\tau^2} = -\frac{1}{\tau}\Big|_2^9 = -\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{18}.$$

Замечание 1. Формулы (V.31), по которым вычислялись новые пределы $\alpha = \tau(a)$ и $\beta = \tau(b)$, носят вполне общий характер и остаются справедливыми в случае любой подстановки (V.30), а не только для подстановки (V.30′)

$$\tau = 1 + x^3,$$

которой мы воспользовались при решении примера 1.

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x\, dx$.

Решение. Положим

$$\sin x = \tau; \quad \cos x\, dx = d\tau, \tag{V.30″}$$

а затем по формулам (V.31) найдем новые пределы, соответствующие заданным значениям $x = a = 0$ и $x = b = \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \sin x|_{x=0} = 0; \quad \beta = \sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Следовательно, в результате подстановки (V.30″) получаем

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x\, dx = \int_0^1 e^{\tau} d\tau = e^{\tau}\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 = 1{,}71828\ldots,$$

что и является окончательным ответом.

Упражнение 1. Вычислить при помощи подстановки следующие определенные интегралы:

а) $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos x \sin^3 x\, dx$; б) $\int_1^{+\sqrt{2}} \frac{2x\, dx}{1 + x^2}$; в) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 2}$.

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Решение. Введем замену $\tau = \arcsin x$ или (переходя к функции $x = \varphi(\tau)$, обратной по отношению к $\tau = \psi(x)$, что в данном примере более удобно)

$$x = \sin\tau; \quad dx = \cos\tau\, d\tau. \tag{V.30‴}$$

Значению $x=0$ отвечает $\tau=0$, а значению $x=1$ соответствует $\tau=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, получаем:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\tau}\cdot\cos\tau\,d\tau=\int_0^{\pi/2}\cos^2\tau\,d\tau=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\tau}{2}\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\,\tau\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{4}\sin 2\tau\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

поскольку $\sin 2\tau|_{\tau=\pi/2}=\sin\pi=0$, а для нижнего предела интегрирования $\tau=0$ обе первообразные, τ и $\sin 2\tau$, обращаются в нуль. Легко также непосредственным дифференцированием проверить, что

$$\int\cos 2\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\sin 2\tau+C.$$

С геометрической точки зрения $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью ординат, кривой $y=\sqrt{1-x^2}$ и отрезком $[0;\,1]$ оси абсцисс (рис. 161). Из равенства $y=\sqrt{1-x^2}$ получаем $x^2+y^2=1$, так что кривая $y=\sqrt{1-x^2}$ на рис. 161 (причем радикал надо брать со знаком плюс) представляет собой четверть окружности радиуса $r=1$ с центром в начале координат, расположенную в первом квадранте. Площадь четверти окружности радиуса $r=1$ равна $\frac{\pi}{4}$, а именно это значение мы и получили, вычисляя заданный интеграл.

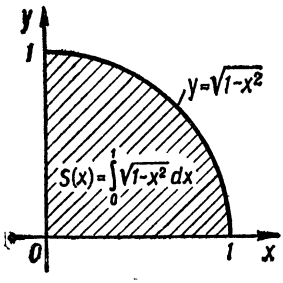


Рис. 161.

В результате подстановки мы пришли к интегралу $\int_0^{\pi/2}\cos^2\tau\,d\tau$. Подынтегральная кривая $y=\cos^2\tau$ изображена на рис. 162. Таким образом, вычисление площади четверти круга свелось к вычислению площади новой криволинейной трапеции $S(\tau)$, равновеликой исходной $S(x)$. Отсюда ясно, что и пределы нового интеграла (или по крайней мере один из них) должны измениться*. В свою очередь, вычисление площади новой трапеции

$$S(\tau)=\int_0^{\pi/2}\cos^2\tau\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\tau+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\tau\,d\tau$$

свелось к вычислению площадей двух трапеций, определяемых интегралами $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\tau=\frac{\pi}{4}$ и $\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos 2\tau\,d\tau=0$. Первая из них представляет собой прямоуголь-

* В отдельных частных случаях оба предела могут оставаться прежними. Например, подстановка $x^2=\tau$ сохраняет неизменными пределы $x=a=0$ и $x=b=1$, так как в этом случае согласно (V.31) получаем $\alpha=\tau(0)=0$; $\beta=\tau(1)=1$.

ник с основанием $\frac{\pi}{2}$ и высотой равной $^1/_2$. Площадь второй трапеции, ограниченной подынтегральной кривой $y = \frac{1}{2}\cos 2\tau$, равна нулю, поскольку равна нулю алгебраическая сумма площадей двух ее равных частей, расположенных выше и ниже оси абсцисс (рис. 163).

Упражнение 2. Найти следующие определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{0}^{1} x^2 (2+x^3)^5\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$.

Построить рисунки, иллюстрирующие выполненную замену.

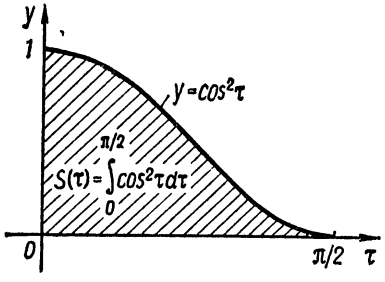


Рис. 162.

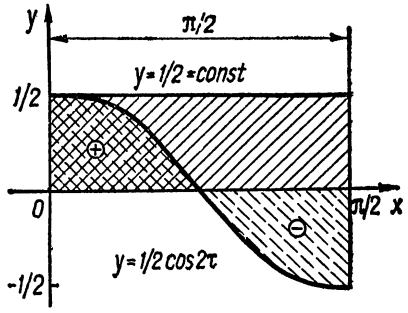


Рис. 163.

Замечание 2. Если мы вводим подстановку $x = \varphi(\tau)$, то функция $\varphi(\tau)$ должна быть непрерывной, однозначной и иметь непрерывную производную на сегменте $[\alpha, \beta]$. В противном случае результаты могут оказаться неверными. Например, введя в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{+1} dx = x\Big|_{-1}^{+1} = 1 - (-1) = 2$$

вместо x новую независимую переменную τ при помощи формулы

$$\tau = x^2;\ \alpha = \tau(-1) = (-1)^2 = +1;\quad \beta = \tau(+1) = (\pm 1)^2 = \pm 1,$$

получим новый интеграл с одинаковыми пределами $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, который согласно (V.29) будет равен нулю. Ошибка происходит вследствие того, что функция $x = \sqrt{\tau}$ есть функция многозначная.

Переходим к интегрированию по частям.

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Тогда

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Интегрируя в пределах от a до b это тождество, получаем

$$\int\limits_a^b (uv)'\,dx = \int\limits_a^b u'v\,dx + \int\limits_a^b uv'\,dx.$$

Но поскольку $u'dx = du$, $v'dx = dv$, $\int (uv)'\,dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$,

так что полученный результат можно записать в виде

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$$

или окончательно

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{V.32}$$

Это и есть формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Заметим, что мы ее можем получить непосредственно из формулы (V.17) § 57, применив к первообразным операцию двойной подстановки.

Пример 4. Вычислить $\int_{-1}^{+1} xe^x\,dx$.

Решение. Положим

$$u = x;\quad dv = e^x\,dx,$$

тогда

$$du = dx;\quad v = \int e^x\,dx = e^x + C.$$

Подставив эти результаты в формулу (V.32), получаем

$$\int_{-1}^{+1} xe^x\,dx = xe^x\Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} e^x\,dx = [e - (-e^{-1})] - e^x\Big|_{-1}^{+1} =$$

$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) - (e - e^{-1}) = \frac{2}{e} = 0{,}73575888\ldots$$

Упражнение 3. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int_{-1}^{+1} x^2e^x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$; в) $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$.

Пример 5. [102, т. 1, стр. 402; 125, т. I, стр. 235; 149, т. I, стр. 343]. Вычислить интеграл

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$$

при натуральном m.

Решение. Представив $\sin^m x = \sin^{m-1} x \cdot \sin x = \sin^{m-1} x \cdot (-\cos x)'$ и интегрируя по частям, находим

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^{m-1}x}_{u} \cdot \underbrace{d(-\cos x)}_{dv} = -\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2}x\cos^2 x\,dx.$$

Двойная подстановка обращается в нуль, так как при $x=\frac{\pi}{2}$ имеем $\cos x=0$, а при $x=0$ $\sin x=0$. Представив $\cos^2 x$ как $1-\sin^2 x$, получаем

$$I_m=(m-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\,(1-\sin^2 x)\,dx=(m-1)\left\{\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\,dx-\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx\right\}$$

или, заменяя интегралы в соответствии с введенным обозначением,

$$I_m=(m-1)\,I_{m-2}-(m-1)\,I_m.$$

Решив это уравнение относительно I_m, приходим к рекуррентной формуле

$$I_m=\frac{m-1}{m}\,I_{m-2}, \tag{V.33}$$

которая приводит интеграл I_m к такому же интегралу, но с индексом $m-2$, т. е. с индексом, уменьшенным на две единицы.

Воспользовавшись тем же приемом, найдем

$$I_{m-2}=\frac{m-3}{m-2}\,I_{m-4},$$

а поэтому

$$I_m=\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)}\,I_{m-4}.$$

Продолжая этот процесс и учтя, что при $m=0$ $\sin^m x=\sin^0 x=1$, мы получим либо

$$I_0=\int_0^{\pi/2}dx=x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2},$$

либо

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$$

в зависимости от того, будет ли m числом четным ($m=2\nu$) или нечетным ($m=2\nu+1$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$).

Таким образом, приходим к следующим окончательным результатам:

$$I_{2\nu}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}x\,dx=\frac{2\nu-1}{2\nu}\cdot\frac{2\nu-3}{2\nu-2}\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{V.34}$$

$$I_{2\nu+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu+1}x\,dx=\frac{2\nu}{2\nu+1}\cdot\frac{2\nu-2}{2\nu-1}\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1. \tag{V.35}$$

Упражнение 4. Вычислить интеграл $I_m^*=\int_0^{\pi/2}\cos^m x\,dx$.

Указание. В результате подстановки $x=\frac{\pi}{2}-\tau$ интеграл I_m^* переходит в уже рассмотренный интеграл I_m.

§ 61. Формула Валлиса

Из формул (V.34) и (V.35) легко вывести знаменитую *формулу Валлиса*, которая была опубликована в 1655 г. в его «Арифметике бесконечных величин».

Действительно, разделив почленно эти равенства, находим

$$\frac{\pi}{2}=\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2\nu+1}\cdot\frac{I_{2\nu}}{I_{2\nu+1}}. \tag{V.36}$$

Докажем, что при $\nu\to\infty$ отношение $\dfrac{I_{2\nu}}{I_{2\nu+1}}\to 1$.

Для всех $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, при которых $0<\sin x<1$, справедливы неравенства

$$\sin^{2\nu+1}x<\sin^{2\nu}x<\sin^{2\nu-1}x.$$

Проинтегрировав эти неравенства в пределах от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ и воспользовавшись введенным в предыдущем параграфе обозначением I_m, получаем

$$I_{2\nu+1}\leqslant I_{2\nu}\leqslant I_{2\nu-1},$$

откуда

$$1\leqslant\frac{I_{2\nu}}{I_{2\nu+1}}\leqslant\frac{I_{2\nu-1}}{I_{2\nu+1}}. \tag{V.37}$$

Но из равенства (V.33) вытекает, что

$$\frac{I_{2\nu-1}}{I_{2\nu+1}}=\frac{2\nu+1}{2\nu}.$$

Следовательно, переходя к пределу, имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{I_{2\nu-1}}{I_{2\nu+1}}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{2\nu+1}{2\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{2\nu}\right)=1,$$

а в таком случае и

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{I_{2\nu}}{I_{2\nu+1}}=1,$$

поскольку правая часть двойного неравенства (V.37) также стремится к единице.

Переходя к пределу в (V.36), получаем формулу Валлиса*

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{\nu\to\infty}\left\{\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2\nu+1}\right\}, \tag{V.38}$$

выражающую число π в виде бесконечного произведения. Исторически это была первая формула, которая установила замечательно простую связь между трансцендентным числом π и целыми числами. Так, задаваясь любым конечным значением числа ν, мы можем при помощи одних только рациональных действий (умножений и делений) вычислить приближенное значение π.

* В оригинале Валлисом была найдена формула для $\dfrac{4}{\pi}$.

В табл. 26 выполнены с шестью десятичными знаками все необходимые вычисления для $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots, 30$, причем для стоящего под знаком предела выражения введено обозначение

$$\Pi_\nu = \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\nu}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu - 1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2\nu + 1}. \qquad (V.39)$$

Таблица 26

ν	$\frac{2\nu}{2\nu-1}$	$\frac{2\cdot4\cdots2\nu}{1\cdot3\cdots(2\nu-1)}$	$2\nu+1$	Π_ν	$\Pi_\nu - \Pi_{\nu-1}$
1	2 : 1	2,000000	3	1,333333	—
2	4 : 3	2,666667	5	1,422223	0,088890
3	6 : 5	3,200000	7	1,462857	0,040634
4	8 : 7	3,657143	9	1,486077	0,023220
5	10 : 9	4,063492	11	1,501088	0,015011
6	12 : 11	4,432900	13	1,511585	0,010497
7	14 : 13	4,773892	15	1,519336	0,007751
8	16 : 15	5,092151	17	1,525294	0,005958
9	18 : 17	5,391689	19	1,530016	0,004722
10	20 : 19	5,675462	21	1,533851	0,003835
11	22 : 21	5,945722	23	1,537027	0,003176
12	24 : 23	6,204232	25	1,539700	0,002673
13	26 : 25	6,452401	27	1,541981	0,002281
14	28 : 27	6,691379	29	1,543950	0,001969
15	30 : 29	6,922116	31	1,545667	0,001717
16	32 : 31	7,145410	33	1,547178	0,001511
17	34 : 33	7,361938	35	1,548518	0,001340
18	36 : 35	7,572279	37	1,549714	0,001196
19	38 : 37	7,776935	39	1,550788	0,001074
20	40 : 39	7,976344	41	1,551758	0,000970
21	42 : 41	8,170889	43	1,552638	0,000880
22	44 : 43	8,360910	45	1,553440	0,000802
23	46 : 45	8,546708	47	1,554175	0,000735
24	48 : 47	8,728553	49	1,554850	0,000675
25	50 : 49	8,906687	51	1,555472	0,000622
26	52 : 51	9,081328	53	1,556048	0,000576
27	54 : 53	9,252674	55	1,556581	0,000533
28	56 : 55	9,420904	57	1,557078	0,000497
29	58 : 57	9,586183	59	1,557541	0,000463
30	60 : 59	9,748661	61	1,557974	0,000433

Таким образом, при $\nu = 30$ мы получили

$$\Pi_{30} = 1{,}557974 \approx 1{,}56; \quad \frac{\pi}{2} \approx \Pi_{30} = 1{,}56; \quad \pi \approx 3{,}12,$$

что от точного значения $\pi = 3{,}14159\ldots$ отличается на две сотых. Продолжая эти вычисления, найдем последовательно при $\nu = 40$, 50, 60: $\Pi_{40} = 1{,}561129$; $\Pi_{50} = 1{,}563039$; $\Pi_{60} = 1{,}564318$; $\pi \approx 2\Pi_{60} = 3{,}13$.

Проанализировав полученные результаты, видим, что сходимость вычислительного процесса довольно медленная, что хорошо иллюстрирует быстрота убывания величины $\Pi_\nu - \Pi_{\nu-1}$. Поэтому формула Валлиса, которая и до настоящего времени широко используется в теоретических исследованиях, для вычисления числа π малопригодна; мы в дальнейшем рассмотрим другие методы, гораздо более эффективные.

Упражнение. Продолжить вычисление табл. 26 до $\nu = 60$ включительно.

Указание. Для того чтобы вычислить очередное значение

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\nu-2)\cdot 2\nu}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-3)\cdot(2\nu-1)}=\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\nu-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-3)}\right]\cdot\frac{2\nu}{2\nu-1},$$

необходимо найденную в предыдущей строке при $\nu-1$ величину

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2\nu-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-3)}$$

умножить на 2ν и разделить на $2\nu-1$. Возведя результат в квадрат и разделив его на $2\nu+1$, получаем согласно (V.39) очередное значение Π_ν. Для контроля результатов воспользуйтесь значениями Π_ν при $\nu=35$, 45, 55:

$$\Pi_{35}=1{,}559773;\quad \Pi_{45}=1{,}562189;\quad \Pi_{55}=1{,}563736,$$

а также приведенными выше значениями Π_{40}, Π_{50}, Π_{60}.

§ 62. Определенный интеграл как предел суммы

Вернемся к задаче об определении площади $S(a, b)$ криволинейной трапеции $aABb$, которой мы занимались в § 58. Применим другой, более общий, подход к решению этой задачи.

Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей, обозначив абсциссы точек деления через

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b. \tag{V.40}$$

В результате искомая площадь будет разбита на n полос, ширина которых

$$\Delta x_j=\Delta x=\frac{b-a}{n}. \tag{V.41}$$

Площадь каждой из этих элементарных полос вычислить с помощью $f(x)$ так же трудно, как и всю площадь $S(a, b)$. Но если мы в каждом из частичных интервалов заменим значение $f(x_j)$ его наименьшим или наибольшим значением, то получим две ступенчатые фигуры, которые обозначим соответственно s_n и S_n (рис. 164 и 165). Первая из них, являясь вписанной фигурой, имеет, очевидно, площадь, меньшую искомой площади $S(a, b)$, а вторая, как описанная фигура, — большую, т. е. имеет место соотношение

$$s_n<S(a, b)<S_n. \tag{V.42}$$

Величины s_n и S_n легко вычислить непосредственно. Действительно, площадь каждого элементарного прямоугольника равна произведению $f(x_j)\cdot\Delta x$, так как его высотой является ордината $y=f(x_j)$, восставленная в соответствующей точке деления x_j, а основания $\Delta x_j=\Delta x$ всех этих прямоугольников равны между собой. В таком случае согласно рис. 164 и 165 имеем:

$$s_n=f(x_0)\,\Delta x+f(x_1)\,\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\,\Delta x$$

и

$$S_n=f(x_1)\,\Delta x+f(x_2)\,\Delta x+\cdots+f(x_n)\,\Delta x,$$

или более кратко

$$s_n=\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\,\Delta x;\quad S_n=\sum_{j=1}^{n}f(x_j)\,\Delta x. \tag{V.43}$$

При сокращенной форме записи для обозначения суммы употребляется обычно прописная греческая буква Σ (сигма), соответствующая латинской букве S или русской С. Под знаком Σ стоит выражение, показывающее, какого типа слагаемые y_j мы суммируем, а каждое элементарное слагаемое обозначается индексом суммирования* j; в данном конкретном случае $y_j = f(x_j)\,\Delta x_j$. Пределы суммирования ставят соответственно под и над знаком Σ, так что при вычислении s_n (т. е. площади вписанной ступенчатой фигуры) суммируем от $j = 0$ до $j = n - 1$, а при вычислении S_n — от $j = 1$ до $j = n$.

Устремим теперь n к ∞, т. е. увеличим беспредельно число точек деления $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. В таком случае площадь криволинейной трапеции $S(a, b)$ будет равна общему пределу величин s_n и S_n:

$$S(a, b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x, \qquad (V.44)$$

причем согласно (V.41) все $\Delta x_j = \Delta x$ будут одновременно стремиться к нулю.

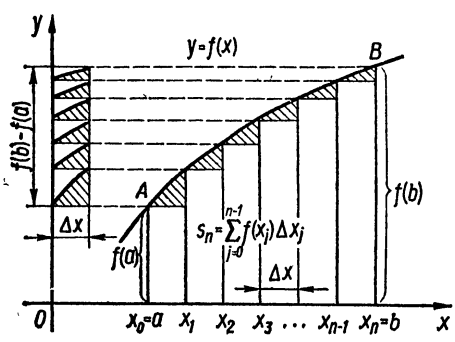


Рис. 164.

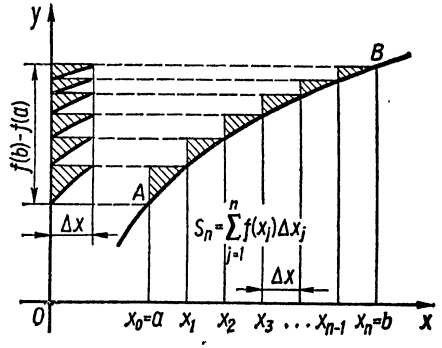


Рис. 165.

В самом деле, площадь криволинейной трапеции $S(a, b)$ отличается от площади вписанной ступенчатой фигуры s_n на сумму площадей криволинейных треугольников, заштрихованных на рис. 164. Если мы перенесем эти треугольники параллельно самим себе и расположим у оси ординат, то их суммарная площадь будет меньше площади прямоугольника с высотой $H = f(b) - f(a)$ и основанием Δx. Так как при $n \to \infty$ согласно (V.41) $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(b) - f(a)]\,\Delta x = 0$$

и, следовательно,

$$S(a, b) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)\,\Delta x.$$

Воспользовавшись рис. 165, совершенно аналогично доказываем, что

$$S(a, b) = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x.$$

Изложенный выше прием остается в силе и для вычисления площади $S(a, b)$ фигуры, представленной на рис. 154, т. е. для случая, когда функция $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ не монотонная. Заметим также, что случай, когда $y = f(x)$ при-

* Для обозначения индекса суммирования вместо j часто употребляют также другие буквы, например i, k, n, ν и т. д.

нимает и отрицательные значения, исчерпывается принятым в § 58 условием считать площади частей фигуры под осью абсцисс отрицательными.

Для обозначения предельного значения суммы вида $\sum y\Delta x$ Лейбниц ввел символ $\int y\,dx$, где $y\,dx$ напоминает типичное слагаемое суммы, а $\int$, как уже отмечалось, есть стилизованная буква S — начальная буква латинского слова Summa. Термин «интеграл», происходящий от латинского слова integer — целый, восстановленный был предложен учеником и последователем Лейбница Иоганном Бернулли; сам же Лейбниц вначале говорил: «сумма всех $y\,dx$». Предложенный Бернулли термин подчеркивает, что интеграл получен в результате суммирования, т. е. восстановлен путем сложения его элементов.

Так как площадь, представляющая рассматриваемое предельное значение, в то же время является первообразной (неопределенным интегралом) для функции $f(x)$, то этот же символ был сохранен и для обозначения первообразной функции $\int f(x)\,dx$. Для обозначения определенного интеграла французский математик и физик Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptiste Joseph de Fourier, 1768—1830) предложил символ

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

который является теперь общеупотребительным. Эйлер писал более громоздко:

$$\int P\,dx \begin{bmatrix} \text{от } x = a \\ \text{до } x = b \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что благодаря связи, которая существует между вычислением интегралов и нахождением площадей плоских фигур, т. е. нахождением их *квадратур*, стало обычным и само вычисление интегралов называть *квадратурой*.

Из методических соображений в начале параграфа мы функцию $y = f(x)$ считали монотонной, а точки разбиения (V.40) — расположенными на равных расстояниях Δx одна от другой (см. рис. 164 и 165). Освободимся теперь от этих очень сильных и не вызываемых сутью дела ограничений.

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная и ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция*. Разобъем отрезок $[a, b]$ точками (V.40) на произвольное число равных или неравных частей n (рис. 166). Пусть, далее, ξ_j есть некоторая точка, принадлежащая элементарному отрезку $[x_j, x_{j+1}]$. Составим сумму произведений

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j, \tag{V.45}$$

где под Δx_j будем понимать длину отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ и одновременно приращение аргумента x.

Введем следующее определение.

Определение. *Предел суммы (V.45) при безграничном возрастании числа точек деления n и безграничном уменьшении каждого из отрезков Δx_j называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают символом* $\int_a^b f(x)\,dx$.

* Условие непрерывности $f(x)$ также не является обязательным и его можно заменить более слабым условием кусочной непрерывности. Но на этом вопросе мы не имеем возможности здесь остановиться.

Другими словами, согласно этому определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_j \to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \qquad \text{(V.46)}$$

Функция $f(x)$ в рассматриваемом случае называется *интегрируемой* в промежутке $[a, b]$, а сумма (V.45) — *интегральной суммой*. Если при этом в качестве

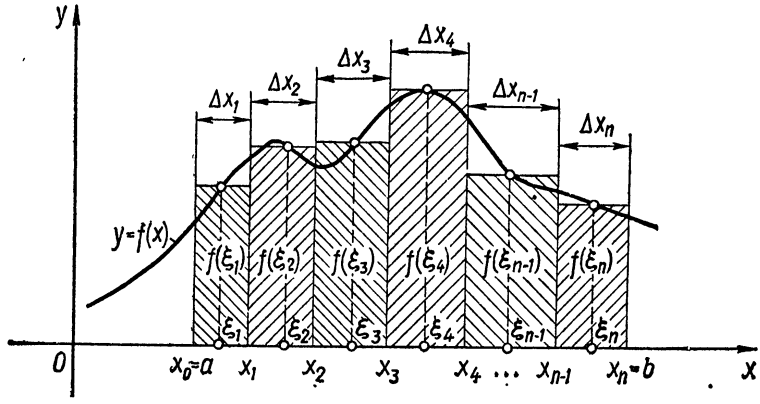


Рис. 166.

ξ_j выберем точки, соответствующие наименьшему или наибольшему значению функции $f(x)$ в j-м промежутке $\Delta x_j = [x_j, x_{j+1}]$:

$$m_j \leqslant f(\xi_j) \leqslant M_j,$$

то согласно (V.45) получим соответственно нижнюю и верхнюю интегральные суммы:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j; \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j.$$

Суммы, построенные на рис. 164 и 165, и представляют собой нижнюю и верхнюю интегральные суммы для монотонной функции при $\Delta x_j = \Delta x = \text{const}$.

Для полной строгости читателю остается доказать, что величина предела $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ есть величина постоянная и что она не зависит ни от выбора точек деления (V.40) промежутка $[a, b]$, ни от того, каким образом выбраны промежуточные значения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в частичных интервалах. Существенным является только то, чтобы при $n \to \infty$ *все без исключения* отрезки Δx_j стремились к нулю, а именно это и будет обеспечено, если потребовать, чтобы к нулю стремился максимальный из отрезков Δx_j (тогда все остальные отрезки Δx_j будут стремиться к нулю еще быстрее).

Геометрически предел (V.46), как и прежде, представляет собой площадь криволинейной трапеции $S(a, b)$. Но, определив интеграл при помощи предела (V.46), мы можем и не прибегать к геометрической интерпретации, а подразумевать под величинами x и $f(\xi_j)$ какие-либо другие физические величины или просто абстрактные числа. В дальнейшем мы увидим, что многие технические задачи приводят к необходимости вычислять предел (V.46), т. е. решение этих задач легко может быть осуществлено при помощи интегрирования.

Более того, само понятие площади, которое мы представляли себе только интуитивно, получает теперь точное математическое определение: *площадь это есть предел (V.46)*. Для того чтобы уяснить, что эти вопросы не так просты, как кажутся с первого взгляда, предлагаем читателю представить себе площадь, ограниченную отрезком кривой Римана, которая во всех рациональных точках равна нулю, а во всех иррациональных точках равна единице. Однако на этих вопросах мы не имеем возможности остановиться более подробно и рекомендуем читателю обратиться к более полным курсам анализа, указанным в списке цитированной литературы.

§ 63. Численное интегрирование. Формула трапеций и формула Симпсона

В случае, когда функцию нельзя проинтегрировать аналитическим путем или когда аналитическое интегрирование требует большого объема работы, можно пользоваться численными методами*. Эти методы дают возможность вычислить определенный интеграл, если он существует и если численные значения подынтегральной функции известны. Формулы, при помощи которых ведется численное интегрирование, получили название *квадратурных формул*. Из них наиболее распространенными и удобными являются формула трапеций и формула парабол, или формула Симпсона, к выводу которых мы переходим.

Определенный интеграл

$$S = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{V.47}$$

как показано в § 58, численно равен площади криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 167). Для того чтобы найти приближенное значение площади S, разделим отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ на n равных частей, восставим из этих точек ординаты $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$ и соединим последовательно их верхние концы прямыми. В результате криволинейную трапецию $aABb$ мы заменим суммой n элементарных прямолинейных трапеций, площади которых $s_1, s_2, \ldots, s_n$ легко вычислить.

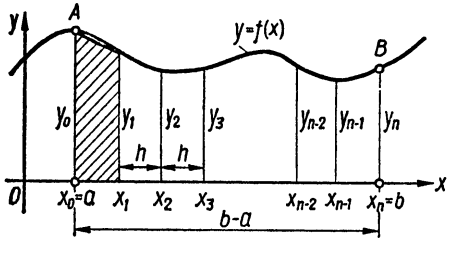


Рис. 167.

Величину Δx, равную основанию каждой из элементарных трапеций, обозначим буквой h и будем называть *шагом квадратурной формулы*. Так как

$$\Delta x = h = \frac{b-a}{n},$$

а средняя линия каждой из элементарных трапеций равна полусумме соответствующих ординат, то площадь s_1 первой из них (заштрихованной на рис. 167)

$$s_1 = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} = h\,\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

* Более подробно численные методы изложены в третьей части книги. Поэтому рекомендуем читателю до § 63 предварительно прочесть § 72—76 гл. VI.

Аналогично

$$s_2 = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = h\frac{y_1 + y_2}{2},$$

. . . . . .

$$s_n = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2} = h\frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

и, следовательно,

$$S = s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $y_k = f(x_k)$, получаем искомую *формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] =$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j), \qquad \text{(V.48)}$$

где $c_j = 1, 2, 2, \ldots, 2, 1$.

Чем больше число n, тем точнее, при прочих равных условиях, формула (V.48). Исключение составляет лишь тот очевидный случай, когда функция $f(x)$ линейна, тогда формула (V.48) дает точные результаты при $n = 2$.

Переходим к выводу *формулы парабол*. Для этого соединим вершины каждых трех ординат (см. рис. 167) дугами квадратичных парабол, оси которых параллельны оси y. Таким образом, вместо каждых двух элементарных прямолинейных трапеций будем рассматривать одну элементарную трапецию, ограниченную параболической дугой. Площади этих трапеций обозначим

$$s_{12};\ s_{34};\ s_{56};\ \ldots;\ s_{n-1,\,n}.$$

Рассмотрим первую из них. Для упрощения вычислений перенесем ось ординат параллельно самой себе так, чтобы она шла вдоль ординаты y_0 (рис. 168). Ясно, что от этого величина площади s_{12} не изменится.

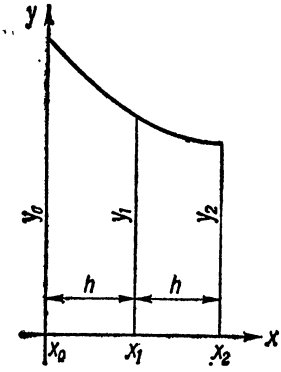


Рис. 168.

Уравнение квадратичной параболы, ось которой параллельна оси y, есть

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2. \qquad \text{(V.49)}$$

Парабола (V.49) будет проходить через точки подынтегральной кривой $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, если мы коэффициенты A_0, A_1, A_2 подберем так, чтобы координаты рассматриваемых точек удовлетворяли уравнению (V.49).

Так как $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, то, подставив эти значения в уравнение (V.49), получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= A_0, \\ y_1 &= A_0 + A_1 h + A_2 h^2, \\ y_2 &= A_0 + 2A_1 h + 4A_2 h^2, \end{aligned}\right\}$$

решив которую, находим

$$A_0 = y_0;\quad A_1 = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h};\quad A_2 = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}. \qquad \text{(V.50)}$$

Площадь s_{12} согласно формуле (V.47) определяется интегралом

$$s_{12} = \int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)\,dx = 2A_0 h + 2A_1 h^2 + \frac{8}{3} A_2 h^3.$$

Подставив найденные значения A_0, A_1, A_2 и приведя подобные члены, имеем

$$s_{12} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Аналогично

$$s_{34} = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$s_{56} = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{n-1,\,n} = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Следовательно,

$$S = s_{12} + s_{34} + s_{56} + \cdots + s_{n-1,\,n} =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Отсюда находим формулу парабол, которую называют также *формулой Симпсона**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) +$$

$$+ 2f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

или в более компактном виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j), \tag{V.51}$$

где $c_j = 1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 2, 4, 1$; $n = 2\nu$; $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Подчеркнем, что, в то время как в формуле трапеций n есть число произвольное, в формуле Симпсона оно всегда должно быть четным: $n = 2\nu$; $\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Абсолютные погрешности для формул трапеций и парабол оцениваются такими формулами:

$$\varepsilon_{\text{тр}} \leqslant \frac{h^2(b-a)M_2}{12}; \tag{V.52}$$

$$\varepsilon_{\text{пар}} \leqslant \frac{h^4(b-a)M_4}{180}, \tag{V.53}$$

где

$$M_2 = \max|f''(x)|; \quad M_4 = \max|f^{IV}(x)|$$

* Эту формулу (в геометрическом виде) впервые рассмотрел Кавальери в 1639 г., а позже — Грегори в 1668 г. и Симпсон в 1743 г. Кроме того, Симпсон (Tomas Simpson, 1710—1761) начал систематически применять её в своих исследованиях.

суть максимальные значения модуля второй и четвертой производной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Таким образом, формула (V.48) дает точные результаты только для линейной функции, а формула (V.51) — для полинома не выше третьей степени, для которого $f^{IV}(x) \equiv 0$.

Формулы (V.52) и (V.53) можно применять только в тех случаях, когда существуют и легко вычисляются (или оцениваются) соответственно производные $f''(x)$ и $f^{IV}(x)$, что на практике, т. е. при реальных вычислениях, встречается, к сожалению, очень редко. Однако с помощью этих формул можно получить удобные оценки погрешности, которые довольно часто могут обеспечить надежные результаты.

Допустим, что интеграл

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

вычислен по формуле Симпсона дважды при различных значениях h. Пусть I_1, h_1, ε_1 соответственно обозначают найденный результат, значение шага h и погрешность первого вычисления, а I_2, h_2, ε_2 — те же величины при втором вычислении.

Тогда согласно формуле (V.53) имеем

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{h_1^4}{h_2^4}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^4 \varepsilon_2. \tag{V.54}$$

Отсюда, в частности, если $h_2 = \frac{1}{2} h_1$, получаем

$$\varepsilon_1 = 16\varepsilon_2$$

и для точного значения интеграла S при двух вычислениях с шагом h_1 и $h_2 = \frac{1}{2} h_1$ имеем

$$S = I_1 + \varepsilon_1 = I_1 + 16\varepsilon_2,$$
$$S = I_2 + \varepsilon_2.$$

Отняв верхнее уравнение от нижнего, находим

$$\varepsilon_2 = \frac{I_2 - I_1}{15},$$

или, применяя более общие обозначения,

$$\varepsilon_{2n} = \frac{I_{2n} - I_n}{15}. \tag{V.55}$$

Следовательно, если мы вычислим по формуле Симпсона интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

разделив сегмент $[a, b]$ первый раз на n частей, а второй раз — на $2n$ частей, то для второго результата I_{2n} погрешность приблизительно будет равняться $\frac{1}{15}$ разности результатов $I_{2n} - I_n$.

Отсюда получаем такое правило для приближенной оценки результата: *число верных знаков значения I_{2n} на единицу больше числа общих знаков, которые имеют значения I_{2n} и I_n.*

Если погрешность найденного результата больше допустимой, то необходимо увеличить число точек деления и тем самым уменьшить h. Согласно (V.54) требуемое значение h будет выражаться формулой

$$h = h_1 \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_{\text{доп}}}{\varepsilon_1}} \qquad \text{(V.56)}$$

где $\varepsilon_{\text{доп}}$ — допустимая погрешность. В частности, при каждом удвоении числа точек деления сегмента $[a, b]$ погрешность формулы Симпсона уменьшается примерно в 16 раз.

Подчеркнем еще раз, что формулы (V.53) — (V.56) справедливы при непременном выполнении того условия, что на рассматриваемом сегменте $[a, b]$ подынтегральная функция должна иметь непрерывную и ограниченную четвертую производную. Однако фактически вычислять эту производную, что в большинстве случаев сопряжено со значительными трудностями, надобности нет, а необходимо только вычислить по очень простой формуле (V.51) I_n, I_{2n} и сравнить их между собой.

Пример 1. Вычислить по формуле Симпсона с пятью значащими цифрами интеграл

$$I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 5x + 1)\,dx.$$

Решение. Чтобы обеспечить требуемую точность, подынтегральную функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ будем вычислять с одной запасной цифрой, т. е. с шестью значащими цифрами (а в ответственных случаях лучше брать две запасные цифры).

Возьмем $n = 8$. Все необходимые вычисления приведены в табл. 27, причем в данном примере $a = 0$, $b = 1$, $\Delta x = h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Для того чтобы по найденным $y_j = f(x_j)$ вычислить $\sum_8 = \sum_{j=0}^{8} c_j f(x_j)$, надо согласно формуле (V.51) каждое из значений $f(x_j)$ умножить на соответствующий коэффициент c_j, который в табл. 27 стоит в той же строке, и сложить результаты. Все эти вычисления выполняются на арифмометре в один прием без промежуточных записей (подробнее о технике вычислений сказано в гл. VI).

Умножив найденную при $n = 8$ сумму $\sum_8$ на $\frac{h}{3} = \frac{1}{24}$ и, соответственно, сумму $\sum_4 = \sum_{j=0}^{4} c_j f(x_j)$ на $\frac{2h}{3} = \frac{1}{12}$ при $n = 4$ (т. е. при шаге, увеличенном в два раза), получаем

$$I_8 = \frac{\Sigma_8}{24} = \frac{72{,}000000}{24} = 3{,}000000 \text{ при } n = 8,$$

$$I_4 = \frac{\Sigma_4}{12} = \frac{36{,}000000}{12} = 3{,}000000 \text{ при } n = 4.$$

Так как результаты совпали, то согласно формуле (V.55) все вычисленные знаки верные, и, действительно, выполнив в данном примере непосредственно интегрирование, имеем

$$I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 5x + 1)\,dx = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{5}{2} + 1 = 3.$$

Таблица 27

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1; \quad I_n = \frac{b-a}{3n} \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j); \quad a=0; \quad b=1$

j	x_j	x_j^2	x_j^3	$f(x_j)$	c_j		
					$n=8$	$n=4$	$n=2$
0	0,000	0,000000	0,000000	1,000000	1	1	1
1	0,125	0,015625	0,001953	1,582031	4	—	—
2	0,250	0,062500	0,015625	2,093750	2	4	—
3	0,375	0,140625	0,052734	2,558593	4	—	—
4	0,500	0,250000	0,125000	3,000000	2	2	4
5	0,625	0,390625	0,244141	3,441407	4	—	—
6	0,750	0,562500	0,421875	3,906250	2	4	—
7	0,875	0,765625	0,669922	4,417969	4	—	—
8	1,000	1,000000	1,000000	5,000000	1	1	1
				$\sum_n = \sum c_j f(x_j) =$	72,000000	36,000000	18,000000

$I_8 = \frac{\sum_8}{24} = 3{,}000000; \quad I_4 = \frac{\sum_4}{12} = 3{,}000000; \quad I_2 = \frac{\sum_2}{6} = 3{,}000000$

Таблица 28

$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x + 1; \quad a = 0; \quad b = 1$

j	x_j	x_j^2	x_j^4	$f(x_j)$	c_j		
					$n=8$	$n=4$	$n=2$
0	0,000	0,000000	0,000000	1,000000	1	1	1
1	0,125	0,015625	0,000244	1,578613	4	—	—
2	0,250	0,062500	0,003906	2,070312	2	4	—
3	0,375	0,140625	0,019775	2,492675	4	—	—
4	0,500	0,250000	0,062500	2,875000	2	2	4
5	0,625	0,390625	0,152588	3,258301	4	—	—
6	0,750	0,562500	0,316406	3,695312	2	4	—
7	0,875	0,765625	0,586182	4,250489	4	—	—
8	1,000	1,000000	1,000000	5,000000	1	1	1
				$\sum_n = \sum c_j f(x_j) =$	69,601560	34,812496	17,500000

$I_8 = \frac{\sum_8}{24} = 2{,}900065; \quad I_4 = \frac{\sum_4}{12} = 2{,}901041; \quad I_2 = \frac{\sum_2}{6} = 2{,}916667$

Повторив те же вычисления при $n = 2$, получаем

$$I_2 = \frac{\Sigma_2}{6} = \frac{18{,}000000}{6} = 3{,}000000,$$

т. е. в данном примере формула Симпсона при любом n дает точный результат, как и должно быть, поскольку подынтегральная функция есть полином третьей степени.

Пример 2. Вычислить по формуле Симпсона с пятью значащими цифрами интеграл

$$I = \int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5x + 1)\,dx.$$

Решение. В данном примере подынтегральная функция $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x + 1$, а пределы интегрирования $a = 0$, $b = 1$. Вычисления начнем при $n = 8$, при котором $\Delta x = h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{8} = 0{,}125$, а затем, для того чтобы найти погрешность результата, эти же вычисления повторим при $n = 4$ и $n = 2$. Все необходимые вычисления приведены в табл. 28, согласно которой мы получили

$$I_8 = \frac{\Sigma_8}{24} = 2{,}900065 \text{ при } n = 8,$$

$$I_4 = \frac{\Sigma_4}{12} = 2{,}901041 \text{ при } n = 4,$$

$$I_2 = \frac{\Sigma_2}{6} = 2{,}916667 \text{ при } n = 2.$$

Подставив эти значения в формулу (V.55), находим

$$\varepsilon_8 = \frac{I_8 - I_4}{15} = \frac{2{,}900065 - 2{,}901041}{15} = \frac{-0{,}000976}{15} = -0{,}000065;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{I_4 - I_2}{15} = \frac{2{,}901041 - 2{,}916667}{15} = \frac{-0{,}015626}{15} = -0{,}001042,$$

что полностью согласуется с точным значением искомого интеграла, так как

$$I = \int_0^1 (2x^4 - 3x^2 + 5x + 1)\,dx = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x\Big|_0^1 = \frac{2}{5} - 1 + \frac{5}{2} + 1 = 2{,}9.$$

Однако требуемой в условии примера точности $\varepsilon = \varepsilon_{доп} = 0{,}00001$ мы еще не достигли. Поэтому надо увеличить n, взяв, например, $n = 12$ (и для определения погрешности $n = 6$), а затем повторить все вычисления, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. Шаг $h = h_{доп}$, обеспечивающий заданную точность вычислений (а следовательно, и необходимое для этого n), можно также найти по формуле (V.56).

Замечание. Для того чтобы определить погрешность вычислений по формуле Симпсона, не надо находить новые значения подынтегральной функции $f(x)$, а можно использовать те значения $f(x)$, которые расположены на четных строках расчетной таблицы. Но для этого n надо брать кратным четырем, так как в противном случае при удвоении h мы не получим четного значения для нового n, как того требует формула (V.51). Еще лучшие результаты получим, взяв $n = 8\nu$, т. е. n — кратное восьми. Тогда при незначительной дополнитель-

ной затрате труда мы можем вычислить $I_{8\nu}$, $I_{4\nu}$, $I_{2\nu}$, а по ним определить, соответственно, $\varepsilon_{8\nu}$ и $\varepsilon_{4\nu}$, что наглядно покажет, как быстро уменьшается погрешность с ростом n.

Упражнение 1. Вычислить для примера 2 значения I_8, I_4, I_2 по формуле трапеций, для чего надо в табл. 28 коэффициенты $c_j = 1, 4, 2, 4, \ldots, 2, 4, 1$ заменить на коэффициенты $c_j = 1, 2, 2, \ldots, 2, 1$, как того требует формула (V.48).

Выполнив упражнение 1, найдем

$$I_8 = \frac{\sum_8}{16} = \frac{46{,}441404}{16} = 2{,}902588;\quad I_4 = \frac{23{,}281248}{8} = 2{,}910156;\quad I_2 = 2{,}937500,$$

т. е. результаты с погрешностями

$$\varepsilon_8 = I - I_8 = 2{,}9 - 2{,}902588 = -0{,}002588;\quad \varepsilon_4 = I - I_4 = -0{,}010156;$$
$$\varepsilon_2 = I - I_2 = -0{,}037500,$$

которые значительно превышают погрешности, полученные при использовании формулы Симпсона, хотя объем вычислений по формулам (V.48) и (V.51) практически один и тот же.

Пример 3. Вычислить по формуле Симпсона и формуле трапеций число π, исходя из равенства

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

и определить погрешность вычислений при $n = 10$.

Решение. В данном примере

$$b = 1;\quad a = 0;\quad n = 10;\quad h = 0{,}1;\quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Весь дальнейший ход решения примера ясен из табл. 29, в дополнение к которой надо сделать только следующие замечания. Суммы произведений $\sum_{10} = \sum_{j=0}^{10} c_j f(x_j)$

Таблица 29

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $a = 0$; $b = 1$				Формула		Примечания
j	x_j	$1+x_j^2$	$f(x_j)$	(V.51)	(V.48)	
0	0,0	1,00	1,000000000	1	1	По формуле Симпсона
1	0,1	1,01	0,990099010	4	2	$\sum_{10} = 23{,}561944612$
2	0,2	1,04	0,961538462	2	2	
3	0,3	1,09	0,917431193	4	2	$I_{10} = 0{,}785398154$
4	0,4	1,16	0,862068966	2	2	По формуле трапеций
5	0,5	1,25	0,800000000	4	2	$\sum_{10} = 15{,}699629950$
6	0,6	1,36	0,735294118	2	2	
7	0,7	1,49	0,671140940	4	2	$I_{10} = 0{,}784981498$
8	0,8	1,64	0,609756098	2	2	
9	0,9	1,81	0,552486188	4	2	Точное значение
10	1,0	2,00	0,500000000	1	1	$I = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398163\ldots$

находим, перемножив значения $f(x_j)$ и c_j, которые (как и в примерах 1 и 2) расположены в одних и тех же строках таблицы. Найденные результаты оставляем в результативном счетчике арифмометра и делим соответственно на 30 в случае формулы Симпсона (V.51) или на 20 в случае формулы трапеций (V.48). Поэтому значения сумм можно в табл. 29 не записывать. Мы же это сделали для того, чтобы облегчить читателю работу при дублировании этого примера, которое полезно выполнить.

Найдем теперь согласно формулам (V.52) и (V.53) погрешности вычислений. В данном примере

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

так что

$$f''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}; \quad f^{IV}(x) = +24\frac{1-10x^2+5x^4}{(1+x^2)^5}.$$

На сегменте $[a; b] = [0; 1]$ производные $f''(x)$ и $f^{IV}(x)$ принимают максимальное абсолютное значение в точке $x = 0$.

Следовательно,

$$M_2 = |f''(0)| = 2; \quad M_4 = |f^{IV}(0)| = 24,$$

и согласно формулам (V.52) и (V.53) находим

$$\varepsilon_{тр} = \frac{h^2(b-a)M_2}{12} = \frac{2 \cdot 0{,}01}{12} = 0{,}0017,$$

$$\varepsilon_{пар} = \frac{h^4(b-a)M_4}{180} = \frac{24 \cdot 0{,}0001}{180} = 0{,}000013.$$

Так как точное значение

$$I = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398163...,$$

то фактические погрешности составляют:

$$\varepsilon_{тр} = 0{,}000416665 \approx 0{,}00042; \quad \varepsilon_{пар} = 0{,}000000009;$$

так что формулы (V.52) и (V.53), как обычно бывает при оценке погрешности, дают сильно завышенные результаты.

Упражнения

2. Выполнить пример 3, пользуясь формулой Симпсона, при $n = 8$, $n = 4$, $n = 2$ и определить погрешности этих вычислений по формуле (V.55).

3. Определить для примера 1 погрешность вычислений по формуле трапеций и по формуле Симпсона согласно (V.52) и (V.53).

Выполнив упражнение 2, при $n = 2$ получим $I_2 = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{4}{1{,}25} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4{,}7}{6}$, откуда $\pi \approx 4I_2 = \frac{2 \cdot 4{,}7}{3} = 3{,}133...$. Таким образом, формула Симпсона даже при $n = 2$ дает результаты, несколько лучшие, чем формула Валлиса при $n = 60$. Однако наиболее эффективно число π можно вычислить при помощи рядов, на чем мы остановимся в § 134 гл. X, а вычисление более сложных интегралов по формуле Симпсона будет продолжено в § 66.

Рассмотренные нами формулы трапеций и парабол являются частным случаем (при $m = 1$ и $m = 2$) *общей квадратурной формулы Ньютона—Котеса*, которую получим, заменив подынтегральную функцию полиномом m-й степени. Кроме формулы Ньютона—Котеса есть ряд других квадратурных формул. Наиболее точной из них является *формула Гаусса*, которая при n точках промежутка интегрирования обеспечивает совершенно точные результаты для полинома $(2n + 1)$-й степени. Точки деления в формуле Гаусса берут не на равных расстояниях одна от другой, а выбирают по определенному правилу.

На практике широко применяется также *квадратурная формула Чебышева*, в которой точки деления (также неравномерные) выбраны так, чтобы вес всех значений $f(x_i)$ был одним и тем же (т. е. чтобы все $c_i = 1$). Благодаря этой особенности формула Чебышева дает наиболее обоснованные результаты при вычислении интегралов от функции $f(x)$, найденной экспериментально, когда вероятность погрешности каждого измерения одна и та же. Действительно, в этом случае нет никаких оснований различным значения $f(x_i)$ приписывать различные веса, как, например, в формуле Симпсона, где первое и последнее значения берутся с весом равным 1, все промежуточные нечетные значения — с весом равным 4, а четные — с весом равным 2. Для облегчения вычислений по различным квадратурным формулам составлены специальные таблицы узловых значений и весовых функций. К этим вопросам мы вернемся в § 66.

§ 64. Понятие о математическом моделировании. Определение численного значения интеграла взвешиванием

Площадь произвольной фигуры можно определить с 2-3 значащими цифрами при помощи лабораторных (лучше — аналитических) весов. Для этого вычерчиваем заданную фигуру на плотной бумаге или на тонком картоне, вырезаем ее и взвешиваем; затем находим вес квадратной единицы взятого материала, взвесив вырезанный из данной фигуры круг, параллелограмм, трапецию, треугольник или любую другую *контрольную фигуру*, площадь которой легко вычислить аналитически. Благодаря такой *тарировке* взятого материала в известной мере компенсируется его неоднородность. Результаты можно улучшить, если весь процесс повторить несколько раз и затем найти среднее арифметическое. При тарировке материала можно также воспользоваться не вписанной, а описанной фигурой, площадь которой легко вычисляется. Такую фигуру надо предварительно начертить и взвесить, после чего вырезать и взвесить искомую фигуру. Какую именно — описанную или вписанную — контрольную фигуру следует выбрать для тарировки, решаем в зависимости от того, какая из них минимально отклоняется от искомой фигуры, так как чем меньше это отклонение, тем меньшее влияние окажет неоднородность материала на точность результата.

Пример 1. Найти при помощи взвешивания площадь эллипса с полуосями $a = 10$ *см*, $b = 6$ *см*.

Решение. Вычертим заданный эллипс и вокруг него опишем прямоугольник (рис. 169), площадь которого

$$S_{\text{пр}} = 4ab = 240 \text{ см}^2.$$

Обозначив $W_{\text{эл}}$ — вес вырезанного из бумаги или картона эллипса, $W_{\text{пр}}$ — вес описанного прямоугольника, площадь эллипса $S_{\text{эл}}$ найдем из пропорции

$$\frac{S_{\text{эл}}}{S_{\text{пр}}} = \frac{W_{\text{эл}}}{W_{\text{пр}}}, \tag{V.57}$$

так как площади плоских фигур (точнее, объемы соответствующих цилиндрических тел), вырезанные из одного и того же однородного материала постоянной толщины, будут пропорциональны их весам.

Действительно,

$$W_{эл} = \gamma H S_{эл},$$
$$W_{пр} = \gamma H S_{пр},$$

где γ — удельный вес материала, H — его толщина, $HS_{эл}$ — объем эллиптического цилиндра с основавием $S_{эл}$, $HS_{пр}$ — объем параллелепипеда с основанием $S_{пр}$ и высотой H, равной толщине материала. Разделив первое из этих равенств на второе, исключаем неизвестные нам γ и H и в результате приходим к формуле (V.57).

Подставив в (V.57) значение $S_{пр} = 240$ *см*^{2}, получаем окончательную расчетную формулу

$$S_{эл} = \frac{W_{эл}}{W_{пр}} 240 \text{ см}^2.$$

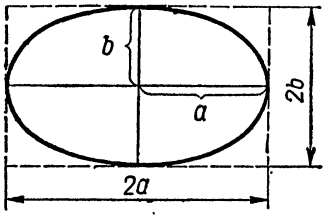


Рис. 169.

В табл. 30 приведены соответствующие результаты, причем первые четыре пробы выполнены на тонком мелованном картоне и взвешены на обычных лабораторных весах, а остальные — выполнены на ватмане и взвешены на аналитических весах. Взяв среднее арифметическое, получим окончательно для проб из картона:

$$S_{эл} \approx 188{,}1; \quad \varepsilon = S_{точн} - S_{прибл} = +0{,}4; \quad \delta = \frac{\varepsilon}{S_{точн}} \cdot 100\% = +0{,}21\%$$

и соответственно для проб из ватмана:

$$S_{эл} \approx 188{,}6; \quad \varepsilon = -0{,}1; \quad \delta = -0{,}05\%.$$

Таблица 30

Проба	1	2	3	4	5	6	7	8
$W_{эл}$, *г*	8,06	8,34	8,24	8,04	3,815	3,788	3,791	3,800
$W_{пр}$, *г*	10,32	10,58	10,50	10,30	4,842	4,828	4,837	4,830
$S_{эл}$, *см*^{2}	187,4	189,2	188,3	187,3	189,1	188,3	188,1	188,8
ε	+1,1	—0,7	+0,2	+1,2	—0,6	+0,2	+0,4	—0,3
δ, %	+0,58	—0,37	+0,11	+0,64	—0,32	+0,11	+0,21	—0,16

Здесь буквами ε и δ обозначены соответственно абсолютная и относительная погрешности искомой величины, о чем подробнее сказано в гл. VI. Точное значение $S_{эл} = S_{точн}$ (с четырьмя значащими цифрами), как показано в § 67, есть

$$S_{эл} = \pi ab = 188{,}5.$$

Таким образом, точность этого очень простого метода, предложенного еще Архимедом, такая же, как и при измерении площади специальным математическим инструментом, который называют *планиметром*.

Точность результатов в обоих случаях зависит главным образом от точности вычерчивания контура, а все последующие операции вносят меньшую погрешность. При этом вырезать ножницами фигуру можно не менее точно, чем обвести ее острием планиметра, а взвешивание легко осуществить с четырьмя (и даже пятью) значащими цифрами.

Пример 2. Найти экспериментальным путем приближенное значение числа π, определив взвешиванием площадь полукруга.

Р е ш е н и е. Возьмем в качестве контрольных фигур прямоугольник $S_{пр}$, описанный вокруг полукруга $S_{пк}$, и вписанный в него треугольник $S_{тр}$ (рис. 170). Тогда, как и в примере 1, будем иметь

$$\frac{S_{пк}}{S_{пр}} = \frac{W_{пк}}{W_{пр}}; \quad \frac{S_{пк}}{S_{тр}} = \frac{W_{пк}}{W_{тр}},$$

где $W_{пр}$, $W_{пк}$, $W_{тр}$ — соответственно веса вырезанных из бумаги прямоугольника, полукруга и треугольника.

Но в данном случае

$$S_{пр} = 2r^2; \quad S_{пк} = \frac{1}{2}\pi r^2; \quad S_{тр} = r^2,$$

так что

$$\frac{W_{пк}}{W_{пр}} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{W_{пк}}{W_{тр}} = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда

$$\pi = 4\frac{W_{пк}}{W_{пр}}, \text{ или } \pi = 2\frac{W_{пк}}{W_{тр}}. \qquad \text{(V.58)}$$

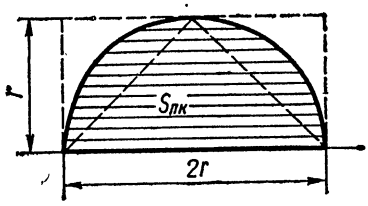


Рис. 170.

Так как величины $W_{пр}$, $W_{пк}$, $W_{тр}$ определяются экспериментально, то равенства (V.58) мы должны рассматривать как приближенные. Поэтому кроме искомых величин будем также определять и соответствующие абсолютные погрешности

$$\varepsilon = \varepsilon_I = \pi - 4\frac{W_{пк}}{W_{пр}} \text{ и } \varepsilon = \varepsilon_{II} = \pi - 2\frac{W_{пк}}{W_{тр}}. \qquad \text{(V.59)}$$

В табл. 31 приведены результаты взвешивания (на аналитических весах) для десяти различных проб N, а также вычисленные по формулам (V.58), (V.59) приближенные значения π и погрешность каждого из экспериментов ε. Все эксперименты выполнены (при $r = 160$ *мм*) независимо один от другого, причем каждый образец был тщательно вычерчен на плотной баритовой бумаге и затем аккуратно вырезан. Веса всех вырезанных фигур, $W_{пр}$, $W_{пк}$, $W_{тр}$, выражены в граммах. Точность взвешивания — один миллиграмм.

Таблица 31

N	$W_{пр}$	$W_{пк}$	$W_{тр}$	$4\frac{W_{пк}}{W_{пр}}$	$\varepsilon = \varepsilon_I$	$2\frac{W_{пк}}{W_{тр}}$	$\varepsilon = \varepsilon_{II}$
1	12,646	9,982	6,421	3,1574	—0,0158	3,1092	+0,0324
2	12,746	10,016	6,401	3,1433	—0,0017	3,1295	+0,0121
3	12,825	10,086	6,404	3,1457	—0,0041	3,1499	—0,0083
4	12,693	9,950	6,305	3,1356	+0,0060	3,1562	—0,0146
5	12,916	10,128	6,499	3,1366	+0,0050	3,1168	+0,0248
6	12,812	10,078	6,457	3,1464	—0,0048	3,1216	+0,0200
7	12,783	10,070	6,434	3,1511	—0,0095	3,1302	+0,0114
8	12,714	9,982	6,324	3,1405	+0,0011	3,1569	—0,0153
9	12,775	10,010	6,341	3,1342	+0,0074	3,1572	—0,0156
10	13,182	10,321	6,581	3,1318	+0,0098	3,1366	+0,0050
Среднее арифметическое				3,1423	—0,0007	3,1364	+0,0052

Таблица 32

N	1—10	11—20	21—30	31—40	41—50
$4\frac{W_{пк}}{W_{пр}}$	3,1423	3,1349	3,1465	3,1472	3,1404
$\varepsilon = \varepsilon_I$	—0,0007	+0,0067	—0,0049	—0,0056	+0,0012
$2\frac{W_{пк}}{W_{тр}}$	3,1364	3,1460	3,1407	3,1469	3,1527
$\varepsilon = \varepsilon_{II}$	+0,0052	—0,0044	+0,0009	—0,0053	—0,0111
N	51—60	61—70	71—80	81—90	91—100
$4\frac{W_{пк}}{W_{пр}}$	3,1498	3,1483	3,1516	3,1410	3,1491
$\varepsilon = \varepsilon_I$	—0,0082	—0,0067	—0,0100	+0,0006	—0,0075
$2\frac{W_{пк}}{W_{тр}}$	3,1352	3,1297	3,1302	3,1440	3,1343
$\varepsilon = \varepsilon_{II}$	+0,0064	+0,0119	+0,0114	—0,0024	+0,0073

Для повышения точности результата эти же эксперименты были повторены еще 90 раз. Итоги (среднее арифметическое из каждых 10 экспериментов) приведены в табл. 32, а на рис. 171 построена (по результатам всех 200 измерений) так называемая *гистограмма*, которая графически изображает статистическое распределение погрешности ε по ее величине. По оси ординат отложена величина N — число измерений (в данном случае взвешиваний), обладающих одной и той же погрешностью ε. Минимальное и максимальное значения погрешности ε в данной серии экспериментов были равны соответственно $\varepsilon_{min} = -0{,}0403$ и $\varepsilon_{max} = +0{,}0452$. Пунктиром показана теоретическая кривая плотности распределения Гаусса, к рассмотрению которой вернемся в § 66.

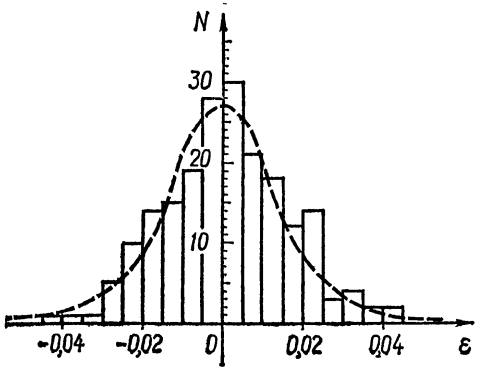


Рис. 171.

Согласование экспериментальных данных с теоретическими показывает, что все допущенные при проведении данного эксперимента ошибки являются случайными величинами, подчиненными гауссовскому нормальному закону распределения. В таком случае наиболее вероятным истинным значением является среднее арифметическое, а точность при N-кратном повторении эксперимента (для больших N) растет как $\sqrt{N}$.

Взяв среднее арифметическое из всех 100 экспериментов, получаем окончательно

$$4\frac{W_{\text{пк}}}{W_{\text{пр}}} = 3{,}1451; \quad 2\frac{W_{\text{пк}}}{W_{\text{тр}}} = 3{,}1396; \quad \pi \approx \frac{1}{2}(3{,}1451 + 3{,}1396) = 3{,}1424,$$

что отличается от точного значения $\pi = 3{,}14159...$ на восемь десятитысячных.

Замечание. В равенствах (V.59) вместо числа π, которое необходимо определить, мы должны взять среднее арифметическое

$$\pi_{\text{прибл}} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \pi_j}{N}, \tag{V.60}$$

т. е. приближенную величину $\pi = \pi_{\text{прибл}}$, найденную экспериментально согласно формулам (V.58) при достаточно большом числе экспериментов N.

Пример 3. Найти при помощи взвешивания следующие интегралы:

$$I_1 = \int_0^{0,5} \cos x\,dx; \quad I_2 = \int_{0,5}^{1,0} \cos x\,dx;$$

$$I_3 = \int_1^{\pi/2} \cos x\,dx.$$

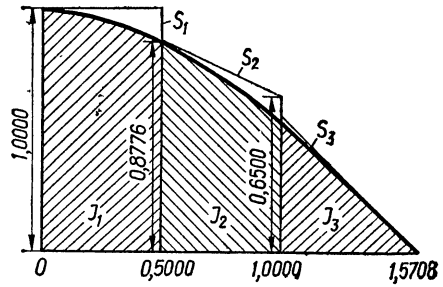


Рис. 172.

Решение. Вычертив на миллиметровой бумаге в масштабе $1 = 200$ *мм* косинусоиду (на сегменте $[0; \pi/2]$) и взяв в качестве контрольных фигур S_1 — прямоугольник, S_2 — трапецию, S_3 — равнобедренный прямоугольный треугольник, размеры которых показаны на рис. 172, находим согласно формуле (V.61) искомые интегралы:

$$I_1 = \frac{1{,}343}{1{,}405} S_1 = 0{,}9559 \cdot 0{,}5000 = 0{,}4780;$$

$$I_2 = \frac{1{,}029}{1{,}084} S_2 = 0{,}3625; \quad I_3 = \frac{0{,}451}{0{,}464} S_3 = 0{,}1583.$$

Все необходимые данные приведены в табл. 33, где W_n и W_n^* — соответственно веса (выраженные в граммах) искомой и контрольной фигур, $I_{n,\,\text{пр}}$ — приближенное значение интеграла, $I_{n,\,\text{точн}}$ — точное его значение, $\varepsilon = I_{n,\,\text{точн}} - I_{n,\,\text{пр}}$ — абсолютная погрешность и $\delta = \frac{\varepsilon}{I_{\text{точн}}} \cdot 100\%$ — относительная погрешность, выраженная в %.

Сравнив с точными значениями (ограничиваясь в них четырьмя значащими цифрами):

$$I_1 = \int_0^{0,5} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{0,5} = \sin 0{,}5 = 0{,}4794;$$

$$I_2 = \sin x \Big|_{0,5}^{1,0} = \sin 1{,}0 - \sin 0{,}5 = 0{,}8415 - 0{,}4794 = 0{,}3621;$$

$$I_3 = \sin x \Big|_1^{\pi/2} = 0{,}1585,$$

Таблица 33

n	1	2	3
W_n, г	1,343	1,029	0,451
W_n^*, г	1,405	1,084	0,464
S_n	0,5000	0,3819	0,1629
$I_{n,\text{пр}}$	0,4780	0,3625	0,1583
$I_{n,\text{точн}}$	0,4794	0,3621	0,1585
ε	$\mp$0,0014	—0,0004	+0,0002
δ, %	$\mp$0,29	—0,11	+0,13

видим, что в данном примере при помощи взвешивания интегралы были найдены с тремя значащими цифрами, а такая точность вполне достаточна для многих технических расчетов *.

В общем случае численное значение интеграла

$$I_x = \int_a^b f(x)\,dx$$

при помощи взвешивания найдем по формуле

$$I_x = \frac{W_x}{W_к} S_к, \tag{V.61}$$

где $S_к$ — площадь контрольной фигуры, $W_к$ — вес контрольной фигуры, вырезанной из бумаги, W_x — вес криволинейной трапеции $aABb$, площадь которой численно равна рассматриваемому интегралу (см. рис. 154). При этом I_x получаем в тех же единицах, в каких вычислена площадь $S_к$, поскольку отношение $\frac{W_x}{W_к}$ есть безразмерная величина. Так, в примере 3 величины $S_1 = 0{,}5000$; $S_2 = 0{,}3819$; $S_3 = 0{,}1629$ были вычислены для абстрактного аргумента.

В случае, представленном на рис. 156, надо отдельно определить части криволинейной трапеции, расположенные над и под осью абсцисс, а затем учесть их со знаком «+» или «—».

В заключение заметим, что при помощи взвешивания особенно удобно выполнять интегрирование в тех случаях, когда подынтегральной кривой служит кривая, вычерченная автоматическим самопишущим прибором.

Упражнения

1. Продублировать примеры 1, 2, 3.
2. Определить численные значения интегралов

$$\int_0^{0,3} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^{0,6} f(x)\,dx$$

* Столь высокая точность, полученная на таком неоднородном материале, как миллиметровая бумага, объясняется в данном случае тем, что все контрольные фигуры очень мало отличались от искомых.

по формуле Симпсона и при помощи взвешивания, если $f(x)$ задана таблицами:

а)

x	0,000	0,075	0,150	0,225	0,300	0,375	0,450	0,525	0,600
$f(x)$	0,2764	0,2041	0,1371	0,0749	0,0172	—0,0363	—0,0860	—0,1320	—0,1748

б)

x	0,000	0,075	0,150	0,225	0,300	0,375	0,450	0,525	0,600
$f(x)$	0,578	0,563	0,419	0,264	0,207	0,221	0,286	0,350	0,372

Рассмотренный метод определения численного значения интеграла при помощи взвешивания является одним из примеров математического моделирования.

Математическое моделирование в более широком понимании есть метод экспериментального изучения аналогичного явления, которое описывается теми же математическими уравнениями, что и исследуемый процесс.

В настоящее время математическое моделирование довольно широко применяется при решении самых различных технических задач, не требующих очень высокой степени точности. Одним из таких методов является моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге, при котором тепловые, магнитные, гидродинамические, аэродинамические и другие потенциальные поля исследуются при помощи электрического поля. Метод этот очень нагляден и прост, не требует специального оборудования и его можно с успехом включить в программу математических кружков средних школ. Краткий обзор работ по моделированию на электропроводной бумаге приведен в книге [148, § 61], где указана и дальнейшая литература, а более популярно эти вопросы изложены в брошюре: П. Ф. Фільчаков, В. Г. Панчишин. Математичне моделювання на електропровідному папері. Товариство «Знання» УРСР, Київ, 1966.

§ 65. Исследование функций при помощи интеграла. Круговые и гиперболические функции

В гл. IV мы видели, какую значительную роль играет производная при исследовании функции. Все эти результаты применимы и тогда, когда изучаемую функцию можно представить интегралом. В качестве примера рассмотрим круговые и гиперболические функции.

Тригонометрические функции действительного аргумента $\sin x$, $\cos x$ можно определить при $R = 1$ как длины отрезков BC и OB (рис. 173). При этом аргумент x можно понимать не только как величину центрального угла $\alpha = AOC$, но и как площадь сектора круга с центральным углом 2α, так как

$$x = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = \alpha,$$

поскольку $R = 1$.

Таким образом,

$$\sin x = BC; \quad \cos x = OB,$$

и благодаря этому обстоятельству тригонометрические функции называются также *круговыми*.

Заметим попутно, что слово «синус» произошло от слова «хорда», но при этом дело не обошлось без курьеза [175, русский перевод, стр. 131—132].

Тригонометрия возникла в I—II веках н. э. в Александрии, в работах знаменитых александрийских астрономов, наиболее крупным из которых был Клавдий Птолемей — автор известного астрономического тракта «Альмагест» и ряда других.

В V веке н. э. александрийская научная школа была уничтожена религиозными фанатиками, но один из ученых этой школы по имени Паулос бежал в Индию, где написал о достижениях александрийской школы на санскрите — научном языке индусов. В этой книге, получившей название «Паулиса — сиддханта», т. е. «Учение Паулисы» (как называли индусы Паулоса), хорда называлась санскритским словом «джива», обозначавшим тетиву лука, а дуга — тем же словом, что и лук.

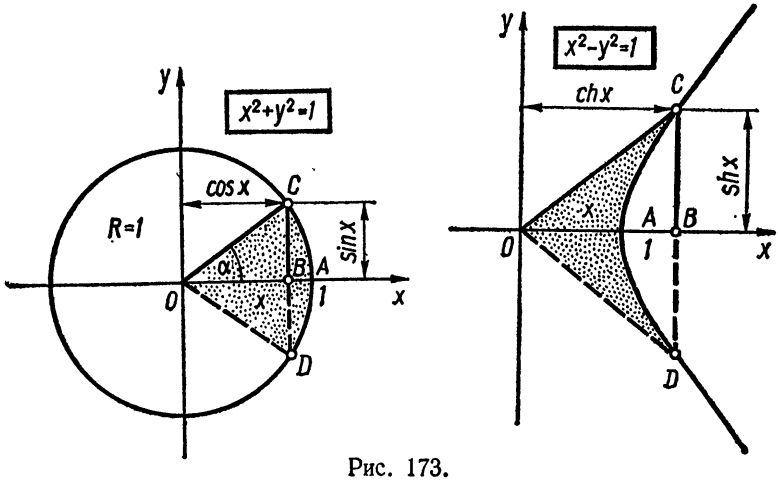


Рис. 173.

Позднейшие индусские астрономы и математики, крупнейшим из которых был живший в VII веке Брахмагупта, заменили хорды полухордами, т. е. линиями синуса. Эти линии они сначала называли «ард-джива» — полутетива, а затем для краткости стали называть их просто «джива». При переводе индусских книг на арабский язык (в котором отсутствует буква «в» и гласные не пишутся) была допущена неточность, и санскритское слово «джива» написали по арабски как «джайб», что означало впадину, пазуху. Это же искаженное слово перевели затем на латинский язык словом «sinus», также означающим впадину, пазуху, бухту, залив, изгиб, кривизну *. Слово «косинус» является сокращением от complementi sinus — синус дополнения, «тангенс» происходит от латинского tangens — касающийся, «котангенс» — complementi tangens.

Рассмотрим теперь аналогичные функции не для круга $x^2 + y^2 = 1$, а для равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ (ограничиваясь только ее правой ветвью) и обозначим через x площадь гиперболического сектора COD (см. рис. 173). В результате придем к *гиперболическим функциям*, для обозначения которых употребляются первые буквы их латинских названий: $\operatorname{sh} x = BC$ — гиперболический синус (sinus hyperbolicus), $\operatorname{ch} x = OB$ — гиперболический косинус (cosinus hyperbolicus).

Вычислим площадь x гиперболического сектора COD. Для площади, которую вырезает гипербола (обозначим ее через S_1), имеем **

* Более подробно о происхождении слова «синус» ска ано в заметке Б. А. Розенфельда «Почему мы так говорим?» («Квант», 1970, № 3, стр. 42—43).

** Результаты интегрирования проверьте дифференцированием.

$$S_1 = 2\int_1^{OB} \sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^{OB} =$$

$$= OB\sqrt{(OB)^2-1} - \ln\left(OB+\sqrt{(OB)^2-1}\right).$$

Далее, $(OB)^2-(CB)^2=1$, так что

$$\sqrt{(OB)^2-1} = BC;\quad OB = \sqrt{(BC)^2+1}$$

и тогда

$$S_1 = OB\cdot CB - \ln\left[OB + \sqrt{(OB)^2-1}\right] = OB\cdot CB - \ln\left[BC + \sqrt{(BC)^2+1}\right].$$

Но $OB\cdot CB = S_2$ есть площадь треугольника COD. Следовательно,

$$x = S_2 - S_1 = \ln\left[BC + \sqrt{(BC)^2+1}\right],$$

откуда

$$BC + \sqrt{(BC^2)+1} = e^x,$$

или

$$(BC)^2 + 1 = (e^x - BC)^2 = e^{2x} - 2e^x BC + (BC)^2.$$

Решив полученное уравнение относительно BC, имеем

$$BC = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Но по определению $BC = \operatorname{sh} x$, следовательно,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{V.62}$$

Аналогичным путем доказываем, что

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{V.63}$$

Дифференцируя эти формулы, сразу же находим, что

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;\quad (\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x, \tag{V.64}$$

а в таком случае согласно результатам § 52

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;\quad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C. \tag{V.65}$$

Далее, из формул (V.62) и (V.63) непосредственно вытекает основное тождество для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{V.66}$$

Действительно, заменяя $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ их значениями, имеем

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x})\right] = e^x e^{-x} = e^0 = 1.$$

Тождество (V.66) соответствует основному тождеству для круговых функций

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \tag{V.67}$$

Кроме функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ получили распространение также функции $\operatorname{th} x$ — гиперболический тангенс и $\operatorname{cth} x$ — гиперболический котангенс, которые определяются формулами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{V.68}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{V.69}$$

Дифференцируя эти равенства и учитывая (V.62) — (V.64), (V.66), получаем *

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)' - \operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \tag{V.70}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{\operatorname{sh} x\,(\operatorname{ch} x)' - \operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{V.71}$$

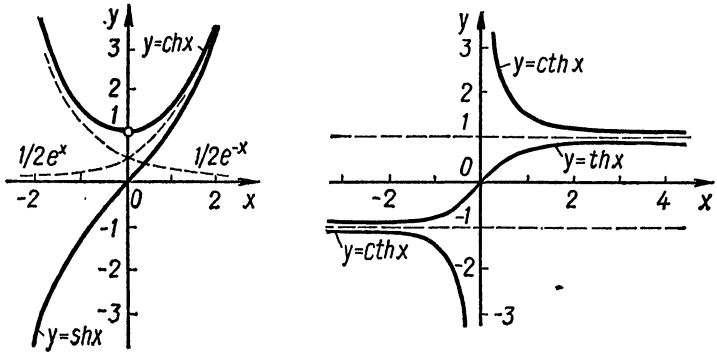


Рис. 174.

Отсюда

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C. \tag{V.72}$$

На рис. 174 приведены графики гиперболических функций, причем для сравнения даны пунктирные кривые $y = \frac{1}{2} e^x$ и $y = \frac{1}{2} e^{-x}$, с помощью которых можно тотчас же построить кривые $y = \operatorname{sh} x$ и $y = \operatorname{ch} x$.

Таким образом, гиперболические функции имеют вполне определенные значения для всех значений x, кроме $\operatorname{cth} x$ при $x = 0$, где эта функция обращается в бесконечность.

Функция $y = \operatorname{sh} x$ принимает всевозможные значения $(-\infty \leqslant \operatorname{sh} x \leqslant +\infty)$; $y = \operatorname{ch} x$ — значения, не меньшие единицы $(1 \leqslant \operatorname{ch} x \leqslant +\infty$, $\operatorname{ch} 0 = 1)$; значения функции $y = \operatorname{th} x$ не превышают по модулю единицы $(-1 \leqslant \operatorname{th} x \leqslant +1)$; значения $\operatorname{cth} x$ не меньше 1 при $x > 0$ и не больше -1 при $x < 0$. Прямые $y = +1$ и $y = -1$ служат асимптотами для линий $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$.

* Формулы дифференцирования гиперболических функций (V.64), (V.70), (V.71) и были приведены в табл. 8 гл. III, а формулы интегрирования (V.65), (V.72) — в табл. 25 данной главы.

Далее, функция $y = \operatorname{ch} x$ является четной, так как

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(+x), \tag{V.73}$$

а функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ — нечетные, поскольку при замене x на $-x$ они меняют свой знак:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x; \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x; \quad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x. \tag{V.74}$$

Гиперболические функции связаны между собой соотношениями:

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}; \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}; \quad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1; \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x \tag{V.75}$$

и другими, аналогичными соотношениям для тригонометрических функций. Так

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{V.76}$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{V.77}$$

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{V.78}$$

Все они вытекают из формул (V.62), (V.63), (V.68), (V.69).

Обратными гиперболическими функциями («ареа-функциями») называются величины, определяемые равенствами

$$y = \operatorname{Arsh} x \text{ (ареа-синус), если } x = \operatorname{sh} y, \tag{V.79}$$

$$y = \operatorname{Arch} x \text{ (ареа-косинус), если } x = \operatorname{ch} y, \tag{V.80}$$

$$y = \operatorname{Arth} x \text{ (ареа-тангенс), если } x = \operatorname{th} y, \tag{V.81}$$

$$y = \operatorname{Arcth} x \text{ (ареа-котангенс), если } x = \operatorname{cth} y. \tag{V.82}$$

Названия (и частица Ar в обозначениях) происходят от латинского слова «area» — площадь, чем еще раз подчеркнута связь, существующая между площадью гиперболического сектора и гиперболическими функциями, а следовательно, и обратными к ним ареа-функциями.

Ареа-функции можно легко выразить через логарифмическую функцию, в результате чего получим следующие соотношения:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right); \quad \operatorname{Arch} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ (x \geqslant 1), \tag{V.83}$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \ (|x| < 1); \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \ (|x| > 1). \tag{V.84}$$

Действительно, рассматривая в уравнениях

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \text{и} \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

определяющих собой функции $\operatorname{ch} y$ и $\operatorname{sh} y$, величину $e^y = \tau$ как неизвестную, приходим к квадратным уравнениям

$$2x = \tau + \frac{1}{\tau} \quad \text{и} \quad 2x = \tau - \frac{1}{\tau},$$

или

$$\tau^2 - 2x\tau + 1 = 0 \quad \text{и} \quad \tau^2 - 2x\tau - 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем соответственно

$$\tau = e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{и} \quad \tau = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

Так как $\tau = e^y$ всегда положительно, то во втором равенстве можно отбросить знак минус, а в первом равенстве надо сохранить оба знака.

Переходя к логарифмам, имеем:

$$y = \operatorname{Arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right) = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

так как $x - \sqrt{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ и, соответственно,

$$y = \operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

т. е. равенства (V.83). Равенства (V.84) доказываются аналогично.

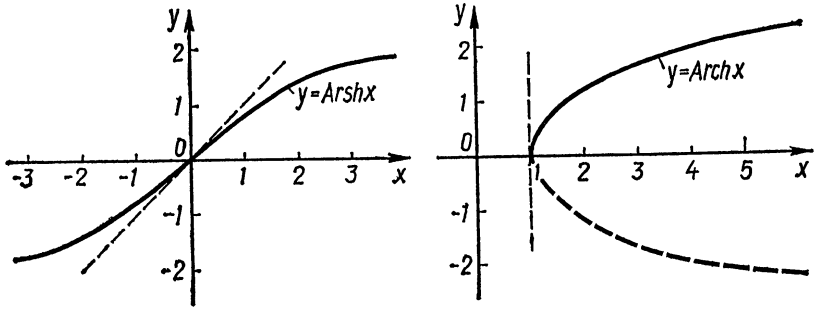


Рис. 175.

Графики обратных гиперболических функций представлены на рис. 175 и 176. Функция $\operatorname{Arsh} x$ однозначно определена на всей числовой оси. Функция $\operatorname{Arch} x$ определена лишь на полусегменте $[1; \infty)$ и здесь двузначна: ее значения равны по абсолютной величине, но отличаются знаком. Обычно рассматривают лишь положительные значения, и на рис. 175 соответствующая ветвь графика, которую называют *главной ветвью*, начерчена сплошной линией. При этом условии функция $\operatorname{Arch} x$ становится однозначной.

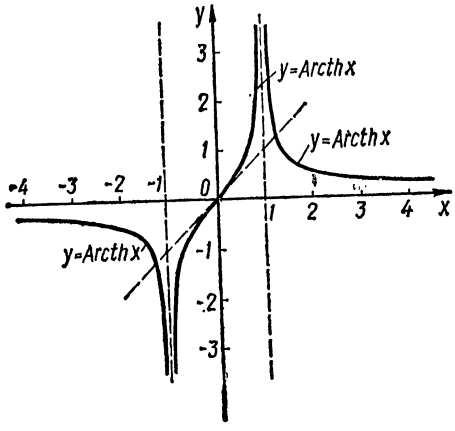


Рис. 176.

Функции $\operatorname{Arth} x$ и $\operatorname{Arcth} x$ однозначны. Первая из них определена лишь в незамкнутом промежутке $(-1; 1)$, вторая — лишь вне промежутка $(-1; 1)$. Прямые $x = \pm 1$ служат асимптотами для линий $y = \operatorname{Arth} x$ и $y = \operatorname{Arcth} x$.

Формулы дифференцирования ареафункций можно вывести либо пользуясь правилом дифференцирования обратных функций (см. § 34), либо применяя правило дифференцирования сложных функций к выражениям (V.83), (V.84). В результате приходим к следующим формулам:

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad (\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \tag{V.85}$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}; \quad (\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - x^2}, \tag{V.86}$$

которые приведены в табл. 8 гл. III.

Замечание. Обе формулы (V.86), на первый взгляд, совпадают между собой, но это не является противоречием, так как первая из них имеет место только в незамкнутом интервале $-1 < x < +1$, а вторая применима лишь при $x < -1$ и $x > 1$.

Из (V.85) и (V.86), произведя в них для общности результата замену $x \to \frac{x}{a}$, получаем соответствующие формулы для обратных гиперболических функций:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} + C \quad (x \geqslant a), \tag{V.87}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + C \ (|x| < a); \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + C \ (|x| > a). \tag{V.88}$$

В заключение остановимся еще на одном принципиальном вопросе. Формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Arsh} x + C, \ C = \operatorname{Arsh} 0 = 0$$

можно принять в качестве определения одной из обратных гиперболических функций. При этом существенно то, что новая трансцендентная функция определяется своим интегралом и что ее производной является подынтегральная функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

поведение которой мы можем легко изучить на всей действительной оси. Повторив все изложенное выше в обратном порядке, построим полную теорию гиперболических функций, причем числовые значения новых функций можно находить из соответствующих интегралов при помощи формул численных квадратур. Однако мы не будем останавливаться на этом вопросе, поскольку в гл. X изложен более простой и эффективный путь изучения круговых и гиперболических функций при помощи дифференциальных уравнений и рядов.

§ 66. Об интегралах, которые не выражаются через элементарные функции. Эллиптические интегралы

Как уже отмечалось, всякая функция $f(x)$, непрерывная на интервале (a, b), имеет на этом интервале первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако *не всякая первообразная, даже тогда, когда она существует, выражается в конечном виде через элементарные функции.* Такими, например, являются первообразные, выраженные интегралами $\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \ d\varphi$, и многие другие.

Во всех подобных случаях первообразная представляет собой некоторую новую функцию, которую нельзя свести к комбинации конечного числа элементарных функций. Так, например, та первообразная $\Phi(x)$ для e^{-x^2}, которая удовлетворяет дополнительному условию $\Phi(0) = 0$, называется *функцией Гаусса:*

$$\Phi(x) = \int e^{-x^2} dx + C,$$

где C подобрано так, чтобы выполнялось условие $\Phi(0) = 0$. Для этого мы должны только перейти к определенному интегралу и тогда получим *

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \tag{V.89}$$

причем условие $\Phi(0) = 0$ согласно формуле (V.29) § 59 будет теперь выполняться автоматически.

Замечание. Для того чтобы подчеркнуть, что определенный интеграл (V.89) является функцией только своего верхнего предела x, переменную интегрирования мы обозначили буквой t, так как согласно формуле (V.25) § 59 величина интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования. Однако это правило не всегда выполняют и простоты ради часто обозначают верхний предел и переменную интегрирования одной и той же буквой, т. е. пишут

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Функция Гаусса есть нечетная функция (поскольку $\Phi(-x) = -\Phi(x)$), для которой прямые $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pm 0{,}8862269\ldots$ являются асимптотами.

Численное значение функции Гаусса для любого x легко найти, вычислив заданный интеграл по формуле Симпсона (V.51)

$$\Phi(x) = I_n(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \approx \frac{b-a}{3n} \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j) \tag{V.90}$$

или же при помощи рядов.

Так, например, в табл. 34 приведены все вычисления для $x = 1{,}6$, которые позволили найти $\Phi(x)$ с шестью значащими цифрами. Более точным значением (найденным при помощи рядов) будет

$$\Phi(1{,}6) = 0{,}865266227.$$

Графики функции Гаусса и ее производной $\Phi'(x) = e^{-x}$ представлены на рис. 177.

Упражнение 1. Вычислить по формуле Симпсона при $n = 8$ и $n = 4$ функцию Гаусса для $x = 1$ и определить согласно (V.55) погрешность результата. Найти также при помощи взвешивания $\Phi(0{,}5)$, $\Phi(1{,}0)$, $\Phi(1{,}6)$, и по этим точкам и точке $\Phi(0) = 0$ построить график функции Гаусса.

При помощи интегралов вводится также ряд других функций, которые в настоящее время широко применяются при решении различных технических задач. К числу таких функций относятся следующие.

---

* В теории вероятностей чаще применяют так называемую функцию ошибок (error function)

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

которая отличается от функции Гаусса (V.89) постоянным множителем $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Этот *нормирующий множитель* введен для того, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{erf} x = 1.$$

Для функции $\operatorname{erf} x$ (которую называют также *интегралом ошибок*, или *интегралом вероятности ошибок*, или *интегралом вероятности*) вычислены подробные таблицы (см., например, [174, стр. 73]).

Таблица 34

$$x = b = 1{,}6;\quad a = 0;\quad f(t) = e^{-t^2};\quad I_n = \int_0^{1,6} e^{-t^2}dt = \frac{b-a}{3n}\sum_{j=0}^{n} c_j f(t_j)$$

j	t_j	t_j^2	$f(t_j) = e^{-t_j^2}$	c_j		
				$n = 16$	$n = 8$	$n = 4$
0	0,0	0,00	1,000000	1	1	1
1	0,1	0,01	0,990050	4	—	—
2	0,2	0,04	0,960789	2	4	—
3	0,3	0,09	0,913931	4	—	—
4	0,4	0,16	0,852144	2	2	4
5	0,5	0,25	0,778801	4	—	—
6	0,6	0,36	0,697676	2	4	—
7	0,7	0,49	0,612626	4	—	—
8	0,8	0,64	0,527292	2	2	2
9	0,9	0,81	0,444858	4	—	—
10	1,0	1,00	0,367879	2	4	—
11	1,1	1,21	0,298197	4	—	—
12	1,2	1,44	0,236928	2	2	4
13	1,3	1,69	0,184520	4	—	—
14	1,4	1,96	0,140858	2	4	—
15	1,5	2,25	0,105399	4	—	—
16	1,6	2,56	0,077305	1	1	1
		$\sum_n = \sum c_j f(t_j) =$		25,957965	12,978841	6,488177
		$I_n = \frac{1,6}{3n}\sum_n =$		0,865266	0,865256	0,865090
		$\varepsilon_n = \frac{1}{15}(I_n - I_{n/2}) =$		0,000001	0,000011	—

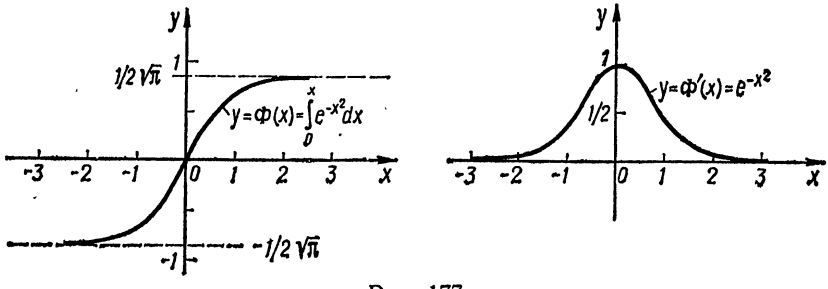


Рис. 177.

Синус интегральный $\mathrm{Si}\,x$. Под этой функцией подразумевается та первообразная для функции $\frac{\sin x}{x}$, которая удовлетворяет условию $\mathrm{Si}\,(0) = 0$. Таким образом,

$$\mathrm{Si}\,x = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Косинус интегральный $\operatorname{Ci} x$. Под этой функцией подразумевается первообразная для функции $\frac{\cos x}{x}$, удовлетворяющая условию $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{Ci} x = 0$.

Интегральный логарифм $\operatorname{li} x$ определяется как первообразная для функции $\frac{1}{\ln x}$, удовлетворяющая условию $\operatorname{li} 0 = 0$.

Функция, называемая *эллиптическим интегралом первого рода*, определяется как первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, которая обращается в нуль при $\varphi = 0$. Для ее обозначения введен специальный символ $F(\varphi, k)$. Таким образом,

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}, \tag{V.91}$$

причем параметр k называется *модулем эллиптического интеграла*, а аргумент φ — его *амплитудой*.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$, то интеграл (V.91) называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается буквой $K = K(k)$, т. е.

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \tag{V.92}$$

Числовые значения интегралов $F(\varphi, k)$ и $K(k)$ можно найти, воспользовавшись формулой Симпсона, но более эффективно эти исследования можно провести при помощи дифференциальных уравнений, на чем мы еще остановимся в § 143 гл. X. Поэтому сейчас ограничимся только одним иллюстративным примером.

Пример 1. Вычислить по формуле Симпсона (V.51) с шестью значащими цифрами эллиптический интеграл $F(\varphi, k)$ при $\varphi = 36°$ и $k = \sin 49° = 0{,}754710$.

Решение. Для того чтобы обеспечить требуемую точность, подынтегральную функцию

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

надо вычислять не менее чем с семью значащими цифрами.

Возьмем сначала $n = 4$. Тогда, поскольку $b = \varphi = 36°$, $a = 0$, то $h = \frac{b-a}{n} = 9°$; $\frac{h}{3} = 3° = 0{,}05235988$ *рад*. Все необходимые вычисления приведены в табл. 35. Перемножив стоящие в одних и тех же строках $f(\alpha_j)$ и c_j, находим суммы $\sum_4 = 12{,}458403$ и $\sum_2 = 6{,}229227$. Умножив эти результаты соответственно на $\frac{h}{3}$ при $n = 4$ и на $\frac{2h}{3}$ при $n = 2$, получаем

$$I_4 \approx F(\varphi, k) = 0{,}6523203 \approx 0{,}652320 \text{ при } n = 4,$$
$$I_2 \approx F(\varphi, k) = 0{,}6523245 \approx 0{,}652325 \text{ при } n = 2.$$

Согласно формуле (V.55) первые шесть цифр при $n = 4$ будут значащие, и, действительно, более точное значение, вычисленное при помощи рядов, есть

$$F(\varphi, k) = 0{,}6523207.$$

Таблица 35

j	$\alpha°$	$\sin\alpha$	$k\sin\alpha$	$1-k^2\sin^2\alpha$	$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$	$f(\alpha_j)$	c_j	
							$n=4$	$n=2$
0	0	0,000000	0,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1	1
1	9	0,156434	0,118062	0,986061	0,993006	1,007043	4	—
2	18	0,309017	0,233218	0,945609	0,972424	1,028358	2	4
3	27	0,453990	0,342631	0,882604	0,939470	1,064430	4	—
4	36	0,587785	0,443607	0,803213	0,896222	1,115795	1	1

Кроме эллиптического интеграла первого рода существуют *эллиптический интеграл второго рода*

$$\mathcal{E}(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\, d\alpha \qquad (V.93)$$

и *эллиптический интеграл третьего рода*

$$\Pi(\varphi, m, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{(1+m\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \qquad (V.94)$$

Как и в случае эллиптического интеграла первого рода, если амплитуда $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°$, то интегралы (V.93) и (V.94) называются соответственно *полным эллиптическим интегралом второго рода* и *полным эллиптическим интегралом третьего рода* и обозначаются символами $E = E(k)$ и $\Pi = \Pi(m, k)$, т. е.

$$E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\, d\alpha; \qquad (V.95)$$

$$\Pi = \Pi(m, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1+m\sin^2\alpha)\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}. \qquad (V.95')$$

Численные значения эллиптических интегралов второго и третьего рода также легко вычислить по формуле Симпсона.

Пример 2. Вычислить по формуле Симпсона (V.51) с шестью значащими цифрами эллиптический интеграл $\mathcal{E}(\varphi, k)$ при $\varphi = 36°$ и $k = \sin 49° = 0{,}754710$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция, значения которой приведены в табл. 35, равна $f(\alpha) = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$. Воспользовавшись этими данными, аналогично примеру 1, находим

$$\sum_4 = 11{,}570974; \quad \sum_2 = 5{,}785918$$

и тогда

$$I_4 = \frac{h}{3}\sum_4 = 0{,}605855; \quad I_2 = \frac{2h}{3}\sum_2 = 0{,}605900;$$

$$\delta_4 = \frac{I_4 - I_2}{15} = -\frac{0{,}000045}{15} = -0{,}000003.$$

Более точное значение искомого эллиптического интеграла второго рода (найденное при помощи рядов) равно

$$I_{\text{точн}} = \mathcal{E}(\varphi, k) = 0{,}6058518.$$

Упражнение 2. Вычислить по формуле Симпсона с шестью значащими цифрами эллиптические интегралы $F(\varphi, k)$ и $\mathcal{E}(\varphi, k)$ при $\varphi = 28°$; $k = 0.7$. Первые три знака полученных результатов проконтролируйте также при помощи взвешивания.

Эллиптический интеграл третьего рода, в отличие от интегралов $F(\varphi, k)$ и $\mathcal{E}(\varphi, k)$, имеет два параметра, m и k. Его численные значения также легко найти по формуле Симпсона с любой степенью точности, что читателю полезно выполнить самостоятельно. Мы же в данной работе не

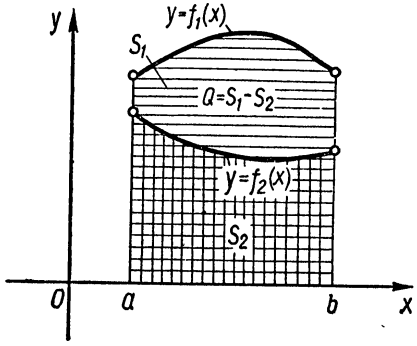


Рис. 178.

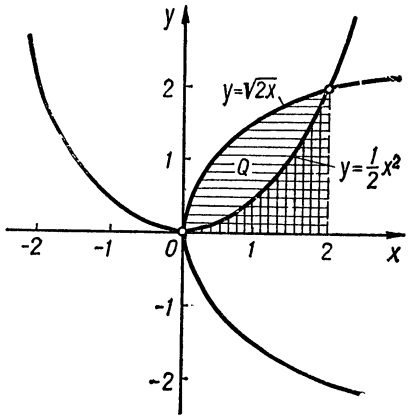


Рис. 179.

имеем возможности остановиться на этом вопросе. Заметим только, что все рассмотренные в этом параграфе функции хорошо изучены и для них составлены подробные таблицы, а также построены графики. Более подробно познакомиться с этими вопросами можно по книгам [2; 64; 70; 74; 123; 142; 174], в которых приведена и дальнейшая литература.

На этом мы заканчиваем изучение общих свойств интеграла и переходим к изложению некоторых его простейших приложений.

§ 67. Вычисление площади произвольной фигуры

Если уравнение заданной линии есть $y = f(x)$, то, как показано в § 58, площадь криволинейной трапеции $S = S(a, b)$ определяется формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Обобщим полученные результаты на случай вычисления площади произвольной плоской фигуры.

Площадь Q, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и ординатами $x = a$, $x = b$ (рис. 178), при условии $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, будет, очевидно, равна разности площадей криволинейных трапеций $S_1(a, b) - S_2(a, b)$, т. е.

$$Q = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx. \qquad \text{(V.96)}$$

В частности в качестве величин a, b или одной из них могут служить абсциссы точек пересечения заданных кривых.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную кривыми (рис. 179)

$$y=\sqrt{2x} \text{ и } y=\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Находим точки пересечения заданных кривых:

$$\sqrt{2x}=\frac{x^2}{2};\quad 2x=\frac{x^4}{4};\quad 8x=x^4,$$

откуда

$$x_1=a=0;\quad x_2=b=2.$$

Следовательно, в соответствии с формулой (V.96)

$$Q=\int_0^2\sqrt{2x}\,dx-\int_0^2\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big|_0^2-\frac{1}{2\cdot 3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}-\frac{8}{2\cdot 3}=\frac{4}{3}.$$

Пример 2. Вычислить с шестью десятичными знаками площадь, ограниченную кривыми (рис. 180)

$$y=\cos x \text{ и } y=x^2.$$

Решение. Так же, как и в примере 1, прежде всего находим точки пересечения заданных кривых

$$\cos x=x^2 \text{ или } \cos x-x^2=0.$$

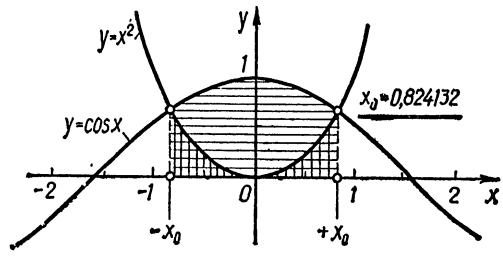


Рис. 180.

Определив с требуемой точностью корни этого трансцендентного уравнения (на чем мы подробнее остановимся в § 84—87 гл. VII), получаем

$$x=\pm x_0;\quad x_0=0{,}824132,$$

поскольку

$$x_0^2=0{,}679194;\quad \cos x_0=0{,}679194.$$

Согласно формуле (V.96) имеем

$$Q=\int_{-x_0}^{+x_0}(\cos x-x^2)\,dx=\left[\sin x-\frac{x^3}{3}\right]_{-x_0}^{+x_0}=2\left(\sin x_0-\frac{x_0^3}{3}\right)=$$

$$=2\left(0{,}733959-\frac{0{,}559746}{3}\right)=1{,}094754.$$

Значения $\sin x_0=\sin 0{,}824132$ *рад* $=0{,}733959$ и $\cos x_0=\cos 0{,}824132$ *рад* $=0{,}679194$ мы нашли при помощи интерполяции (см. § 79 гл. VI) по таблицам, приведенным в конце книги.

Формула (V.96) остается справедливой и для замкнутых кривых. В этом случае в качестве пределов интегрирования a и b следует брать абсциссы тех точек заданной кривой, в которых они принимают наименьшее и наибольшее значения. Если же фигура является симметричной, то мы можем задачу несколько упростить, вычислив лишь площадь соответствующей части заданной фигуры, например половину площади искомой фигуры, если она имеет одну ось симметрии, четверть искомой площади, если фигура имеет две оси симметрии, и т. д.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение. Так как эллипс имеет две оси симметрии, то, найдя четверть искомой площади и умножив затем результат на четыре, мы и решим поставленную задачу.

Из уравнения эллипса получаем уравнение линии, ограничивающей криволинейную трапецию (рис. 181):

$$y=f(x)=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

При этом мы берем арифметическое значение корня, поскольку рассматриваемая дуга эллипса расположена в первом квадранте.

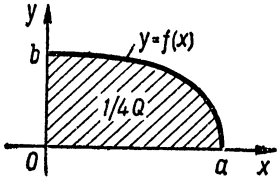


Рис. 181.

В таком случае имеем

$$Q=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Искомый интеграл проще всего вычислить при помощи подстановки

$$x=a\sin\tau;\quad dx=a\cos\tau\,d\tau.$$

Так как при $x=0$ из уравнения $x=a\sin\tau$ получаем $\sin\tau=0$, $\tau=0$, а при $x=a$, соответственно, $a=a\sin\tau$; $\sin\tau=1$; $\tau=\frac{\pi}{2}$, то новыми пределами интегрирования (по переменной τ) будут $\alpha=0$ и $\beta=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$Q=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-a^2\sin^2\tau}\cdot a\cos\tau\,d\tau=$$

$$=\frac{4b}{a}a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\tau\,d\tau=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\tau}{2}\,d\tau=2ab\left\{\tau\Big|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\sin 2\tau\Big|_0^{\pi/2}\right\}=$$

$$=2ab\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right\}=\pi ab.$$

Итак, площадь эллипса с полуосями a и b определяется формулой

$$Q=\pi ab. \tag{V.97}$$

Этим результатом мы пользовались в § 64.

Упражнения

1. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y=x$ и $y=x^2$. Построить рисунок, а также проверить результат при помощи взвешивания.
2. Определить площадь круга, положив в формуле (V.97) $a=b=r$.

§ 68. Длина дуги кривой

Поставим перед собой задачу найти длину дуги s кривой $y=f(x)$ от точки $A(x=a)$ до точки $B(x=b)$. Длину дуги MN малого отрезка линии AB заменим длиной отрезка прямой Δs, соединяющей точки M и N (рис. 182). При этом будем рассматривать только кривые без разрывов и изломов.

По теореме Пифагора имеем

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \qquad \text{(V.98)}$$

Переходим в (V.98) к пределу $\Delta x \to 0$. В этом случае $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в производную $y' = f'(x)$, где $y = f(x)$ — уравнение заданной линии, а величина Δs переходит в дифференциал дуги*, так что в итоге получаем

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad \text{(V.99)}$$

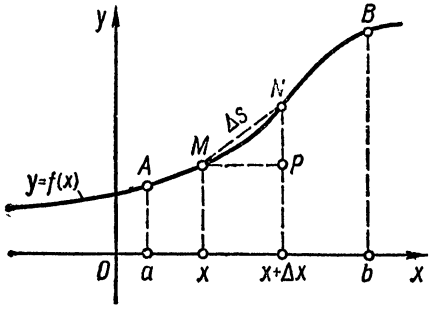


Рис. 182.

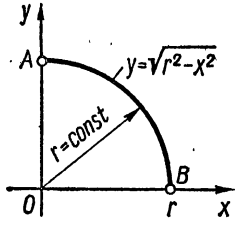


Рис. 183.

Взяв интеграл от обеих частей полученного равенства, найдем длину искомой дуги:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \text{ где } y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad \text{(V.100)}$$

Перейдем к рассмотрению примеров, хотя надо подчеркнуть, что из-за наличия корня в подынтегральном выражении формула (V.100) для большинства кривых приводит к довольно сложным интегралам.

Пример 1. Определить длину окружности

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Решение. Вычислим сначала длину четверти окружности, лежащей в первом квадранте (рис. 183). Уравнение дуги AB

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

* Можно показать, что дифференциал дуги ds отличается от прямолинейного отрезка Δs на величину порядка малости $(\Delta x)^2$. Поэтому при переходе к пределу $\Delta x \to 0$ мы этой величиной можем пренебречь, т. е. можем положить, что $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta s = ds$.

Подставив это значение в формулу (V.100) и воспользовавшись таблицей простейших интегралов (см. табл. 25), получаем

$$\frac{1}{4}s=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, длина окружности

$$s=2\pi r.$$

Пример 2. Определить длину цепной линии*, т. е. линии, уравнение которой

$$y=\gamma\operatorname{ch}\frac{x}{\gamma},\qquad\text{(V.101)}$$

где γ — постоянная величина, характеризующая собой точку максимального провеса (рис. 184).

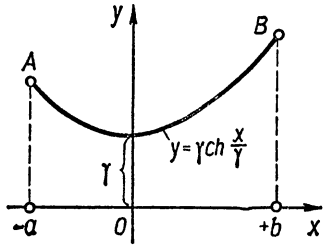


Рис. 184.

Решение. Найдем длину цепной линии от произвольной точки $A(x=-a)$ до точки $B(x=b)$, положив в формуле (V.101), простоты ради, $\gamma=1$.

В таком случае, взяв производную от гиперболического косинуса, находим

$$y'=(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x.$$

Подставив это значение в формулу (V.100), решаем поставленную задачу:

$$s=\int_{-a}^{+b}\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}\,dx=\int_{-a}^{+b}\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_{-a}^{+b}=\operatorname{sh}b+\operatorname{sh}a,$$

так как согласно основному тождеству (V.66) для гиперболических функций

$$1+\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}^2x.$$

Кроме того, поскольку гиперболический синус есть функция нечетная, то

$$-\operatorname{sh}(-a)=+\operatorname{sh}a.$$

В общем случае $\gamma\neq1$, аналогичным путем находим, что длина дуги цепной линии (V.101), заключенная между точками $A(-a)$ и $B(+b)$, будет определяться формулой

$$s=\gamma\left(\operatorname{sh}\frac{b}{\gamma}+\operatorname{sh}\frac{a}{\gamma}\right).\qquad\text{(V.102)}$$

Если абсцисса точки A будет положительной (а не отрицательной, как на рис. 184), то формула (V.102) примет следующий вид:

$$s=\gamma\left(\operatorname{sh}\frac{b}{\gamma}-\operatorname{sh}\frac{a}{\gamma}\right).\qquad\text{(V.102')}$$

Упражнение 1. Вычислить длину дуги цепной линии при таких исходных данных: $\gamma=2$; $b=-a=1{,}5$. Значения гиперболического синуса приведены в табл. II Приложения, помещенного в конце книги.

* Название «цепная линия» происходит от того, что такую форму принимает гибкая и нерастяжимая тяжелая нить (например, цепь), подвешенная за оба конца. С задачей вычисления длины цепной линии мы встречаемся при проектировании различных вантовых конструкций и, в частности, цепных мостов.

Пример 3. Вычислить длину дуги эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Решение. Уравнению дуги эллипса, расположенной в первом квадранте, легко придать такой вид:

$$y=+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}. \tag{V.103}$$

Следовательно,

$$y'=b\frac{-\frac{2x}{a^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}};$$

$$1+(y')^2=1+\frac{b^2x^2}{a^4\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^4\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

или

$$1+(y')^2=\frac{1-\varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

где $\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ есть квадрат эксцентриситета эллипса (см. гл. II, § 15).

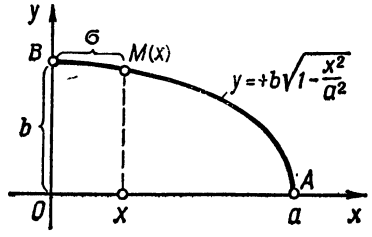


Рис. 185.

В таком случае, обозначив через $\sigma=\sigma(x)$ дугу BM эллипса, отсчитываемую от его вершины B до произвольной точки $M(x)$, согласно формуле (V.100) имеем (рис. 185)

$$\sigma=\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx.$$

Выполнив подстановку:

$$\frac{x}{a}=\sin\alpha;\quad dx=a\cdot\cos\alpha\,d\alpha$$

и учтя, что $1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$, получаем:

$$\sigma=\int_0^{\varphi}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}}\cdot a\cos\alpha\,d\alpha=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}\,d\alpha;\quad\varphi=\arcsin\frac{x}{a}$$

и окончательно

$$\sigma(x)=a\mathcal{E}(\varphi,k),\ \text{где}\ \varphi=\arcsin\frac{x}{a};\quad k=\varepsilon. \tag{V.104}$$

Таким образом, длина дуги эллипса $\sigma(x)$ выражается через эллиптический интеграл второго рода, модуль которого равен эксцентриситету эллипса.

При $x = a$ имеем $\varphi = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ и тогда

$$\sigma = \frac{1}{4} s = aE(k).$$

Следовательно, полная дуга эллипса s с полуосями a и b выражается через полный эллиптический интеграл второго рода*:

$$s = 4aE(k), \quad k = \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \tag{V.105}$$

В частности, если $a = b = r$, то $k = 0$, $E(0) = \frac{\pi}{2}$, и мы получаем

$$s = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi r,$$

как и должно быть, поскольку эллипс, эксцентриситет которого равен нулю, есть окружность.

Значение эллиптического интеграла $\mathcal{E}(\varphi, k)$ или $E(k)$, как отмечалось в § 66, легко вычислить с любой наперед заданной точностью по формуле Симпсона. Так, например, для эллипса с полуосями $a = 5$, $b = 4$ имеем $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$, и тогда его полная длина (с семью значащими цифрами) составит

$$s = 4aE(\varepsilon) = 4 \cdot 5 \cdot 1{,}418083 = 28{,}36166.$$

Все необходимые вычисления для определения полного эллиптического интеграла второго рода $E(k) = E(\varepsilon)$ при $k = 0{,}6$ приведены в табл. 36. Эти вычисления ничем не отличаются от аналогичных вычислений, выполненных в § 66, когда мы находили неполный интеграл $\mathcal{E}(\varphi, k)$, и поэтому не нуждаются в дополнительных пояснениях. Заметим только, что в данном случае в формуле Симпсона (V.51) мы должны положить**: $a = 0$, $b = 90° = \frac{\pi}{2}$ *рад*, $\frac{h}{3} = \frac{b-a}{3n} = \frac{\pi}{6n}$; $\pi = 3{,}14159265\ldots$.

Выполнив эти вычисления при $n = 8$ и $n = 4$, согласно формуле (V.55), убеждаемся, что все знаки, найденные при $n = 8$, верные и, действительно, более точное значение (найденное по таблицам) есть

$$E(k) = 1{,}4180834.$$

Упражнение 2. Вычислить с пятью значащими цифрами полную длину дуги эллипса с полуосями $a = 10$, $b = 6$. Необходимые значения $\sin \alpha_j$ можно взять из табл. 36, округлив их до пяти десятичных знаков.

В заключение заметим, что кривые, для которых существует интеграл (V.100), т. е. кривые $y = f(x)$, имеющие непрерывную касательную, называются *спрямляемыми*. При этом никакой роли не играет, берется интеграл (V.100) в замкнутом виде или нет, так как, если этот интеграл существует, то его всегда можно вычислить при помощи квадратурных формул с любой наперед заданной степенью точности, как это имело место, например, в случае эллипса.

---

* Благодаря этому обстоятельству интеграл (V.93), рассмотренный в § 66, и получил название *эллиптического*. Затем это название было распространено также на интегралы (V.91), (V.92) и (V.94), (V.95).

** В данном примере мы вынуждены одними и теми же буквами a и b обозначать полуоси эллипса и пределы интеграла в формуле Симпсона. Это не приводит к недоразумениям, так как легко разобраться, о какой именно величине идет речь. С подобными обстоятельствами в высшей математике приходится сталкиваться довольно часто.

Таблица 36

$f(\alpha) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}$; $k = 0{,}6$; $\pi = 3{,}14159265$						c_j	
j	α_j^0	$\sin \alpha_j$	$k \sin \alpha_j$	$1 - k^2 \sin^2 \alpha_j$	$f(\alpha_j)$	$n = 8$	$n = 4$
0	0	0,000000	0,000000	1,000000	1,000000	1	1
1	11,25	0,195090	0,117054	0,986298	0,993125	4	—
2	22,50	0,382683	0,229610	0,947279	0,973283	2	4
3	33,75	0,555570	0,333342	0,888883	0,942806	4	—
4	45,00	0,707107	0,424264	0,820000	0,905539	2	2
5	56,25	0,831470	0,498882	0,751117	0,866670	4	—
6	67,50	0,923880	0,554328	0,692720	0,832298	2	4
7	78,75	0,980785	0,588471	0,653702	0,808518	4	—
8	90,00	1,000000	0,600000	0,640000	0,800000	1	1
					$\sum_n = \sum c_j f(\alpha_j) =$	21,666716	10,833402
					$I_n = \frac{\pi}{6n} \sum_n =$	1,418083	1,418089

§ 69. Вычисление объема тела по его поперечным сечениям

Объем данного тела можно вычислить при помощи интеграла, если мы умеем определять площади поперечных сечений тела, перпендикулярных к какому-либо фиксированному направлению. Примем это направление за ось абсцисс и обозначим через V объем данного тела. Далее, допустим, что нам известна площадь любого сечения рассматриваемого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox. Эта площадь будет зависеть от положения секущей плоскости, т. е. будет функцией от x:

$$S = S(x).$$

Разобьем тело плоскостями $x = \text{const}$ на тонкие слои, начиная от сечения $x_1 = a$ и кончая сечением $x_n = b$ (рис. 186). Объем ΔV_j рассматриваемого j-го тонкого слоя приближенно равен произведению площади сечения $S(x_j)$ на толщину данного слоя Δx_j:

$$\Delta V_j = S(x_j)\, \Delta x_j.$$

Следовательно, просуммировав все эти элементарные объемы ΔV_j, мы получим для объема V такое приближенное выражение:

$$V \approx \sum_{j=1}^{n} S(x_j)\, \Delta x_j.$$

В пределе, когда число элементов n безгранично возрастает ($n \to \infty$) и наибольшее из Δx_j стремится к нулю ($\max \Delta x_j \to 0$), рассматриваемая сумма, в полном соответствии с формулой (V.46) § 62, переходит в определенный интеграл, который и дает точное значение искомого объема:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \qquad \text{(V.106)}$$

В частности, для тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 187), ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, будем иметь

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx, \quad \text{где } y = f(x). \tag{V.107}$$

Действительно, в рассматриваемом частном случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг радиуса $r = y(x)$, площадь которого

$$S(x) = \pi r^2 = \pi y^2(x).$$

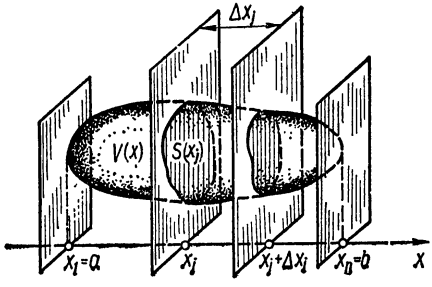


Рис. 186.

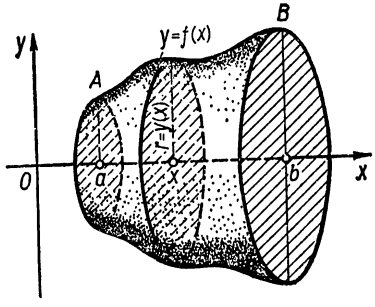


Рис. 187.

Подставив это значение в общую формулу (V.106) и вынеся постоянную π из-под знака интеграла, получим формулу (V.107) для вычисления *объема тела вращения*. Очевидно, что формула (V.107) останется справедливой и в том случае, когда $y = f(x)$ есть прямая линия.

Пример 1. Определить объем прямого кругового конуса.

Решение. Прямой круговой конус получается в результате вращения прямоугольного треугольника OBC вокруг оси абсцисс (рис. 188). Составим уравнение прямой OB, образующей при своем вращении коническую поверхность. Точка O является началом координат (0; 0), абсцисса точки B численно равна высоте конуса H, а ее ордината — радиусу основания конуса R. Согласно (I.18) уравнение образующей OB имеет вид

$$y = \frac{R}{H}x.$$

Подставив это значение в (V.107), после очевидных преобразований находим объем V кругового конуса:

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3}$$

и окончательно

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \tag{V.108}$$

Если круговой конус равномерно сжать (или растянуть) вдоль образующих OM и OM', то согласно результатам § 15 гл. II все окружности, являющиеся поперечными сечениями рассматриваемого тела, перейдут в эллипсы с полуосями

$a<R$ (или $a>R$ при растяжении) и $b=R$. Полученное тело называется *эллиптическим конусом*, а его объем будет определяться формулой

$$V=\frac{1}{3}\pi abH, \tag{V.109}$$

которая при $a=b=R$ перейдет в формулу (V.108).

Формулу (V.109) можно получить из общей формулы (V.106), что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, образуемой вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox (рис. 189).

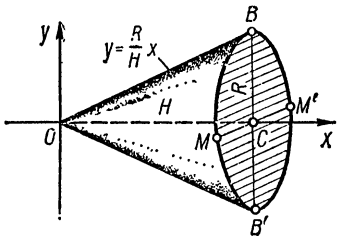


Рис. 188.

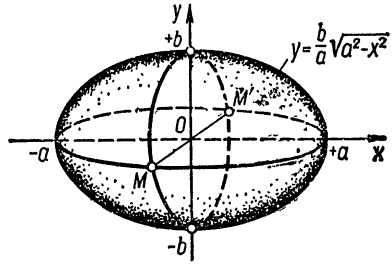


Рис. 189.

Решение. Так как $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, то по формуле (V.107) находим

$$V=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2-x^2)\,dx=\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{+a}=\frac{4}{3}\pi ab^2. \tag{V.110}$$

Тело, полученное в результате вращения эллипса, называется *эллипсоидом вращения*. Если его равномерно растянуть или сжать в направлении, перпендикулярном к плоскости xOy (так чтобы отрезки $OM=OM'=b$ перешли в отрезки $OM=OM'=c\gtrless b$), то получим так называемый *трехосный эллипсоид* с полуосями a, b, c. Объем трехосного эллипсоида определяется формулой

$$V=\frac{4}{3}\pi abc. \tag{V.111}$$

Если же вокруг оси абсцисс вращать не эллипс, а окружность $a=b=R$, то получим шар (см. рис. 189). Поэтому, положив в формуле (V.110) $a=b=R$, мы придем к известной формуле для объема шара:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{V.112}$$

Однако вывод формулы (V.112) при помощи интегрального исчисления несравненно проще, чем предлагаемый в средней школе.

Пример 3. Найти объем тела, полученного в результате вращения части AB синусоиды $y=\sin x$, заключенной между точками $x=-\frac{\pi}{2}$ и $x=+\frac{\pi}{2}$ (рис. 190).

Решение. Подставив в формулу (V.107) уравнение заданной линии $y=\sin x$ и пределы интегрирования $a=-\frac{\pi}{2}$, $b=+\frac{\pi}{2}$, а затем воспользовавшись

известным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, решаем поставленную задачу:

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin^2 x\,dx = \pi \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{2},$$

так как при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ имеем $\sin 2x = \sin(\pm\pi) = 0$ и второй член в найденном интеграле после двойной подстановки обращается в нуль.

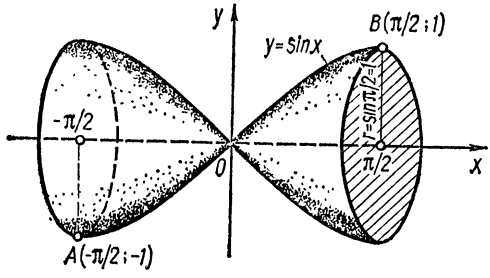


Рис. 190.

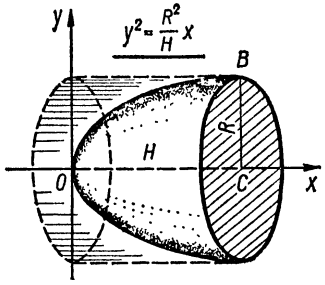


Рис. 191.

Пример 4. Найти объем сегмента параболоида вращения (т. е. тела, полученного в результате вращения параболы $y^2 = 2px$ вокруг оси Ox) по радиусу основания $CB = R$ и высоте $OC = H$ (рис. 191).

Решение. В данном случае заданной кривой $y = f(x)$ является парабола $y^2 = 2px$. Ее параметр $2p$ определим из условия, что парабола проходит через точку $B(H, R)$. Подставив координаты этой точки в исходное уравнение, имеем

$$R^2 = 2pH, \quad \text{откуда} \quad 2p = \frac{R^2}{H}$$

и, следовательно, уравнение искомой параболы будет

$$y^2 = \frac{R^2}{H}x.$$

В таком случае по формуле (V.107)

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H}x\,dx = \frac{\pi R^2}{H}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^H = \frac{1}{2}\pi R^2 H, \qquad \text{(V.113)}$$

т. е. *объем сегмента параболоида составляет половину объема цилиндра* $V_ц = \pi R^2 H$ *с тем же основанием и той же высотой.* Рассматриваемый цилиндр показан на рис. 191 пунктирными линиями.

Этот результат был найден Архимедом при помощи разработанного им *метода исчерпывания.* Архимеду же принадлежит следующий результат (найденный им для эллипсоида вращения): *объем эллипсоида вчетверо больше объема конуса, имеющего основанием одно из главных сечений, а вершиной — противоположную вершину эллипсоида.*

Действительно, положив $c = H$ и сравнив между собой формулы (V.111), (V.109), получим

$$V_{эл} = \frac{4}{3}\pi abc = 4 \cdot \frac{1}{3}\pi abH = 4V_к, \qquad (V.114)$$

где $V_{эл}$ — объем эллипсоида (трехосного), $V_к$ — объем соответствующего ему эллиптического конуса, т. е. конуса, в основании которого находится эллипс с полуосями a и b.

Упражнения

1. Найти объем прямого кругового цилиндра, полученного вращением отрезка прямой $y = R = \text{const}$, заключенного между точками с абсциссами $x = 0$ и $x = H$.
2. Вычислить объем шарового сегмента, который получается в результате вращения кругового сектора вокруг оси абсцисс.
3. Найти объем тела, полученного от вращения участка параболы $y = (2 + x)^2$, заключенного между точками с абсциссами $x = -1$ и $x = +1$. Выполнить рисунок.
4. Проверить, остается ли справедливой формула (V.114) в случае шара.

§ 70. Путь, пройденный телом

Если движение прямолинейно и происходит с постоянной скоростью v, то путь s, пройденный телом за время t, определяется по формуле

$$s = vt. \qquad (V.115)$$

Обобщим этот результат на случай, когда тело движется по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$, т. е. поставим перед собой задачу определить в этом общем случае путь s, пройденный телом за промежуток времени от $t = a$ до $t = b$.

Будем предполагать, что функция $f(t)$ непрерывна и, следовательно, в малые промежутки времени скорость изменяется мало. Разделим $[a, b]$ на n частей длительностью $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$. Для того чтобы приближенно вычислить путь, пройденный за каждый рассматриваемый промежуток Δt_j, будем считать, что скорость в этот период времени была постоянной, а именно — такой, как в некоторый произвольный момент ξ_j этого промежутка. Тогда весь пройденный путь приближенно выразится суммой

$$s \approx \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta t_j; \quad t_j \leqslant \xi_j \leqslant t_{j+1}.$$

Будем увеличивать число делений n так, чтобы каждое из Δt_j уменьшалось. Тогда и скачки в изменении скорости в конце каждого промежутка Δt_j будут становиться все меньше и меньше. В пределе, если $n \to \infty$, то $\Delta t_j \to 0$, а следовательно, и $f(\xi_j)\,\Delta t_j \to 0$. При этом условии скорость тела меняется уже не скачкообразно, как это было вначале, при конечном числе делений n, а непрерывно, и путь рассматриваемого тела будет равен

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta t_j \to 0}} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta t_j,$$

причем данное равенство из приближенного переходит в точное, поскольку все погрешности, которые были нами допущены, обращаются в бесконечно малые высшего порядка и, следовательно, при $n \to \infty$ они обращаются в нуль.

Сравнив полученный результат с формулой (V.46), убеждаемся, что и в данном случае точное решение поставленной задачи дается интегралом

$$s = \int_a^b f(t)\,dt, \tag{V.116}$$

где $v = f(t)$ есть заданная скорость движения тела.

Пример. Скорость движения тела задана уравнением

$$v = (2t + t^2)\ см/сек.$$

Найти путь, пройденный телом за 12 *сек* после начала движения.

Решение. Подставив в формулу (V.116) заданный закон движения тела и пределы интегрирования, имеем

$$s = \int_0^{12} (2t + t^2)\,dt = t^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^{12} = 144 + \frac{144 \cdot 12}{3} = 720\ см.$$

§ 71. Заключительные замечания

При изложении основ математического анализа мы ограничились самыми необходимыми сведениями, овладев которыми читатель сможет продолжить изучение этих вопросов в интересующем его направлении, обратившись к соответствующей литературе.

Эти сведения послужат также базой и для завершающей третьей части книги. Поэтому, заканчивая вторую часть, мы ограничимся тем, что в дополнение к § 58 приведем краткие сведения о крупнейших математиках XVII—XIX веков, которые внесли наиболее весомый вклад в развитие математического анализа и смежных с ним областей. Дальнейшие исторические сведения будут приведены в третьей части книги.

Яков Бернулли (Jakob Bernoulli, 1654—1705), известный швейцарский математик, профессор Базельского университета. Родился в Базеле, где и получил образование, окончив университет, в котором изучал философию, богословие и языки (немецкий, французский, английский, итальянский, латинский и греческий). Математикой, к которой его влекло, Яков вынужден был заниматься тайком, без учителей и почти без учебников, так как отец хотел из него сделать священнослужителя.

Я. Бернулли применил дифференциальное исчисление к геометрии — вывел формулу кривизны плоской кривой, изучил лемнискату, цепную линию и ряд других кривых; впервые открыл и доказал один из важнейших законов теории вероятностей (закон больших чисел, названный позднее *законом Бернулли*); открыл числа, получившие затем название *бернуллиевых чисел*. В течение последних десяти лет жизни он уделял большое внимание теории рядов и, в частности, обнаружил расходимость гармонического ряда. Пять мемуаров, написанных им в 1689—1704 гг., представляют собой лучшее по тому времени руководство для изучения рядов. Совместно со своим младшим братом Иоганном разработал методы решения некоторых вариационных задач, что послужило началом возникновения новой математической дисциплины — *вариационного исчисления*.

Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli, 1667—1748), знаменитый швейцарский математик и механик, профессор Гронингенского (с 1695 г., Голландия) и Базельского (с 1705 г.) университетов, почетный член Петербургской академии наук, в изданиях которой он опубликовал девять работ.

Яков был первенцем в семье Бернулли, вторым сыном был художник Николай, третьим сыном и десятым ребенком был Иоганн, также родившийся в Базеле.

В 1682 г., после окончания школы, отец отправил его в Невшатель для торговой практики и совершенствования во французском языке (Невшатель расположен в той части Швейцарии, где говорят на французском языке). Через год Иоганн возвратился домой, но никакой склонности к торговле не обнаружил. После окончания университета он вначале увлекся медициной, а затем математикой, которой и посвятил всю свою дальнейшую жизнь. В 1742 г. вышли четыре тома сочинений Иоганна, в том числе его «Интегральное исчисление», которое было написано с таким мастерством, что изложенный в нем материал вошел в современные элементарные учебники анализа почти без изменений. Основой курса «Интегральное исчисление» послужила рукопись, под названием: «Математические лекции о методе интегралов и другие; написаны для знаменитого маркиза Госпиталия*; годы 1691—1692».

И. Бернулли принадлежат также: правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, теория интегрирования рациональных дробей, разработка теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теория движения тел в сопротивляющейся среде, теория удара и ряд других важных исследований.

В дальнейшее развитие этих работ большой вклад внес и его сын Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli, 1700—1782), который впервые применил тригонометрические ряды для решения уравнений в частных производных (уравнение колебания струны), разработал основы механики идеальной жидкости и кинетической теории газов. В связи с этим в гидравлике *уравнением Бернулли* названо важное соотношение, которое связывает изменение скорости и давления вдоль линии тока при стационарном движении идеальной жидкости. Даниил Бернулли был членом Петербургской академии наук, где работал с 1725 по 1733 г.

Гийом Франсуа Лопиталь (Guillaume François de L'Hôpital, 1661—1704), французский математик, член Парижской академии наук, очень много сделавший для распространения идей математического анализа. Родился в Париже в богатой и знатной семье. В его детских занятиях математика не играла никакой роли.

Яков Бернулли.

Иоганн Бернулли.

* Латинское написание фамилии Лопиталя.

Гийом Франсуа Лопиталь.

Леонард Эйлер.

Известно, что он делал слабые успехи в латинском языке, предмете, который в то время относился к числу важнейших. Истинное его призвание обнаружилось почти случайно, когда ему в руки попал учебник геометрии, который его очень увлек и пробудил в нем интерес к математике.

Работы Лопиталя относятся, главным образом, к исследованию трудных задач математического анализа. В частности, в 1696 г. он решил, наряду с Ньютоном, Лейбницем и Яковом Бернулли, знаменитую задачу Иоганна Бернулли о брахистохроне, или о кривой наибыстрейшего спуска.

В том же году вышло из печати и главное творение его жизни — «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий». Появление этого первого печатного учебника по дифференциальному исчислению как нельзя лучше отвечало потребности момента. Никто, кроме Лопиталя (о чем мы говорили в § 50), не позаботился собрать воедино формальный аппарат нового исчисления, обработать его педагогически, подобрать и сочинить необходимые примеры и задачи. Заслуга Лопиталя и заключается в том, что с появлением его учебника началось широкое знакомство с анализом бесконечно малых и постепенное его проникновение в математическую практику.

Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707—1783), выдающийся математик, механик и физик, член Петербургской академии наук и многих других академий. Родился в Базеле в семье пастора Пауля Эйлера, увлекавшегося математикой. Учился в Базельском университете на философском, а затем, по настоянию отца, на богословском факультете. Одновременно посещал лекции Иоганна Бернулли, что и определило его дальнейшую судьбу.

Творческая деятельность Эйлера тесно связана с Петербургской академией наук, где он принимал самое активное участие в различных направлениях научной работы (1727—1741, 1766—1783 гг.). В 1741—1766 гг. Эйлер работал в Берлинской академии наук, которой, начиная с 1759 г., фактически руководил. Продолжая дело Ньютона и Лейбница, он преобразовал исчисление бесконечно малых в аналитическую дисциплину. Результаты этой работы Эйлер изложил в ряде классических монографий («Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление»,

«Интегральное исчисление» и др.). Эйлер явился творцом новых методов и направлений: создал основы вариационного исчисления (развивая идеи братьев Бернулли), теории чисел, теории аналитических и специальных функций, теории дифференциальных уравнений, теории поверхностей. Ряд его открытий относится к аналитической геометрии и топологии, к теории рядов. Большое внимание в своей работе Эйлер уделял приложениям математики и почти половина его работ посвящена вопросам баллистики, механики твердого тела, гидродинамики, теории упругости, оптики, теории движения Луны, теории турбин. Известны также его работы по астрономии, картографии, теоретической физике, биологической физике, сельскому хозяйству, демографии и страховому делу, теории музыки. Трудно переоценить значение Эйлера и в подготовке российских национальных научных кадров и в создании русской учебной математической литературы («Пособие по арифметике», «Универсальная арифметика»). Эйлер отличался феноменальной работоспособностью: его перу принадлежит свыше 850 научных работ, большая часть которых, а именно — 473, была напечатана впервые в изданиях Петербургской академии наук.

Жан Лерон Даламбер.

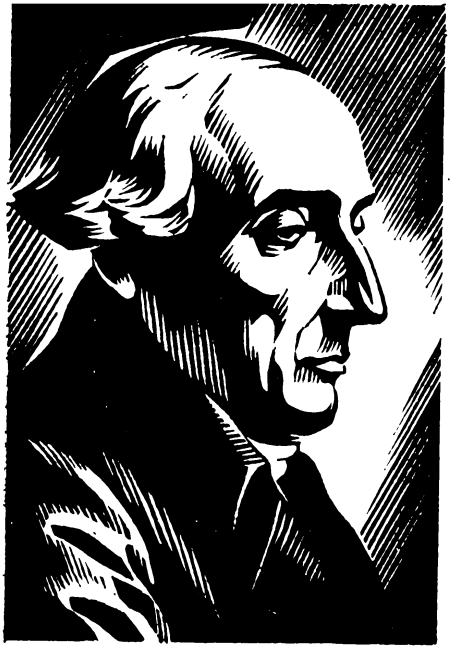
Жан Лерон Даламбер (Jean le Rond d'Alembert, 1717—1783), известный французский математик и философ-просветитель, член Парижской, Петербургской и других академий наук. Родился в Париже. Вместе с Дени Дидро организовал издание и был некоторое время редактором «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», которая стала идейным центром французских просветителей XVIII века.

Даламбер является одним из основоположников теории дифференциальных уравнений. При рассмотрении дифференциальных уравнений эллиптического типа он впервые применил функции комплексного переменного и вместе с Эйлером нашел условия, которым должны удовлетворять действительная и мнимая части аналитической функции.

Даламберу принадлежит простой и удобный в употреблении признак сходимости рядов. Он много работал над вопросами математической физики, теоретической астрономии, теории вероятностей и т. д. Сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений, сведя задачи динамики к задачам статики. Эти правила получили название *принципа Даламбера*, который является одним из основных принципов динамики.

Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange, 1736—1813), великий французский математик и механик, член Берлинской академии наук (с 1759 г., а в 1766—1787 гг. — ее президент), член Парижской академии (с 1772 г.), почетный член Петербургской академии наук (с 1776 г.). Родился в Турине (Италия) в семье обедневшего чиновника. Окончил Туринскую артиллерийскую школу; в 1754—1766 гг. — профессор этой же школы. С 1787 г. жил и работал в Париже, где с 1795 г. был профессором Нормальной школы, а с 1797 г. — Политехнической школы.

Работы Лагранжа относятся ко многим разделам математики и механики, а именно: вариационному исчислению, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, математическому анализу, дифференциальной геометрии, аналитической и теоретической механике, небесной механике и астрономии.



Жозеф Луи Лагранж.

Михаил Васильевич Остроградский.

В своем классическом труде «Аналитическая механика» (1788 г.) Лагранж сформулировал принцип всзможных перемещений, на основе которого решил основные задачи статики. В динамике, соединяя принцип возможных перемещений с принципом Даламбера, вывел уравнение движения произвольной системы в прямоугольных и прямолинейных координатах; ввел обобщенные координаты. Вместе с Эйлером Лагранж является основоположником аналитических методов в вариационном исчислении. Лагранж провел также глубокие исследования всех методов решения алгебраических уравнений в радикалах и выявил, что в их основе лежит рассмотрение группы перестановок корней уравнения. Этим впервые в алгебру были введены группы. В настоящее время теория групп занимает одно из центральных мест не только в алгебре, но и во всей математике.

Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) крупнейший украинский математик и механик, академик Петербургской академии наук (с 1830 г.), член Американской (Бостонской), Туринской и Римской академий наук, член-корреспондент Парижской академии наук. Родился в деревне Пашенной на Полтавщине в небогатой украинской дворянской семье. В 1816—1820 гг. учился в Харьковском университете, а затем усовершенствовал свои знания в Париже.

Основные работы Остроградского посвящены математическому анализу, математической физике и аналитической механике. Исследуя дифференциальное уравнение распространения тепла в твердых и жидких телах, он ввел понятие сопряженного дифференциального оператора, доказал ортогональность собственных функций данного оператора и сопряженного с ним, установил принцип разложения функций в ряд по собственным функциям и принцип локализации для тригонометрических рядов, предвосхитив тем самым многие идеи функционального анализа, созданного лишь в XX веке. Широко известна также *формула Остроградского*, которая позволяет преобразовать интеграл по объему в интеграл по поверхности. Остроградский получил ряд интересных результатов при интегрировании рациональных функций, не потерявших своего значения до сегодняшнего дня.

В механике ему принадлежат результаты, связанные с принципом возможных

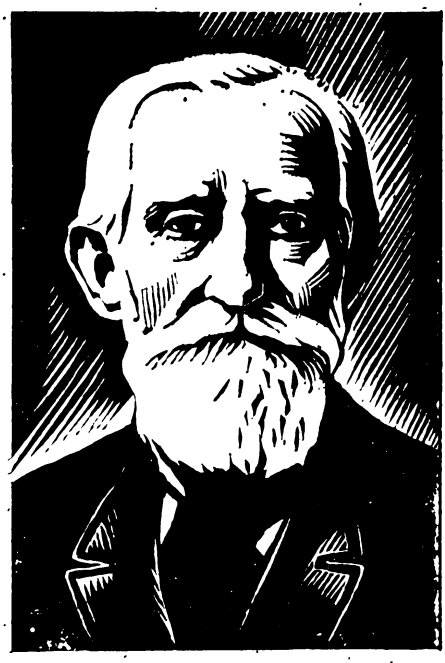
перемещений, вариационными принципами механики, теорией удара, распространением волн на поверхности жидкости.

Остроградский был одним из основоположников Петербургской математической школы. Он был в тесной дружбе с Тарасом Григорьевичем Шевченко, в связи с чем, после возвращения из Парижа, за Остроградским был установлен полицейский надзор.

В 1959—1961 гг. в издательстве АН УССР вышло в свет полное собрание сочинений М. В. Остроградского в трех томах.

Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894), великий русский математик и механик, академик Петербургской академии наук (с 1856 г.), член Берлинской, Болонской, Парижской, Шведской академий наук, член-корреспондент Лондонского Королевского общества и почетный член многих других русских и иностранных научных обществ, академий и университетов.

Родился в с. Окатово (теперь Калужская обл.) в дворянской семье. Окончил Московский университет (в 1841 г.). С 1847 г. работал в Петербургском университете (профессор с 1850 г.), один из основателей Петербургской математической школы.



Пафнутий Львович Чебышев.

Еще в «Началах» Евклида доказывалось, что простых чисел бесконечно много. Следующий шаг был сделан только П. Л. Чебышевым, который открыл и обосновал закон простых чисел: он установил, что число простых чисел, не превышающих N, приблизительно равно $\frac{N}{\ln N}$.

Занимаясь теорией механизмов, Чебышев создал новую математическую дисциплину — теорию наилучшего приближения функций полиномами, значение которой в настоящее время трудно переоценить. Однако он не ограничился разработкой только теории, но и сконструировал около 40 различных механизмов и около 80 их модификаций. В теории вероятностей он доказал закон больших чисел, разработал так называемый метод моментов для доказательства центральной граничной теоремы и тем самым преобразовал теорию вероятностей в строгую математическую дисциплину. Чебышеву принадлежит много других работ по математическому анализу, теории интерполяции, теории функций, теории поверхностей и т. д. В каждой из этих областей он указал новые направления исследований, разработал общие методы и получил фундаментальные результаты. При разработке вопросов теории Чебышев неизменно исходил из актуальных конкретных практических проблем, благодаря чему его результаты оказали очень глубокое влияние на все дальнейшее развитие математики.

П. Л. Чебышев создал отечественные школы по теории чисел, конструктивной теории функций и теории вероятностей. Его учениками и последователями являются такие выдающиеся математики, как Георгий Феодосьевич Вороной (1868—1908), Дмитрий Александрович Граве (1863—1939), Егор Иванович Золотарев (1847—1878), Александр Николаевич Коркин (1837—1908), Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918), Андрей Андреевич Марков (1856—1922), Владимир Андреевич Стеклов (1863—1925) и многие другие.

В 1944 г. Академия наук СССР установила премию имени П. Л. Чебышева за лучшие исследования в области математики, теории механизмов и машин.

В 1944—1951 гг. вышло в свет пятитомное полное собрание сочинений Чебышева.

Контрольные упражнения

1. Найти следующие неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int x^7\,dx; \quad \text{б) } \int (\sqrt{x} + x^3 - \sin x)\,dx; \quad \text{в) } \int (a + bx + cx^2)\,dx;$$

$$\text{г) } \int (e^x + e^{-x} - \cos 2x)\,dx; \quad \text{д) } \int 5^x\,dx; \quad \text{е) } \int \frac{3 + 2x}{1 + x^2}\,dx.$$

2. Выполнить интегрирование при помощи подстановки:

$$\text{а) } \int \cos 7x\,dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2 + 3\sin x}}; \quad \text{в) } \int \frac{2\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}\,dx;$$

$$\text{г) } \int e^{-\cos x} \sin x\,dx; \quad \text{д) } \int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1 - x^4}}; \quad \text{е) } \int (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)\,dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx; \quad \text{з) } \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^5\varphi}; \quad \text{и) } \int \frac{\ln z^3}{z}\,dz.$$

3. Определить следующие первообразные, воспользовавшись методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int x \sin x\,dx; \quad \text{б) } \int x^2 e^x\,dx; \quad \text{в) } \int \arcsin x\,dx;$$

$$\text{г) } \int x^3 \ln x\,dx; \quad \text{д) } \int x \operatorname{arctg} x\,dx; \quad \text{е) } \int x \operatorname{sh} x\,dx.$$

4. Найти функцию, производная которой есть $x^2 - 1$, зная, что при $x = 0$ функция принимает значение равное 7.

5. Найти функцию, производная которой есть $2\sin x - 3\cos x$ и которая при $x = \frac{\pi}{2}$ принимает значение равное 12.

6. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 3), зная, что наклон k касательной к кривой в каждой ее точке определяется формулой $k = 6x^2 - 5$.

7. Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, вычислить следующие определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 (5x^4 - 2x)\,dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} 7\cos x\,dx; \quad \text{в) } \int_{-1}^{+1} e^x\,dx;$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx; \quad \text{д) } \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}; \quad \text{е) } \int_2^4 \frac{3 - x}{x^3}\,dx.$$

8. Вычислить при помощи подстановки значения таких определенных интегралов:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x\,dx; \quad \text{б) } \int_0^{\pi/3} e^{\cos x} \sin x\,dx; \quad \text{в) } \int_1^2 \frac{x\,dx}{1 + x^2}.$$

9. Доказать, что

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx \quad (m > 0;\ n > 0).$$

10. Вычислить по формуле Симпсона с четырьмя значащими цифрами интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}\, dx.$$

11. Определить π при помощи взвешивания, взяв в качестве контрольной фигуры вписанный правильный шестиугольник. При этом после 10-кратного повторения эксперимента результаты должны получиться более точными, чем в табл. 31, так как площадь шестиугольника отклоняется от площади круга меньше, чем площадь вписанного квадрата. Повторить этот же эксперимент для сектора с центральным углом $\alpha = \frac{\pi}{6}$, взяв в качестве контрольной фигуры правильный вписанный треугольник.

12. Найти площади фигур, ограниченных следующими линиями:

а) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 3$; б) $y = x^3$, $y = 4x$;
в) $y^2 = 6x$, $x^2 = y$; г) $y = \operatorname{ch} x$, $y = 2$.

13. Найти длину дуги параболы $y = x^2$, заключенную между вертикальными прямыми $x = 1$ и $x = 2$.

14. Найти объем тела, поверхность которого образуется вращением вокруг оси Ox дуги синусоиды $y = \sin x$, заключенной между началом координат и точкой $(\pi; 0)$.

15. Скорость v тела задана формулой $v = (3t^2 - 5t + 3)$ *м/сек*. За время $t = 10$ *сек* тело проходит путь s, равный 780 *м*. Найти закон движения тела.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

В настоящее время прикладная математика находится в стадии становления, и поэтому круг изучаемых ею вопросов недостаточно точно определен. В прикладной математике широко применяется моделирование, а также численные и графические методы, позволяющие доводить решение сложных научных, технических и инженерных задач, выдвигаемых практикой, до логического конца, т. е. до числа, графика, номограммы и т. д. Однако, несмотря на ряд положительных качеств, этим методам присущ и существенный недостаток: они не обладают универсальностью аналитических решений. Устранение этого недостатка является одной из центральных проблем прикладной математики, которая еще ждет своих исследователей.

Численные методы выделились в самостоятельную математическую дисциплину в начале нашего столетия, но их бурное развитие началось только в середине XX века в связи с новыми, очень сложными задачами физики и техники, а также в связи с появлением новых вычислительных средств, прежде всего электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Перейдем к изложению основных сведений по прикладной математике, усвоив которые читатель сможет самостоятельно продолжить изучение этой дисциплины.

Глава VI

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

§ 72. Вводные замечания

Решим такую простую задачу. Допустим, что пассажир живет на расстоянии 1247 *м* от вокзала. За сколько времени до отхода поезда пассажир должен выйти из дому, если средняя скорость пешехода равна 6 *км/час*?

Решение задачи получаем сразу:

$$t = \frac{1247 \cdot 60}{6000} = 12{,}47 \text{ мин} = 12 \text{ мин } 28{,}2 \text{ сек.}$$

Однако вряд ли в действительности кто-либо стал бы пользоваться этим математически точным решением и вот почему. Вычисления выполнены совершенно точно, но точно ли измерено расстояние до вокзала? Да и можно ли вообще измерить путь пешехода, не допустив никаких погрешностей? Может ли пешеход передвигаться по строго определенной линии в городе, где полно людей и машин, которые перемещаются во всевозможных направлениях? А скорость 6 *км/час* — разве она определена абсолютно точно? И т. д., и т. д.

Вполне понятно, что каждый в данном случае отдаст предпочтение не «математически точному», а «практическому» решению этой задачи, т. е. прикинет, что идти надо 12—15 *мин*, и прибавит еще несколько минут для гарантии.

Для чего же в таком случае вычислять секунды и их десятые доли и стремиться к той степени точности, которой нельзя воспользоваться на практике?

Математика, безусловно, наука точная, но понятие «точности» само требует конкретизации. Для того чтобы это осуществить, начинать надо с понятия числа, так как от точности чисел, т. е. от достоверности исходных данных, в значительной мере зависит точность результатов выполняемых вычислений.

Есть три источника получения чисел: *измерения, счет и выполнение различных математических операций*. Любое *измерение* нельзя выполнить абсолютно точно. Каждый прибор дает какую-то, большую или меньшую, погрешность. Два наблюдателя, измеряя одним и тем же прибором одну и ту же величину, как правило, получают несколько различные результаты, полное же совпадение результатов является редким исключением.

Ошибка каждого измерения слагается из ошибки прибора и ошибки наблюдателя. Убедиться в этом помогает такой простой опыт.

Построим на листе неразлинованной бумаги при помощи линейки с миллиметровыми делениями и циркуля прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 180$ *мм* и $BC = 130$ *мм*; измерим этой же линейкой диагонали AC и BD, определяя на глаз результаты с точностью до 0,1 *мм*, а затем вычислим их произведение $AC \cdot BD$. Выполнив этот опыт несколько раз, убедимся, что результаты будут отличаться как один от другого, так и от точного значения, которое согласно теореме Пифагора равно

$$AC \cdot BD = AC^2 = AB^2 + BC^2 = 49300 \text{ мм}^2.$$

Если опыт выполнит группа из нескольких человек, то результаты будут еще более наглядными.

Следовательно, даже такой простейший измерительный прибор, как масштабная линейка, и тот имеет «ошибку прибора». Действительно, ребра и плоскости ее несколько отличаются от идеальных прямых и плоскостей, а штрихи на линейке не могут быть нанесены на абсолютно равных расстояниях, и, кроме того, эти штрихи имеют определенную толщину, так что при измерении мы не можем получить результаты более точные, чем позволяет толщина этих штрихов. Результаты измерений и построений также зависят от качества используемых инструментов.

Перейдем ко второму источнику получения чисел — к *счету*. Если количество пересчитываемых предметов невелико и если оно постоянно во времени, то мы будем получать совершенно точные результаты. Но можно ли, например, утверждать, что в конце 1970 г. число жителей Мексики действительно составляло 48 377 363, как было установлено в результате проведенной переписи? * Ведь численность населения страны или города постоянно колеблется (даже за тот промежуток времени, в течение которого выполнен счет) вокруг своего среднего значения, так как ежечасно, ежеминутно люди приезжают и уезжают, рождаются и умирают.

Математические операции также не все можно выполнить без ошибок. Извлечь корень, найти синус или логарифм, даже разделить (если результат необходимо выразить десятичной дробью) не всегда можно абсолютно точно.

Таким образом, мы видим, что точные числа встречаются очень редко. Чаще всего это коэффициенты различных математических выражений и формул.

Рассмотрим вторую сторону вопроса. Нужна ли на практике абсолютная точность и какую ценность представляет приближенный результат?

Вновь обратимся к примерам. Никто не останется неудовлетворенным ответом, что поезд приходит в 10 *час* 47 *мин* с возможным опережением или опозданием в пределах 15 *сек*, т. е., как принято говорить, в $10^h\,47' \pm 15''$, тем более, что само понятие прибытия поезда несет в себе известную неопределенность: прибытием можно считать либо тот момент, когда поезд подошел к перрону, либо момент остановки локомотива, либо момент остановки последнего вагона, двигающегося некоторое время по инерции.

При расчете линий электропередачи или газопровода никто не будет определять расстояние между опорами с точностью до миллиметра или диаметр трубы с точностью до микрона. Норму высева семян устанавливают с точностью до нескольких килограммов на гектар и т. д.

В технике и строительстве каждую деталь или сооружение можно изготовить только в пределах точности, которая определяется так называемыми *допусками*. Эти допуски колеблются от долей микрона до миллиметров, сантиметров и даже дециметров, в зависимости от материала, размера и предназначения детали или сооружения. Следовательно, для определения размеров детали не имеет никакого смысла вести вычисления с точностью большей, чем та, которая определена допусками.

Резюмируя сказанное, приходим к следующему:

1. Исходные данные, как правило, имеют погрешности, т. е. являются приближенными.

2. Эти погрешности, чаще в увеличенном размере, переходят в результаты вычислений. Но практика и не требует точных данных, а удовлетворяется результатами с некоторыми допустимыми погрешностями, величина которых должна быть наперед заданной.

В большинстве технических расчетов допустимые погрешности находятся в пределах от 0,1 до 5%, но во многих научных вопросах, связанных с современной техникой, они должны быть снижены до тысячных долей процента, а иногда и более. Так, при запуске с промежуточной орбиты первого в мире искусственного спутника Луны, который был осуществлен 31 марта 1966 г., необходимо было обеспечить вторую начальную космическую скорость ($v_0 \approx 11\,200$ *м/сек*) с точностью до нескольких сантиметров в секунду, так как даже такая микроскопическая ошибка настолько влияет на параметры орбиты, что запускаемый аппарат может стать спутником Солнца, а не Луны. Еще большую точность следовало обеспечить при расчете и строительстве гигантского синхрофазотрона, кольцевой магнит которого, имеющий диаметр около 1,5 *км*, надо было рассчитать, изготовить и установить с микронной точностью.

3. Обеспечить необходимую точность результата можно только тогда, когда исходные данные берут достаточно точными и когда учитывают все погрешности, которые привносятся самими вычислениями.

---

* «Известия» от 2 февраля 1971 г.

4. Вычисления с приближенными числами необходимо выполнять приближенно, стремясь при решении каждой конкретной задачи достигнуть минимальной затраты труда и времени.

Правила и законы арифметики выведены в предположении, что все числа точные. Поэтому если вычисления с приближенными числами выполнять обычными способами, то затрачивается много времени на нахождение ненужных (свыше возможной точности) цифр и, самое главное, *создается опасное и вредное впечатление точности там, где ее в действительности нет.*

Истинная математическая и вообще научная точность состоит именно в том, чтобы указать на наличие почти всегда неизбежных погрешностей и определить их пределы. Наиболее четко эти основные положения прикладной математики сформулировал А. Н. Крылов.

Алексей Николаевич Крылов.

Алексей Николаевич Крылов (1863—1945), выдающийся русский математик, механик и кораблестроитель, основоположник теории корабля, академик (с 1916 г.), Герой Социалистического Труда (1943 г.). Родился в с. Висяге Ардатовского уезда Симбирской губернии (теперь Ульяновской обл.) в семье артиллерийского офицера. В 1884 г. блестяще окончил в Петербурге Морское училище, а в 1890 г. — Морскую академию (имя его, как лучшего слушателя, было занесено на мраморную доску). В дальнейшем вся научная и педагогическая деятельность Крылова связана с Морской академией. Здесь он воспитал блестящую плеяду видных отечественных ученых.

А. Н. Крылов был выдающимся педагогом. Его педагогическое кредо — «научить учиться». Он совершенно справедливо считал, что никакая школа не может создать законченного специалиста. Необходимо только привить учащимся культуру, любовь к труду, к науке. По представлению Н. Е. Жуковского в 1914 г. Московский университет присудил Крылову ученую степень почетного доктора прикладной математики. В этом же году он был избран членом-корреспондентом, а в 1916 г. — академиком Российской академии наук.

Перу А. Н. Крылова принадлежит 285 работ по математике, механике, астрономии, физике, технике, истории науки и техники и особенно много по теории корабля. Полное собрание сочинений Крылова в 12 томах было издано Академией наук СССР в 1951—1956 гг. Отличительной чертой всех его работ является доходчивость изложения любых сложных вопросов. Во всяком изучаемом явлении он умело выделял главное и стремился довести результаты исследований до уровня, доступного пониманию инженеров, дать исчерпывающее решение поставленной задачи, довести решение до конкретного числового результата. Его девизом было направление творческих усилий на решение проблем и задач, выдвигаемых практикой. Огромное влияние на научное творчество А. Н. Крылова оказали А. Н. Коркин, А. А. Марков, А. М. Ляпунов и особенно П. Л. Чебышев, лекции которого он слушал в Петербургском университете после окончания Морской академии. Только благодаря творческому овладению математическими методами он смог довести исследования до числовых результатов, которыми можно пользоваться на практике. Решение же практических задач в его излюбленной области — кораблестроении — требовало не только применения математических методов, но и их усовершенствования. Крылов изобрел ряд корабельных и артиллерийских прибо-

ров и построил первую в России машину для интегрирования дифференциальных уравнений. Он был научным консультантом на ряде заводов.

Большим вкладом в развитие математики явилась работа А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» (лекции, прочитанные им в Морской академии в 1912 г. и изданные в 1913 г.). Эта работа, написанная очень ясным и доступным для широкого круга инженеров языком, содержит целый ряд важных научных результатов. В ней, в частности, исследованы вопросы, касающиеся вынужденных колебаний упругих систем, дан способ улучшения сходимости тригонометрических рядов.

«Лекции о приближенных вычислениях» А. Н. Крылова — первый в мировой литературе курс приближенных вычислений, который послужил образцом для вышедших впоследствии курсов других авторов. Этот курс Крылов прочитал в 1906 г. небольшому кругу лиц, а затем издал его литографским способом. В дальнейшем эта книга [60] неоднократно переиздавалась и каждое издание дополнялось новым материалом.

§ 73. Приближенные числа

Прежде всего уточним некоторые термины.

Верной цифрой обычно называют такую, погрешность которой не превышает половины единицы следующего разряда *.

Сомнительная цифра — следующая за верной.

Значащими цифрами данного числа называют цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, и кончая последней, за точность которой еще можно поручиться. Последняя из значащих цифр может отличаться от верной на 1—2 единицы. Например, приводимые ниже числа имеют следующее количество значащих цифр:

5423,47 — 6 значащих цифр;
0,00000605 — 3 значащие цифры;
18,003 — 5 значащих цифр.

Нуль имеет различные значения в зависимости от места, которое он занимает. Первые нули в десятичных дробях не являются значащими цифрами, в середине числа нуль всегда является значащей цифрой, а нуль, который стоит в конце числа, может иметь двоякий смысл, как это видно из следующих утверждений:

а) 1 *кг* = 1000 *г*;

б) население США на 1 июля 1970 г. по оценке Американского бюро статистики составляло 205 395 000 человек. **

В первом случае имеем точное соотношение, и поэтому все нули здесь — значащие цифры. Во втором случае нули стоят вместо неизвестных цифр и число имеет только шесть значащих цифр.

Для того чтобы избежать недоразумений, не следует писать нули вместо неизвестных цифр, а лучше применять такую форму записи:

$$205\,395 \cdot 10^3, \text{ или } 2{,}05395 \cdot 10^8.$$

Иногда нули в конце числа, которые только определяют его порядок, но не являются значащими цифрами, подчеркивают или записывают более мелким шрифтом, например: $19553\underline{0}000$ или 19553_{0000}. Поясним эти важные положения подробней. Пусть в результате измерения, выполненного с точностью до 0,5 *мм*, определено, что длина отрезка L равняется 72 *мм* = 0,072 *м*. В этом числе значащими являются только цифры 7 и 2, а нули значащими цифрами не являются. Так как число 0,072 образовалось в результате округления более точного (неизвестного нам) числа, то оно может быть любым числом, лежащим между значениями 0,0715000... и 0,0724999...

* Более строгое определение верных цифр приведено в книге [7, т. I, гл. 1, § 2].

** «Правда» от 14 августа 1970 г.

Следовательно, мы уверены в точности только двух цифр, 7 и 2 (причем в точности последней — только до пяти единиц следующего разряда). Поэтому, если тот же самый результат, не измеряя отрезок L с большей точностью, представим в километрах или микронах и напишем, что $L = 0{,}000072$ *км* или $L = 72000\mu$, то полученное число не станет более точным и нули ни в первом, ни во втором случае не будут значащими цифрами. Во втором случае эти нули лишь заменяют неизвестные нам цифры (которые можно получить, выполнив измерения более точно) и определяют собой только порядок данной величины.

В дальнейшем условимся различать такие числа, как 7,2; 7,20; 7,200. Все они выражают одно и то же числовое значение какой-то величины, но первое число определено с точностью до 0,1, второе — до 0,01, а третье — до 0,001.

Аналогично, если при помощи четырехзначных таблиц логарифмов мы нашли, что

$$\lg 5{,}38 = 0{,}7308,$$

то в случаях, когда необходимо выполнять вычисления с большей точностью, это не дает никаких оснований писать $\lg 5{,}38 = 0{,}7308000$.

Действительно, обратившись к семизначным таблицам, найдем

$$\lg 5{,}38 = 0{,}7307823,$$

но все последующие знаки (начиная с последней тройки, которая получена в результате округления) нам снова неизвестны.

Рассмотрим еще один пример. Вычислим методом проб число

$$x = \sqrt{19}.$$

Так как $(4{,}32)^2 = 18{,}6624$ и $(4{,}37)^2 = 19{,}0969$, то в качестве приближенного значения x можно взять среднее арифметическое:

$$x \approx \frac{4{,}32 + 4{,}37}{2} = 4{,}345.$$

Легко видеть, что погрешность, какую мы при этом допускаем, не превышает величины

$$\varepsilon = \frac{4{,}37 - 4{,}32}{2} = 0{,}025.$$

Действительно, вычислив точное значение x, найдем $x = 4{,}358898\ldots$, так что в нашем приближенном числе 4,345 только первые две цифры верные, а третья и четвертая — уже сомнительные.

Дадим более точные определения рассмотренным понятиям.

Приближенное число заменяет собой число точное, которое чаще всего остается неизвестным. Число называется приближенным с недостачей, если оно меньше точного, и приближенным с избытком, если оно больше точного числа. Взяв, например, вместо $\lg 5 = 0{,}698970\ldots$ число 0,699, получим приближение с избытком, а для $\pi = 3{,}14159265\ldots$ число 3,14 есть приближение с недостачей.

Очень часто точные числа имеют цифр больше, чем это необходимо. В таких случаях точные числа заменяют приближенными при помощи *округления*. В приближенных числах также можно в случае необходимости производить дальнейшее округление.

Округлить число до заданного разряда или заданного числа значащих цифр — это значит сохранить необходимое количество цифр (отсчитывая слева), отбросив остальные. Например, $7{,}538241 \approx 7{,}538$ — есть округление до тысячных, или до четырех значащих цифр. Округление надо стараться проводить так, чтобы погрешность была минимальной. Чтобы обеспечить это, придерживаются такого

правила: если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то все отбрасываемые цифры зачеркивают; если же она больше или равна 5, то все отбрасываемые цифры заменяют единицей высшего разряда.

Приведенные ниже числа округлены по этому правилу, причем разряд, до которого велось округление, отмечен вертикальной чертой:

$$25{,}7\,|\,389 \approx 25{,}7; \quad 7{,}20\,|\,497 \approx 7{,}20; \quad 8{,}6\,|\,5 \approx 8{,}7;$$

$$13{,}7\,|\,5 \approx 13{,}8; \quad 19\,|\,39{,}8 \approx 19 \cdot 10^2; \quad e = 2{,}7182\,|\,818\ldots \approx 2{,}7183.$$

Если всегда придерживаться этого правила округления, погрешности будут иметь разные знаки (с превышением или недостачей) и при выполнении арифметических действий с приближенными числами будут частично компенсировать друг друга.

Замечание 1. Еще несколько лет тому назад в случае отбрасывания последней цифры 5 пользовались так называемым правилом четной цифры: пред-

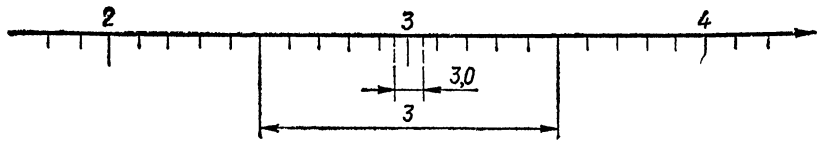


Рис. 192.

последнюю цифру оставляли без изменения, если она четная, и увеличивали на единицу, если — нечетная. Например, $8{,}75 \approx 8{,}8$, но $8{,}65 \approx 8{,}6$. В настоящее время правило четной цифры потеряло свою обязательную силу, и его обычно не придерживаются.

Замечание 2. В некоторых таблицах пятерка в последнем десятичном знаке отмечается точкой или черточкой в зависимости от того, получена ли она при вычислении таблицы с избытком или с недостатком, например, $1{,}2374541 \approx 1{,}23745$, $3{,}0287487 \approx 3{,}02875$. Это позволяет более точно производить дальнейшее округление табличных значений, так как $\bar{5}$ всегда надо отбрасывать, а $\dot{5}$ заменять единицей высшего разряда.

Представим теперь приближенные числа более наглядно. Если число 3 — точное, то ему на числовой оси соответствует одна единственная точка. Если же 3 — приближенное число, то это может быть 3,2, и 2,847, и вообще любое число, которое лежит между 2,50000.., и 3,49999..., так как, округляя эти числа, мы будем получать приближенное число 3. На числовой оси этому числу будет соответствовать уже отрезок — интервал допустимых значений приближенного числа. Чем больше в числе верных десятичных знаков, тем меньше интервал неопределенности. Например, приближенному числу 3 соответствует интервал допустимых значений 2,50000... — 3,49999..., а приближенному числу 3,0 — интервал 2,95000... — 3,04999... (рис. 192).

В заключение подчеркнем еще раз, что приближенное число рекомендуется всегда записывать так, чтобы можно было судить о его точности, для чего надо пользоваться принципом А. Н. Крылова, а именно: *приближенное число следует писать так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и лишь последняя цифра была сомнительной, и притом не более как на одну-две единицы.*

Пусть, например, в числе 87 832 734, полученном в результате приближенных вычислений, четвертая цифра уже сомнительная; тогда это число будем записывать так: $8{,}783 \cdot 10^7$; если же сомнительная пятая цифра, то это число запишется так: $8{,}7833 \cdot 10^7$.

Аналогично, если необходимо показать, что в числе 47 погрешность начинается только с пятой значащей цифры, то пользуются такой записью: 47,000.

§ 74. Абсолютная и относительная погрешности

Обозначим точное значение числа большой буквой, а его приближенное значение — малой буквой латинского алфавита. Разность между точным значением числа A и его приближенным значением a называют *погрешностью числа* a.

Очевидно, что погрешность может быть положительная, отрицательная или равная нулю. Абсолютное значение погрешности числа a называют сокращенно *абсолютной погрешностью* и обозначают малой греческой буквой эпсилон:

$$\varepsilon = |A - a|, \text{ или } \varepsilon_a = |A - a|. \quad \text{(VI.1)}$$

Точное значение числа большей частью неизвестно, следовательно, неизвестна и абсолютная погрешность. Но очень часто, не зная точного числа, мы можем установить определенную границу погрешности. Так, измеряя длину какого-либо отрезка миллиметровой линейкой, мы имеем право утверждать, что погрешность измерения не превышает 1 *мм*, точнее 0,5 *мм*, так как всегда можно видеть, как более точно округлить найденное число.

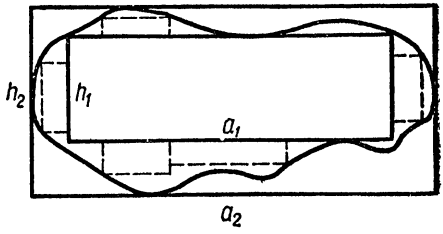


Рис. 193.

Вычислить точно площадь S произвольной плоской фигуры довольно сложно. Однако для S легко установить верхнюю и нижнюю границы. Для этого, как показано на рис. 193, надо только описать вокруг данной фигуры и вписать в нее прямоугольники, в результате чего получим неравенство:

$$a_1 h_1 < S < a_2 h_2.$$

Если в качестве приближенного значения числа взять величину

$$S \approx \frac{a_1 h_1 + a_2 h_2}{2},$$

то очевидно, что погрешность S не будет превышать полуразности площадей прямоугольников:

$$\varepsilon_S \leqslant \frac{a_2 h_2 - a_1 h_1}{2}.$$

Увеличивая число прямоугольников, как показано пунктирными линиями на рис. 193 для нижней границы, можем погрешность уменьшить. Таким образом, приходим к следующему определению.

Граничной (или предельной) абсолютной погрешностью приближенного числа a называется величина, которая равняется или превышает максимальное значение разности между этим числом и его точным значением:

$$\varepsilon_{гр} \geqslant \max |A - a|. \quad \text{(VI.2)}$$

Отметим, что граничная абсолютная погрешность есть величина всегда положительная.

В формуле (VI.2) достаточно было бы ограничиться знаком равенства, но мы вынуждены ставить и знак «больше», так как чаще всего точное значение A остается неизвестным. Поэтому на практике удовлетворяются завышенными значениями абсолютной граничной погрешности, вычисленной с определенным запасом, так как точное ее значение мы обычно не имеем возможности получить. В связи с этим для краткости вместо термина «граничная абсолютная погрешность» употребляют термин «абсолютная погрешность», хотя последний имеет

свой собственный смысл, что отмечалось выше. В дальнейшем также будем придерживаться этой традиции, делая в случае необходимости специальные оговорки.

Абсолютная погрешность ε приближенного числа a дает возможность установить границы, в которых лежит точное число A, так как из неравенства (VI.2) вытекает, что

$$a - \varepsilon \leqslant A \leqslant a + \varepsilon, \text{ или, короче, } A = a \pm \varepsilon. \qquad \text{(VI.3)}$$

Однако абсолютная погрешность сама по себе не характеризует точности вычислений или измерений.

Утверждение, что некоторая величина измерена с точностью до 1 *м*, еще не дает возможности судить о точности выполненного измерения. Если с такой точностью измерено расстояние между двумя точками, которое равно 100 *км*, то это чрезвычайно точное измерение с погрешностью равной $\frac{1}{100000} = 0{,}001\%$ измеряемой величины. Если же с такой точностью измерили ширину или длину комнаты, то ценность такого измерения невелика.

Для характеристики точности приближенных чисел вводят понятие *относительной погрешности. Относительной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению приближенной величины.* Будем обозначать относительную погрешность числа x через δ_x:

$$\delta_x = \frac{\varepsilon_x}{|x|}. \qquad \text{(VI.4)}$$

Точно так же вводится понятие граничной (или предельной) относительной погрешности.

В отличие от абсолютной погрешности, которая чаще всего бывает величиной размерной, относительная погрешность как отношение двух именованных чисел одной и той же размерности всегда есть величина безразмерная. Относительную погрешность обычно выражают в процентах и реже — в промилле (тысячных долях), например $\delta_x = 0{,}32\% = 3{,}2{}^0/_{00}$.

Отметим, что приближенное число часто считают тем более точным, чем больше десятичных знаков оно имеет. Для того чтобы проверить, так это или нет, сравним относительные погрешности хотя бы таких двух приближенных чисел, найденных в результате округления более точных чисел: 0,000001 и 98,1.

Может показаться, что первое число определено чрезвычайно точно, а второе — очень приближенно. В действительности же оба приближенных числа при округлении определяются с точностью до половины единицы последнего их разряда и абсолютная погрешность для первого числа равна $\varepsilon_1 = 0{,}0000005$, а для второго $\varepsilon_2 = 0{,}05$. Но относительная погрешность для первого числа

$$\delta_1 = \frac{0{,}0000005}{0{,}000001} = 0{,}5 = 50\%,$$

а для второго

$$\delta_2 = \frac{0{,}05}{98{,}1} = 0{,}00051 = 0{,}051\%,$$

т. е. второе число определено почти в тысячу раз точнее.

Относительная точность приближенного числа определяется только количеством его значащих цифр, и положение запятой при этом никакого значения не имеет. Например, числа 743,8; 0,007438; 7438 имеют одинаковую относительную точность, так как для них

$$\delta = \frac{0{,}05}{743{,}8} = \frac{0{,}0000005}{0{,}007438} = \frac{0{,}5}{7438} = 0{,}000067 = 0{,}0067\%.$$

Упражнения

1. Определить абсолютную и относительную погрешности при округлении числа $\pi = 3{,}14159265\ldots$ до четырех, трех и двух десятичных знаков.

2. Определить абсолютную и относительную погрешности приближенных (с недостатком и с избытком) значений числа $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ и $\pi \approx 3\frac{10}{71}$, найденных Архимедом, а также их среднего арифметического.

3. Определить, какое взвешивание выполнено более точно: железнодорожного вагона весом 45 *т* с погрешностью до 50 *кг* или 0,5 *г* лекарства с точностью 0,01 *г*.

§ 75. Сложение и вычитание приближенных чисел

При сложении двух приближенных чисел $a_1 = A_1 \pm \varepsilon_1$ и $a_2 = A_2 \pm \varepsilon_2$ получаем такой результат:

$$a_1 + a_2 = A_1 + A_2 \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2.$$

Истинные знаки погрешностей ε_1 и ε_2 нам неизвестны, следовательно, для того чтобы обеспечить достоверность результата, мы должны взять наихудший случай, когда погрешности складываются. Этот же результат получим и при сложении произвольного числа слагаемых $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, так что приходим к следующему утверждению.

Граничная абсолютная погрешность суммы равна сумме граничных абсолютных погрешностей слагаемых.

Пример 1. Согласно пятизначным таблицам логарифмов

$$\lg 1{,}1 = 0{,}04139;\ \lg 1{,}14 = 0{,}05690,$$

так что для произведения этих чисел получим

$$\lg 1{,}254 = \lg 1{,}1 + \lg 1{,}14 = 0{,}09829,$$

в то время как непосредственно по таблицам $\lg 1{,}254 = 0{,}09830$.

Расхождение результатов становится понятным, если обратиться к семизначным таблицам, согласно которым $\lg 1{,}1 = 0{,}0413927$; $\lg 1{,}14 = 0{,}0569049$, и тогда

$$\lg 1{,}1 + \lg 1{,}14 = 0{,}0982976 \approx 0{,}09830.$$

Сформулированное выше утверждение дает возможность оценить точность получаемой суммы и предвидеть, с какой точностью надо взять слагаемые для того, чтобы гарантировать необходимую точность результата.

Например, если надо найти сумму приближенных чисел

$$5{,}8 + 287{,}649 + 0{,}308064,$$

то из трех возможных способов, приведенных ниже, только последний будет правильным:

5,8	5,8	5,8
287,649	287,6	287,65
0,308064	0,3	0,31
293,757064	293,7	$293{,}76 \approx 293{,}8.$

Действительно, в числе 5,8????? ... отброшенные числа нам неизвестны, так что не имеет никакого смысла к неизвестным числам прибавлять известные и получать результат с точностью до миллионных, которая ничем не гарантирована.

Второй способ также неверен, так как совершенно не использует бо́льшую точность двух других слагаемых. Поэтому правильным будет сохранить в остальных слагаемых один лишний десятичный знак, а после сложения результат округ-

лить до десятых — согласно с точностью числа, имеющего наибольшую абсолютную погрешность. При большом числе слагаемых вычисления лучше вести с двумя запасными десятичными знаками.

Оставляя запасные десятичные знаки в остальных слагаемых, мы, конечно, не устраняем погрешности, которую имеет наименее точное слагаемое, но почти исключаем погрешности всех остальных слагаемых и погрешность всей суммы сводим к погрешности слагаемого с наибольшей абсолютной погрешностью.

Пример 2. Вычислим $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{10}$ с тремя десятичными знаками.

Решение. Так как сумму надо получить с тремя десятичными знаками, то каждое из слагаемых следует вычислить с одним запасным знаком: $\sqrt{2} = 1{,}4142$; $\sqrt{3} = 1{,}7321$; $\sqrt{10} = 3{,}1623$, тогда

$$x = 1{,}4142 + 1{,}7321 + 3{,}1623 = 6{,}3086 \approx 6{,}309.$$

При вычитании приближенных чисел их погрешности также вычитаются, но алгебраически, т. е. когда обе погрешности одного знака, они вычитаются, а когда у них знаки различные, то складываются. Поэтому, как и в случае сложения, *граничная абсолютная погрешность разности двух приближенных чисел равняется сумме их граничных абсолютных погрешностей.*

Для того чтобы отнять одно приближенное число от другого, прежде надо одинаково их округлить. Например, 27,613 от 546,3 отнимаем так:

$$546{,}3 - 27{,}6 = 518{,}7.$$

При этом нет никаких оснований писать

$$546{,}300 - 27{,}613 = 518{,}687,$$

так как в числе 546,3?? цифры сотых и тысячных нам неизвестны и заменять их нулями нет никаких оснований.

Наиболее опасные погрешности возникают при определении разности двух близких величин. Например,

$$831{,}747 - 831{,}721 = 0{,}026;$$

разность двух чисел, из которых каждое имеет шесть значащих цифр, сохранила только две значащие цифры, причем полученный результат может иметь погрешность до одной единицы последнего разряда.

Избежать таких погрешностей можно либо взяв при вычитании двух близких величин их приближения с достаточно высокой точностью, либо исключив разность близких величин, либо вычислив эту разность непосредственно с максимально возможной точностью. Например, если надо найти число

$$x = \sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287}$$

с двумя значащими цифрами, то сами корни надо взять с пятью значащими цифрами: $\sqrt{4{,}300} = 2{,}0736$; $\sqrt{4{,}287} = 2{,}0705$; и только тогда будем иметь

$$x = 2{,}0736 - 2{,}0705 = 0{,}0031.$$

Этот же результат проще получить при помощи такого преобразования:

$$x = \frac{(\sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287})(\sqrt{4{,}300} + \sqrt{4{,}287})}{\sqrt{4{,}300} + \sqrt{4{,}287}} = \frac{4{,}300 - 4{,}287}{2{,}07 + 2{,}07} = \frac{0{,}013}{4{,}14} = 0{,}0031.$$

В данном случае корни надо было найти только с тремя значащими цифрами, что имеет принципиальное значение, так как встречается немало задач, в которых каждый дополнительный знак точности требует выполнения значительного объема работы.

Пример 3. Вычислить площадь концентрического кольца, если дан радиус r внутренней окружности и разность радиусов равна a.

Решение. Искомая площадь

$$S = \pi\,[(r \dotplus a)^2 - r^2],$$

и если a мало, то непосредственное вычитание даст большую потерю точности. Поэтому в данном случае выгоднее расчет вести по формуле

$$S = \pi\,(2ar \dotplus a^2) = a\pi\,(2r \dotplus a).$$

В тех случаях, когда нет возможности ни преобразовать данную расчетную формулу, ни обеспечить вычисление промежуточных данных с необходимой степенью точности, разность двух близких величин может полностью обесценить результаты всех предыдущих вычислений.

Определим относительную погрешность δ для суммы и разности приближенных чисел.

В случае суммы n положительных слагаемых будем иметь

$$\delta = \frac{\varepsilon_1 \dotplus \varepsilon_2 \dotplus \cdots \dotplus \varepsilon_n}{a_1 \dotplus a_2 \dotplus \cdots \dotplus a_n},$$

где ε_j есть абсолютная погрешность слагаемого a_j; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Обозначим через $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ относительные погрешности слагаемых $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если все $a_j > 0$, то согласно формуле (VI.4)

$$\varepsilon_1 = \delta_1 a_1;\ \varepsilon_2 = \delta_2 a_2;\ \ldots;\ \varepsilon_n = \delta_n a_n.$$

Обозначим еще через δ_{max} и δ_{min} наибольшее и наименьшее из чисел $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. Тогда будем иметь следующие оценки:

$$\delta = \frac{\delta_1 a_1 \dotplus \delta_2 a_2 \dotplus \cdots \dotplus \delta_n a_n}{a_1 \dotplus a_2 \dotplus \cdots \dotplus a_n} < \frac{\delta_{max}\,(a_1 \dotplus a_2 \dotplus \cdots \dotplus a_n)}{a_1 \dotplus a_2 \dotplus \cdots \dotplus a_n} = \delta_{max}$$

и аналогично $\delta > \delta_{min}$.

Таким образом,

$$\delta_{min} < \delta < \delta_{max}, \tag{VI.5}$$

причем эти неравенства останутся в силе и в случае, когда все слагаемые a_j будут отрицательными, т. е. *относительная погрешность суммы слагаемых одного знака заключена между наименьшей и наибольшей относительными погрешностями слагаемых.*

В случае разности двух величин $a_1 - a_2$ одного знака дело обстоит сложнее. Пусть $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, будем иметь

$$\delta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{|\,a_1 - a_2\,|}. \tag{VI.6}$$

Следовательно, если числа a_1 и a_2 близки друг к другу, то даже при очень малых погрешностях ε_1 и ε_2 (знаки которых могут быть любыми) величина относительной погрешности может быть весьма значительной. Так, в рассмотренном

выше примере $x = \sqrt{4{,}300} - \sqrt{4{,}287} = 2{,}0736 - 2{,}0705 = 0{,}0031$ относительная граничная погрешность при вычислении каждого из корней равна

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{0{,}00005}{2{,}07} = 0{,}000024 = 0{,}0024\%,$$

а относительная граничная погрешность результата

$$\delta_x = \frac{0{,}00005}{0{,}0031} = 0{,}016 = 1{,}6\%,$$

т. е. результат более чем в 600 раз грубее исходных данных.

Упражнения

1. Вычислить сумму $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \sqrt{29} + \sqrt{43}$ с двумя верными десятичными знаками, взяв один, а затем два запасных знака.

2. Вычислить разность $x = \frac{22}{7} - \pi$ с тремя значащими цифрами.

§ 76. Умножение и деление приближенных чисел. Погрешность при вычислении заданной функции

Покажем, что при умножении приближенных чисел *относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей множителей.*

Действительно, точное значение числа A связано с его приближенным значением a и относительной погрешностью $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ таким соотношением:

$$A = a \pm \varepsilon = a\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{a}\right) = a(1 \pm \delta). \qquad \text{(VI.7)}$$

Следовательно, для произведения двух чисел $A = a(1 \pm \delta_a)$ и $B = b(1 \pm \delta_b)$ получаем

$$AB = ab(1 \pm \delta_a)(1 \pm \delta_b) = ab[1 \pm (\delta_a + \delta_b) + \delta_a\delta_b].$$

Дроби δ_a и δ_b, как правило, очень малы, например 0,0005, поэтому произведением $\delta_a\delta_b = 0{,}00000025$ можно пренебречь по сравнению с суммой $\delta_a + \delta_b = 0{,}0010$. В таком случае из последнего равенства имеем

$$AB = ab[1 \pm (\delta_a + \delta_b)],$$

откуда и получаем для двух сомножителей, что

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b. \qquad \text{(VI.8)}$$

Обобщение на случай произвольного числа сомножителей выполняется аналогично.

Далее, так как деление на число B равнозначно умножению на число $\frac{1}{B}$, то и *относительная погрешность частного равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.*

Следовательно, при умножении и делении приближенных чисел необходимо принимать во внимание количество значащих цифр, характеризующих относительную точность числа, а не количество десятичных знаков, обусловливающих его абсолютную погрешность (см. § 74).

Отсюда вытекает такое правило: *при умножении или делении приближенных чисел результат не может иметь больше значащих цифр, чем их имеет наименее точный (в относительном смысле) компонент.* Поэтому при выполнении этих действий все числа надо округлять с одной или двумя лишними значащими цифрами относительно наименее точного из них, а при округлении окончательных результатов эти лишние цифры отбросить. Наименее точным в относительном смысле числом мы считаем то, которое имеет наименьшее количество значащих цифр. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Найдем произведение чисел $a = 42{,}78 \pm 0{,}005$ и $b = 0{,}0764 \pm 0{,}00005$.

Решение. Так как числа являются приближенными, то в действительности a и b могут быть произвольными числами, лежащими в таких промежутках:

$$42{,}775 \leqslant a < 42{,}785;\ 0{,}07635 \leqslant b < 0{,}07645.$$

Посмотрим, какой результат дадут граничные случаи. Для этого перемножим вначале наименьшие, а затем наибольшие возможные значения a и b и получим нижнюю границу произведения ab:

$$42{,}775 \cdot 0{,}07635 = 3{,}26587125 \approx 3{,}27$$

и его верхнюю границу:

$$42{,}785 \cdot 0{,}07645 = 3{,}27091325 \approx 3{,}27.$$

Сравнивая эти два произведения, видим, что после округления в них совпадают только первые три цифры, а остальные шесть найдены лишь для того, чтобы их зачеркнуть.

Таким образом, если найдем произведение данных приближенных чисел

$$ab = 42{,}78 \cdot 0{,}0764 = 3{,}268392 \approx 3{,}27,$$

то в этом результате можно гарантировать надежность только первых трех цифр — ровно столько значащих цифр имеет наименее точное (в относительном смысле) число: $b = 0{,}0764$. В отдельных неблагоприятных случаях даже последняя из гарантированных цифр может быть сомнительной.

Пример 2. Найдем произведение приближенных чисел:

$$a = 0{,}108 \pm 0{,}0005 \quad \text{и} \quad b = 91{,}6 \pm 0{,}05.$$

Решение. Оба числа имеют по три значащие цифры, так что и результат не может иметь большего числа значащих цифр и поэтому

$$ab = 0{,}108 \cdot 91{,}6 = 9{,}8928 \approx 9{,}89.$$

Действительно, нижними и верхними границами здесь будут произведения

$$0{,}1075 \cdot 91{,}55 = 9{,}841625 \approx 9{,}84;$$

$$0{,}1085 \cdot 91{,}65 = 9{,}944025 \approx 9{,}94,$$

поэтому последняя цифра произведения ab сомнительна и может иметь погрешность, составляющую пять единиц последнего разряда.

Для того чтобы лучше понять суть дела, выясним более подробно, чем обусловлена относительная точность приближенного числа.

Во втором примере у каждого из сомножителей a и b есть три значащие цифры, но их абсолютная и относительная погрешности имеют такие значения:

$$\varepsilon_a = 0{,}0005; \quad \varepsilon_b = 0{,}05;$$

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{|a|} = \frac{0{,}0005}{0{,}108} \approx 0{,}00463; \qquad \delta_b = \frac{\varepsilon_b}{|b|} = \frac{0{,}05}{91{,}6} \approx 0{,}00055.$$

Тогда согласно равенствам (VI.8) и (VI.4) легко определить относительную и абсолютную погрешности произведения:

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b = 0{,}00463 + 0{,}00055 = 0{,}00518 \approx 0{,}0052;$$
$$\varepsilon_{ab} = |ab| \cdot \delta_{ab} = 9{,}89 \cdot 0{,}0052 = 0{,}051 \approx 0{,}05,$$

откуда и находим, что $ab = 9{,}89 \pm 0{,}05$, т. е. тот результат, который был получен раньше.

Итак, относительная точность приближенного числа N зависит не только от количества его значащих цифр, но также от их величины. При этом главную роль играют первые две значащие цифры, которые с точностью до 1—10% определяют величину всего числа.

На рис. 194 дан график этой зависимости для чисел $1 \leqslant N \leqslant 10$, где n — количество значащих цифр. Так, например, для чисел $N_1 = 1{,}032$ и $N_2 = 9{,}968$, каждое из которых имеет по четыре значащие цифры ($n = 4$), относительные погрешности, соответственно, будут

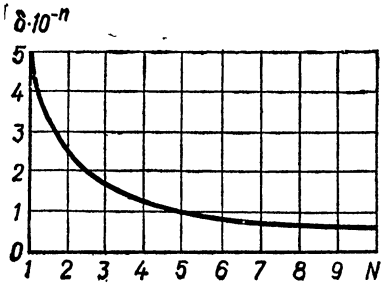


Рис. 194.

$$\delta_1 = 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}; \quad \delta_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-4},$$

т. е. второе число в десять раз более точное, чем первое, хотя оба имеют одинаковое количество значащих цифр.

Заметим также, что график на рис. 194 дает возможность определять относительную погрешность δ_N произвольного числа N, а не только чисел $1 \leqslant N \leqslant 10$.

Действительно, как показано в § 74, на относительную погрешность положение запятой совсем не влияет, и, например, числа 42,5; 0,000425; 425, различные по величине, но записанные одной и той же цифровой последовательностью {4—2—5}, характеризуются одинаковой относительной погрешностью $\delta = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Это значение δ находим при помощи графика для $N = 4{,}25$ и $n = 3$, так как все рассмотренные числа имеют три значащие цифры.

Возвращаясь ко второму примеру, видим, что неточность третьего знака произведения и обусловлена тем, что первая значащая цифра числа $a = 0{,}108$ есть единица; если бы мы взяли, например, $a = 0{,}608$, то получили бы значительно лучший результат: $ab = 0{,}608 \cdot 91{,}6 = 55{,}7 \pm 0{,}1$.

В связи с этим *для чисел, которые начинаются с единицы, надо стараться вычислять одну лишнюю значащую цифру, тогда точность результата значительно возрастет.* По этой же причине в хорошо составленных таблицах для тех значений функции, в которых первая значащая цифра есть единица, дают еще один дополнительный знак.

Подчеркнем также, что при умножении и делении приближенных чисел положение запятой у компонентов совсем не влияет на точность результатов. Например, для $a_1 = 0{,}004278$ и $b_1 = 76{,}4$ мы, как и в первом примере, получим результат с тремя значащими цифрами:

$$a_1 b_1 = 0{,}004278 \cdot 76{,}4 \approx 0{,}327.$$

Если число A точное (тогда $\varepsilon_a = \delta_a = 0$), то относительная погрешность произведения bA и частного $b : A$ будет равна относительной погрешности δ_b приближенного числа b, абсолютная погрешность произведения bA увеличится в A раз; абсолютная погрешность частного $b : A$ уменьшится в A раз.

Возведение в степень приближенного числа всегда можно рассматривать как n-кратное умножение этого числа самого на себя, поэтому согласно формуле (VI.8) *относительная погрешность степени равна относительной погрешности основания, умноженной на показатель степени* n. Это означает, что при возведении в степень относительная погрешность увеличивается пропорционально пока-

зателю степени, т. е. при возведении в квадрат относительная погрешность удваивается, при возведении в куб — утраивается и т. д.

Следовательно, пользуясь таблицами степеней (которые составлены для точных чисел, благодаря чему в них приведены все вычисленные цифры), не следует записывать лишние знаки. Например, для числа $N = 3{,}712 \pm 0{,}0005 \approx \approx 3{,}712$ согласно таблице [135] имеем:

$$N^2 = 13{,}778944; \quad N^3 = 51{,}147440128.$$

Но поскольку число N приближенное, а не точное, то его нижняя и верхняя границы дают

$$(3{,}7115)^2 = 13{,}7752 \ldots; \quad (3{,}7115)^3 = 51{,}12677 \ldots;$$
$$(3{,}7125)^2 = 13{,}7826 \ldots; \quad (3{,}7125)^3 = 51{,}16811 \ldots.$$

Отсюда понятно, что, пользуясь таблицей, надо записать только четыре значащие цифры:

$$N^2 = 13{,}78; \quad N^3 = 51{,}15,$$

если это окончательные результаты; если же это промежуточные результаты, то для уменьшения общей погрешности вычислений лучше взять еще одну запасную цифру, которая будет отброшена при округлении окончательного результата. Выписывание же всех цифр, приведенных в таблице, как уже отмечалось, есть напрасная трата времени и труда, в результате которой создается вредное и опасное впечатление большой точности там, где ее в действительности нет.

При извлечении корня из приближенного числа относительная погрешность уменьшается пропорционально показателю корня, поэтому в результате всегда получаем не меньшее количество значащих цифр, чем то, которое имеется в подкоренном числе.

Например, $\sqrt{1{,}248} = 1{,}117$, причем все цифры результата верны, так как $\sqrt{1{,}2475} = 1{,}11691 \ldots$; $\sqrt{1{,}2485} = 1{,}11736 \ldots$. Таким образом, для того чтобы в этом примере получить результат с тремя десятичными знаками, нет надобности иметь подкоренное число с шестью верными десятичными знаками, как это может показаться, если исходить из известного правила извлечения квадратного корня из точного числа.

В заключение остановимся на общем случае вычисления значения функции, когда ее аргумент есть приближенное число. В этом случае граничная абсолютная погрешность функции равна произведению абсолютной величины ее производной на граничную абсолютную погрешность аргумента.

Другими словами, если $y = f(x)$ есть заданная дифференцируемая функция, то ее абсолютная погрешность ε_y, вызываемая абсолютной погрешностью ε_x аргумента x, будет с точностью до малых высшего порядка (относительно ε_x) определяться формулой

$$\varepsilon_y = \varepsilon_x |f'(x)|. \tag{VI.9}$$

Действительно, разлагая заданную функцию $f(x)$ в ряд Тейлора* и удерживая в нем только первые два члена, имеем

$$y(x + \varepsilon_x) = f(x \pm \varepsilon_x) = f(x) + f'(x)\,\varepsilon_x \pm \cdots,$$

откуда непосредственно и получаем формулу (VI.9), так как

$$\varepsilon_y = |y(x \pm \varepsilon_x) - y(x)|.$$

Воспользовавшись формулами (VI.4) и (VI.9), находим формулу для определения относительной погрешности функции $y = f(x)$:

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|y|} = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| \varepsilon_x. \tag{VI.10}$$

* На этом вопросе остановимся в § 98 гл. VIII.

В частности, при вычислении десятичного логарифма от приближенного числа, т. е. в случае

$$y = \lg x = \log_{10} x$$

согласно формуле (VI.9) имеем

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon_x}{|x \ln 10|} = M\frac{\varepsilon_x}{|x|} = M\delta_x, \text{ где } M = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434 \ldots . \qquad \text{(VI.11)}$$

Таким образом, абсолютная погрешность десятичного логарифма примерно равна половине (точнее 0,434 ...) относительной погрешности числа, стоящего под знаком логарифма. Так как относительная погрешность числа определяется числом его значащих цифр и величиной первой из них (см. рис. 194), то в мантиссе логарифма всегда столько верных цифр, сколько их имеет само число, т. е. при определении логарифма приближенного числа следует брать таблицы со столькими десятичными знаками, сколько есть верных знаков в аргументе под знаком логарифма.

При обратном определении числа по его логарифму, погрешность которого составляет одну единицу последнего его знака, мы сделаем в числе относительную ошибку $\delta_x = \frac{1}{0{,}434}$, т. е. 2,30 этой единицы.

Отсюда видно, что, определяя число по его логарифму. можно получить в числе лишь столько верных цифр, сколько их всех в мантиссе логарифма, когда первая цифра числа есть 4 или менее, и одной цифрой меньше, когда первая цифра есть 5 или более. При этом предполагается, что ошибка в логарифме составляет одну единицу последнего знака, как это обычно и бывает в приближенных вычислениях.

Упражнения

1. Определить при помощи нижних и верхних границ, сколько значащих цифр имеют такие произведения и частные приближенных чисел, определенных с точностью до половины единицы последнего разряда: а) 27,6 · 8,3; б) 27,61843 · 8,3; в) 0,7342 : 0,3271; г) 6,7 : 2,3784.

2. Вычислить и установить количество значащих цифр в результате, если исходные данные — приближенные числа, определенные с точностью до половины единицы последнего разряда: $(0{,}378)^3$; $(7{,}542)^2$; $\sqrt{0{,}0428}$; $\sqrt{17{,}5324}$.

3. Определить абсолютную и относительную погрешности для величин $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, если $x = 1{,}234 \pm 0{,}0005$.

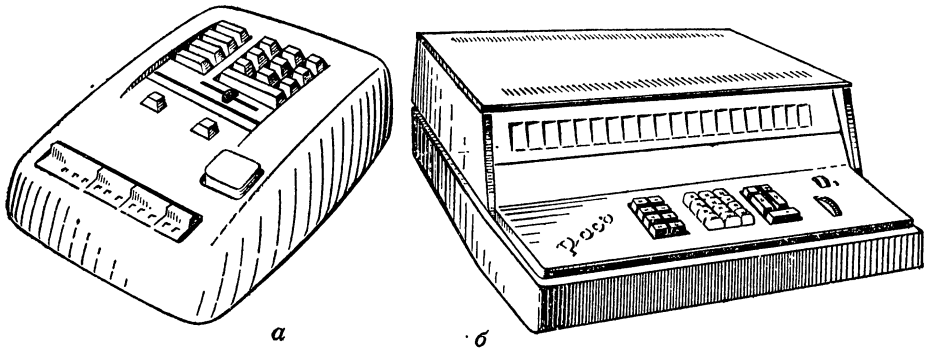
§ 77. Приближенное извлечение корня

В настоящее время очень широкое распространение получили электронные вычислительные машины (ЭВМ), которые ускорили выполнение расчетов в десятки и сотни тысяч раз. Но индустриальные методы счета дают экономический эффект лишь тогда, когда решаются типовые задачи, многократно повторяемые, такие, как расчет траекторий искусственных спутников, составление синоптического или экономического прогноза, расчет системы автоматического регулирования и т. д., т е. задачи, которые программируются один раз, но воспроизводятся многократно при тех или иных измененных данных. Если же решается задача поискового характера либо нестандартная, воспроизводимая лишь небольшое число раз, то для таких расчетов применение ЭВМ нецелесообразно, так как программирование, отладка программы и подготовка машины обходятся весьма дорого. Поэтому умение провести быстро и точно математический расчет еще долгое время будет полезно всем, кого интересуют вопросы прикладной математики. С аналогичной тенденцией мы встречаемся не только в математике. Так, например, современный реактивный самолет не упразднил и не упразднит велосипеда: каждая из этих машин находит свою собственную область применения.

В последнее время стали появляться и небольшие электронные машины, предназначенные для индивидуальных поисковых расчетов, причем работа в этом направлении ведется все более интенсивно. Поэтому мы кратко остановимся на вопросах методики вычислений при помощи малых вычислительных машин*.

Эффективность вычислений на малых вычислительных машинах, в том числе и на арифмометре, зависит от скорости выполнения отдельных операций и от правильного выбора способов вычислений.

Наиболее эффективны однотипные способы вычислений, которые требуют минимального количества установок и гашения чисел, а также минимального числа оборотов установочного счетчика или рукоятки арифмометра. Особое внимание надо обратить на то, чтобы выбранный порядок вычислений обеспечивал минимальное число записей промежуточных результатов. Это не только экономит время, но и уменьшает ошибки округлений и помогает избежать описок, которые, к сожалению, всегда возможны при записывании чисел.



а *б*

Рис. 195.

Из современных малогабаритных вычислительных машин для индивидуального пользования заслуживает внимания десятиклавишная машина с электрическим приводом «Быстрица», общий вид которой представлен на рис. 195, *а*.

Машина выполняет четыре арифметических действия. Умножение и деление выполняются полуавтоматически. Ввод данных в машину и управление ею осуществляются нажатием клавиши, снятие результатов — визуально.

Напряжение питания — 127 или 220 *в* переменного тока, частота — 50 *гц*. Потребляемая мощность — не более 40 *вт*.

Количество клавиш: цифровых — 10, управления — 8. Емкость исполнительных элементов: установочного механизма — 10 разрядов, счетчика — 11 разрядов, индикатора оборотов — 1 разряд. Быстродействие машины — не менее 300 циклов в минуту.

Габариты машины: длина — 270 *мм*, ширина — 220 *мм*, высота — 120 *мм*. Масса машины — не более 3,5 *кг*.

Таким образом, данная машина (или аналогичная ей по классу) вполне доступна для оборудования математических кабинетов средних школ, и чем быстрее и энергичнее эту работу проведет Министерство просвещения, тем больший вклад оно внесет в очень необходимую и важную работу по улучшению преподавания математики, значение которой трудно переоценить.

Для более сложных вычислений можно рекомендовать машину «Рось», общий вид которой представлен на рис. 195, *б*, или машину «Искра». Очень удобна и надежна в эксплуатации настольная клавишная вычислительная машина «Soemtron», изготавливаемая в Германской Демократической Республике, и многие другие.

Методика вычислений на арифмометре и малых клавишных машинах достаточно подробно описана в литературе по численным методам, поэтому в данном

* В последующих главах мы также будем возвращаться к этим вопросам.

параграфе ограничимся только изложением вопроса о приближенном извлечении корней.

Квадратный корень проще всего вычислять при помощи *метода последовательных приближений (итераций)*.

Допустим, что

$$\sqrt{x} = a \pm \varepsilon,$$

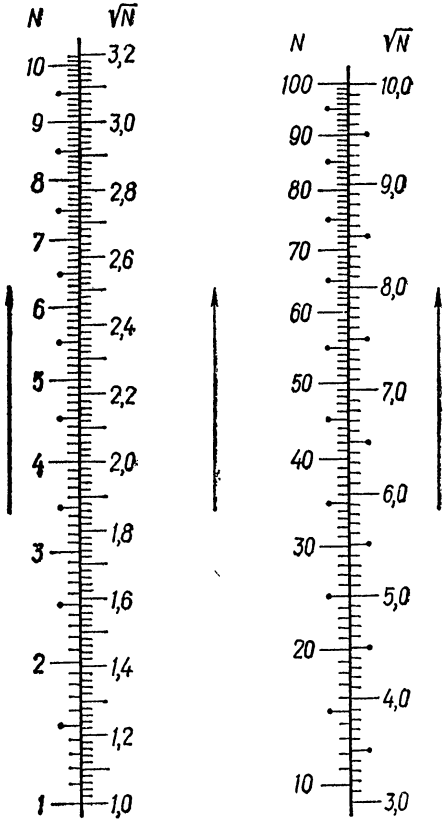


Рис. 196.

где a — приближенное значение корня, а ε — погрешность. Тогда

$$\varepsilon^2 = (\sqrt{x} - a)^2 = x - 2a\sqrt{x} \pm a^2.$$

Отсюда, пренебрегая малой величиной ε^2, получаем итерационную формулу, которая принадлежит Ньютону:

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(a \pm \frac{x}{a}\right), \qquad \text{(VI.12)}$$

где

$$a \approx \sqrt{x}.$$

По заданному $\sqrt{x} \approx a_0$ находим при помощи формулы (VI.12) более точное первое приближение $a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{x}{a_0}\right)$, которое дает возможность вычислить второе приближение $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{x}{a_1}\right)$ и т. д. Вычисления ведем начиная с одного-двух знаков, а затем постепенно увеличиваем их число.

Процесс заканчиваем тогда, когда два последующих приближения совпадут между собой с требуемой точностью. Сходимость процесса хорошая, и в каждом шаге число верных цифр примерно удваивается.

Пример 1. Вычислить с пятью значащими цифрами $y = \sqrt{28{,}347}$.

Решение. Положим $a_0 = 5$. Согласно формуле (VI.12):

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{28{,}347}{5}\right) \approx 5{,}33;$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(5{,}33 \pm \frac{28{,}347}{5{,}33}\right) \approx 5{,}3242;$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(5{,}3242 \pm \frac{28{,}347}{5{,}3242}\right) = 5{,}32419 \ldots \approx 5{,}3242,$$

и, следовательно, с заданной нам точностью $y = \sqrt{28{,}347} = 5{,}3242$.

Еще лучшие результаты получим, если нулевое приближение будем находить при помощи номограммы из сдвоенных шкал, представленной на рис. 196.

Пользоваться номограммой очень просто: на шкале N находим заданное число и против него на шкале $\sqrt{N}$ читаем ответ. Например:

а) $N = 3{,}45$, $\sqrt{N} = 1{,}86$; б) $N = 467$, $\sqrt{N} = 21{,}6$;
в) $N = 42{,}6$, $\sqrt{N} = 6{,}53$; г) $N = 0{,}765$, $\sqrt{N} = 0{,}875$.

Рассмотренные примеры показывают, в частности, как пользоваться номограммой и за пределами $1 \leqslant N \leqslant 100$. Для этого надо подкоренное число и результат уменьшить или увеличить в 10^{2n} и, соответственно, в 10^n раз ($n = 1, 2, 3, \ldots$), как это было сделано в примерах б) и г):

$$\sqrt{467} = \sqrt{4{,}67 \cdot 10^2} = 2{,}16 \cdot 10 = 21{,}6;$$
$$\sqrt{0{,}765} = \sqrt{76{,}5 : 10^2} = 8{,}75 : 10 = 0{,}875.$$

Для того чтобы облегчить считывание результатов, удобно пользоваться прозрачной линейкой, изготовленной из тонкого плексиглаза или отмытой фотопленки, на которой следует острым предметом провести тонкую прямую черту, четко выделяющуюся на фоне номограммы. Во избежание погрешностей, вызываемых параллаксом, линейку на номограмму надо класть чертой вниз.

Номограмма обеспечивает результат с тремя значащими цифрами.

Подставив его в формулу Ньютона, мы уже в первом приближении найдем корень, по крайней мере, с пятью значащими цифрами. Так, для $N = 12{,}473$ по номограмме находим $a_0 = \sqrt{N} = 3{,}53$, и тогда по формуле (VI.12) имеем

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_0} + a_0\right) = \frac{1}{2}(3{,}533428 \dotplus 3{,}530000) = 3{,}531714,$$

а точное значение $\sqrt{12{,}473} = 3{,}531713465 \ldots$.

Переходим к приближенному извлечению корня n-й степени, для которого аналогичным путем получаем следующую формулу:

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\left[(n-1)\,a + \frac{x}{a^{n-1}}\right], \qquad \text{(VI.13)}$$

где

$$a \approx \sqrt[n]{x}.$$

Методика вычислений по формуле (VI.13) остается такой же, как и при извлечении корня по формуле (VI.12). При этом подкоренное число x может быть и приближенным и точным.

Пример 2. Вычислить с восемью значащими цифрами $\sqrt[5]{10}$, где $x = 10$ есть число точное.

Решение. Так как $2^5 = 32$ и $1^5 = 1$, то, взяв $a_0 = \frac{2 \dotplus 1}{2} = 1{,}5$, согласно формуле (VI.13) при $n = 5$, $x = 10$ имеем

$$a_1 = 0{,}8a_0 + \frac{2}{a_0^4} \approx 1{,}20 + \frac{2}{5{,}1} \approx 1{,}59;$$

$$a_2 = 0{,}8a_1 + \frac{2}{a_1^4} \approx 0{,}8a_1 + \frac{2}{6{,}3913} \approx 1{,}5849;$$

$$a_3 = 0{,}8a_2 + \frac{2}{a_2^4} \approx 0{,}8a_2 + \frac{2}{6{,}3096818} \approx 1{,}5848932;$$

$$a_4 = 0{,}8a_3 + \frac{2}{6{,}30957356482\ldots} \approx 1{,}584893192463 \ldots,$$

и, следовательно, уже третье приближение дало требуемый результат: $\sqrt[5]{10} \approx$ $\approx 1{,}5848932$. Четвертое же приближение, если в нем все вычисления провести с 16 знаками, даст 14—15 значащих цифр.

При извлечении корней высоких степеней удобно также пользоваться таблицами логарифмов; в данном случае, например, пользуясь семизначными таблицами [14], получаем

$$\lg \sqrt[5]{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2000000; \qquad \sqrt[5]{10} \approx 1{,}584893.$$

Упражнения

1. Вычислить по формуле (VI.12) с шестью значащими цифрами $\sqrt{3}$ и проконтролировать результат, возведя его в квадрат.

2. Найти при помощи семизначных таблиц логарифмов [14] $y = \sqrt[10]{10}$, а затем результат проверить по формуле (VI.13).

§ 78. Оформление вычислений и их контроль

Каждое вычисление надо выполнять по тщательно разработанному *алгоритму**. Чаще всего алгоритм задают формулой, определяющей все действия, которые надо выполнить над исходными данными, для того чтобы получить искомый результат.

Очень большое значение имеет также последовательность выполнения отдельных действий, т. е. *программа вычислений*. Такую программу (при ручном счете) наиболее удобно оформить в виде специальной расчетной таблицы, в которую обязательно заносят и все вспомогательные данные. Никогда не следует пользоваться отдельными клочками бумаги для записи вспомогательных данных, так как эти клочки легко теряются, результатом чего будет напрасная трата времени и увеличение количества ошибок и описок. В шапке таблицы записывают формулу, по которой ведутся вычисления, все постоянные, необходимые для данного вычисления, а также дату и фамилию вычислителя.

Цифры надо писать четко и аккуратно, так как практика показывает, что небрежно записанные цифры часто ошибочно принимают за другие. Писать надо чернилами и только на одной стороне листа. Исправляют неправильный результат, зачеркивая его и проставляя сверху правильные цифры, но так, чтобы при надобности зачеркнутые цифры можно было прочесть.

Бланк таблицы удобно изготовлять на двойном листе, расчерченном в линейку, четко выделяя основные вертикальные и горизонтальные колонки и строки (для чего можно пользоваться цветными карандашами). Не нужно бояться затратить лишнее время на аккуратность и удобство оформления вычислений, так как потом оно будет сэкономлено в десятикратном размере.

Все дальнейшие вычисления будем выполнять только табличным способом (так же, как мы поступали при решении большинства примеров, рассмотренных в предыдущих главах), поэтому, продублировав их, читатель приобретет необходимый опыт. В качестве образца представим в виде табл. 37 вычисления, выполненные во втором примере § 77.

---

* Алгоритмом (латинизированное *Algorithmi* — от имени выдающегося узбекского математика IX века ал-Хорезми) называется совокупность математических действий, выполняемых в заданном порядке и приводящих к решению задач определенного класса после конечного числа операций. Например, при помощи алгоритма Евклида находят общий наибольший делитель двух каких-либо целых чисел или двух многочленов. Алгоритм может быть задан формулой или совокупностью словесных либо символических правил, по которым решается данная задача.

Простейшими алгоритмами являются правила выполнения четырех арифметических действий с целыми числами. В IX веке эти правила впервые четко сформулировал Мухаммед бен Мусса ал-Хорезми (т. е. Мухаммед из Хорезма), о работах которого мы скажем в § 91 гл. VII.

Характерными особенностями алгоритмического процесса являются детерминированность (т. е. невозможность по-разному истолковывать порядок действий в алгоритме) и универсальность (т. е. применимость алгоритма к решению многих задач определенного класса). В математике задачи определенного класса считаются решенными, если для них построен алгоритм. Однако это во многих случаях довольно трудно осуществить, и нерешенных задач в настоящее время несравненно больше, чем задач решенных.

Таблица 37

Дата	$a_{\nu+1} = 0{,}8a_\nu + \frac{2}{a_\nu^4}$; $a_\nu \approx \sqrt[5]{10}$			Вычислитель . . . . .
ν	a_ν	a_ν^4	$2 : a_\nu^4$	Контроль
0	1,5	5,1	0,39	$\boxed{a_\nu^5 = 10}$
1	1,59	6,391	0,3129	
2	1,5849	6,3096818	0,3169732	при $\nu = 3$
3	1,5848932	6,30957356482	0,316978632463	$a_3^5 = 10{,}000000\ldots$
4	1,584893192463			

Упражнение. Вычислить табличным способом с восемью значащими цифрами $y = \sqrt[5]{10}$, взяв $a_0 = 2$ (которое получаем из очень грубой оценки $a_0^5 = 2^5 = 32$).

Остановимся на контроле вычислений, который является непременной их частью. Всегда следует помнить, что непроверенный результат вычислений ненадежен, и пока не осуществлен контроль, вычисления нельзя считать оконченными. Контроль надо начинать с проверки правильности исходных данных и расчетных формул. Повторное вычисление по тем же формулам не гарантирует от повторения ошибок, поэтому более надежный контроль достигается вычислением по другим формулам или при помощи обратных действий (умножение проверяется делением, сложение — вычитанием и т. д.). Самые надежные результаты дает новое вычисление, выполненное другим вычислителем (если возможно, то по другим расчетным формулам) независимо от первого вычислителя.

Сложные вычисления надо разбивать на ряд более простых этапов и переходить к каждому новому этапу только после того, как в результате промежуточного контроля возникла уверенность, что все предыдущие вычисления верны.

Следует проверять также работу арифмометра или другой вычислительной машины, в частности можно пользоваться такой серией произведений:

$$\begin{aligned}
12345679 \times \quad 9 &= \quad 111111111,\\
12345679 \times \quad 99 &= \quad 1222222221,\\
12345679 \times \quad 999 &= \quad 12333333321,\\
12345679 \times \quad 9999 &= \quad 123444444311,\\
12345679 \times 99999 &= 1234555554321.
\end{aligned}$$

Последний результат надо разделить на 99999, и снова должно получиться исходное значение 12345679.

Чтобы овладеть техникой вычислений, вначале надо выполнять их медленно, обращая все внимание на правильность и методическую целесообразность действий, на равномерность темпа и плавность движений, а скорость придет сама собой.

Некоторым читателям может показаться, что приведенные выше советы очень уж несущественны. Однако собственный опыт этих читателей убедит их в обратном, как только они начнут выполнять более или менее сложные вычисления.

Подчеркнем еще раз, что все промежуточные вычисления надо обязательно выполнять с одним или двумя лишними знаками, даже в тех случаях, когда эти знаки заведомо сомнительные. Только такой порядок вычислений сводит до минимума ошибки округления, которые в совокупности могут в значительной мере

повлиять на результаты. В окончательных результатах эти одна-две лишние цифры округляются и поэтому не оказывают отрицательного влияния.

Ошибки округления сказываются наиболее ощутимо тогда, когда результат получают путем выполнения очень большого числа элементарных операций, как это часто бывает при вычислениях на ЭВМ, опыт работы с которыми привел к новой и очень важной проблеме — проблеме устойчивости вычислительной схемы. Возможны случаи, когда неизбежные погрешности округления быстро накапливаются (например, имеют экспоненциальный рост). Такая вычислительная схема неустойчива и для практики совершенно непригодна. Допустимо пользоваться только устойчивыми вычислительными схемами, когда погрешности до некоторой степени взаимно компенсируются, так что вызываемая ими погрешность результата остается малой для всего процесса вычислений.

Необходимо также учитывать погрешности приближенного метода, который применяется для решения данной задачи. Однако все эти важные вопросы, особенно вопросы оценки точности приближенных методов, в настоящее время находятся только в стадии разработки, и поэтому мы, не имея возможности детально на них останавливаться, вынуждены в дальнейшем ограничиться лишь отдельными замечаниями при решении конкретных задач.

Читатель, желающий овладеть изложенным материалом, обязательно должен продублировать все приводимые ниже примеры. При этом надо учитывать, что в некоторых из них вычисления проводились с большим числом знаков, чем записано, а затем результаты округлялись. Поэтому при дублировании с тем же числом знаков, которое дано в книге, могут получаться несколько другие значения, отличающиеся в одном или двух последних знаках.

§ 79. Табулирование и интерполяция

Таблицы функций являются одним из самых распространенных и важных средств вычислений, которым пользуются в течение многих столетий. Поэтому читатели, интересующиеся прикладной математикой, должны уметь пользоваться таблицами, проверять их и составлять новые. На вопросе вычисления таблиц заданных функций мы остановимся в гл. VIII и X.

В соответствии с системой размещения материала различают таблицы с одним, двумя и бо́льшим числом входов. Число входов соответствует числу независимых переменных функции, для которой составлена таблица. Сам процесс составления таблицы называется *табулированием* данной функции.

Наиболее распространены таблицы функций одной переменной, и в данной книге мы ограничимся рассмотрением только таких таблиц.

Таблица функции одной переменной состоит из двух столбцов, в одном из которых записаны значения аргумента, а во втором — значения функции. В большинстве случаев их составляют для равноудаленных значений аргумента

$$x_n = x_0 + kh; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1). \tag{VI.14}$$

Положительное число h — разность между двумя соседними значениями аргумента — называется *шагом таблицы*.

Точность таблицы определяется количеством верных знаков табличных значений функции. Если все эти значения округлены с одинаковым количеством десятичных знаков, то имеем таблицу с *одинаковой абсолютной точностью* (таковы, например, пятизначные таблицы логарифмов).

Кроме принципа одинаковой абсолютной точности в таблицах часто применяют принцип *одинаковой относительной точности*. Он заключается в том, что все табличные значения имеют одинаковое количество значащих цифр. Например, в таблицах Б. И. Сегала и К. А. Семендяева [121] все табличные значения функций имеют не менее пяти значащих цифр. В таких таблицах при увеличении функции количество десятичных знаков в ее значениях уменьшается, например, при $x = 0{,}500$ имеем $\operatorname{tg} x = 0{,}54630$, а при $x = 1{,}550$ $\operatorname{tg} x = 48{,}078$.

После этих предварительных замечаний переходим к основной теме данного параграфа — к интерполяции функции от одной независимой переменной.

Интерполяцию можно рассматривать как процесс определения для заданного аргумента x значения функции

$$y = f(x)$$

по ее нескольким известным значениям.

Если пары значений $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_{n-1}; y_{n-1})$ удовлетворяют заданному уравнению, то задача интерполяции заключается в том, чтобы найти приближенное значение y для произвольного x. Но при этом термин «интерполяция» применяют только тогда, когда значение x не выходит за пределы ряда данных значений x_k. В противном случае употребляют термин «экстраполяция».

Основное применение интерполяции — это вычисление значений табулированной функции для неузловых (промежуточных) значений аргумента, поэтому интерполяцию часто называют «искусством чтения таблиц между строками».

Для осуществления интерполяции надо построить интерполяционную функцию $y = F(x)$, которая должна удовлетворять следующим условиям:

$$F(x_0) = y_0; \quad F(x_1) = y_1; \quad \ldots; \quad F(x_{n-1}) = y_{n-1},$$

т. е. интерполяционная функция должна принимать заданные значения y_0, y_1, ..., y_{n-1} для узловых значений аргумента x_0, x_1, ..., x_{n-1}.

Очевидно, можно построить бесчисленное множество непрерывных функций, графики которых будут проходить через n заданных узловых точек $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_{n-1}; y_{n-1})$, поэтому существуют разные типы интерполяции: полиномиальная, тригонометрическая, экспоненциальная и т. д.

Рассмотрим наиболее простую из них — *полиномиальную* (или *параболическую*) *интерполяцию*, которая осуществляется при помощи полиномов.

Введем новую безразмерную независимую переменную

$$u = \frac{x - x_0}{h}, \text{ или } x = x_0 + uh, \tag{VI.15}$$

которая для равноудаленных узловых значений x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, т. е.

$$x_k = x_0 + kh; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

принимает соответственно целочисленные значения

$$u_0 = 0; \quad u_1 = 1; \quad u_2 = 2; \quad \ldots; \quad u_{n-1} = (n-1).$$

Изложение вопроса начинаем с самого простейшего случая, когда заданными являются только две узловые точки, т. е. со случая $n = 2$. Так как через две точки однозначно можно провести только прямую линию, то при $n = 2$ интерполяция называется *линейной*. При $n = 3$ интерполяция называется *квадратичной*, поскольку три заданные узловые точки однозначно определяют собой квадратичную параболу. При большем числе узловых точек интерполяционные формулы будем просто называть *n-точечными*. Для удобства дальнейших вычислений также изменим обычно применяемую систему нумерации узловых точек (VI.14) и обозначим их, как показано на рис. 197, 198, 199.

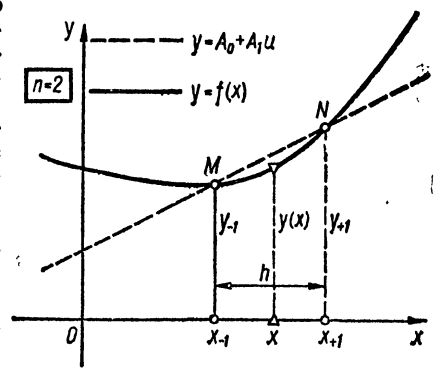


Рис. 197.

Переходим к выводу интерполяционных формул.

Линейная интерполяция ($n = 2$). Заданную функцию $y = f(x)$ на небольшом участ-

ке всегда можно заменить отрезком прямой, которая проходит через две соседние узловые точки $M(x_{-1}; y_{-1})$ и $N(x_{+1}; y_{+1})$. Уравнение этой прямой, как было показано в § 8 гл. I, будет

$$\frac{y-y_{-1}}{y_{+1}-y_{-1}}=\frac{x-x_{-1}}{x_{+1}-x_{-1}},$$

или

$$y-y_{-1}=u(y_{+1}-y_{-1}), \tag{VI.16}$$

так как в данном случае разность абсцисс двух соседних точек $x_{+1}-x_{-1}=h$ равна шагу таблицы рассматриваемой функции $y=f(x)$, и тогда согласно формуле (VI.15)

$$\frac{x-x_{-1}}{x_{+1}-x_{-1}}=\frac{x-x_{-1}}{h}=u.$$

Преобразуем полученную формулу к виду, более удобному для вычислений. Согласно (VI.16) имеем

$$y=y_{-1}+u(y_{+1}-y_{-1})=(1-u)y_{-1}+uy_{+1}.$$

Вводя для большей симметрии результата новую безразмерную переменную

$$v=1-u,$$

придадим формуле линейной интерполяции окончательный вид

$$y(u)=vy_{-1}+uy_{+1}, \tag{VI.17}$$

где

$$u=\frac{x-x_{-1}}{x_{+1}-x_{-1}};\quad v=1-u. \tag{VI.18}$$

Таким образом, для того чтобы найти значение функции $y\equiv y(x)\equiv y(u)$ в произвольной точке $x_{-1}\leqslant x\leqslant x_{+1}$, надо согласно формуле (VI.17) умножить табличные значения y_{-1} и y_{+1} на коэффициенты v и u. Величины этих весовых коэффициентов (VI.18) однозначно определяются заданным значением аргумента x. Формула (VI.17) является приближенной, поскольку дугу кривой $y=f(x)$ заменили хордой — отрезком MN прямой (VI.16) и она будет давать результаты тем точнее, чем меньше шаг таблицы $h=x_{+1}-x_{-1}$ (см. рис. 197).

В самих узловых точках формула (VI.17) дает точные результаты, поскольку при $x=x_{-1}$ имеем $u=0$, $v=1$ и тогда

$$y(x_{-1})=y(0)=y_{-1},$$

а при $x=x_{+1}$, соответственно, $u=1$, $v=0$, так что

$$y(x_{+1})=y(1)=y_{+1}.$$

Пример 1. Вычислить значение экспоненциальной функции $y=e^x$ в точке $x=1{,}6243$, воспользовавшись таблицей II приложения.

Решение. В данном примере $x=1{,}6243$, так что в качестве узловых значений возьмем $x_{-1}=1{,}62$, $x_{+1}=1{,}63$ и по табл. II приложения найдем соответствующие им $y_{-1}=5{,}053090$; $y_{+1}=5{,}103875$. Для того чтобы не допустить ошибок при считывании результатов из таблицы, следует пользоваться тонкой прозрачной линейкой, которую легко изготовить из куска фотопленки, отмыв ее от эмульсии в нагретом слабом растворе соды.

Подставив в формулу (VI 18) заданные значения x, x_{-1}, x_{+1}, определяем весовые коэффициенты:

$$u=\frac{1{,}6243-1{,}6200}{1{,}63-1{,}62}=0{,}43;\quad v=1-u=0{,}57,$$

а затем согласно интерполяционной формуле (VI.17) находим искомый ответ:

$$y = 0{,}57 \cdot 5{,}053090 + 0{,}43 \cdot 5{,}103375 = 2{,}88026130 + 2{,}19466625 \approx 5{,}074928.$$

О том, как оценить точность полученного результата, будет сказано в § 83.

Квадратичная интерполяция ($n = 3$). Если число узловых точек равно трем, то заданную функцию на малом участке можем заменить квадратичной параболой (рис. 198), т. е. искать интерполяционную формулу в виде такого полинома второй степени:

$$y = A_0 + A_1 u + A_2 u^2, \quad \text{(VI.19)}$$

$$\text{где } u = \frac{x - x_{-1}}{x_{+1} + x_{-1}}.$$

Коэффициенты A_0, A_1, A_2 определим, потребовав, чтобы аппроксимирующая парабола проходила через узловые точки $M(x_{-1}, y_{-1})$, $N(x_{+1}, y_{+1})$, $P(x_{+2}, y_{+2})$. Вычислив для этих точек значения безразмерной переменной u (которые для наглядности также указаны на рис. 198) и подставив найденные u и соответствующие им $y = y(u)$ в уравнение (VI.19), имеем

при $u = 0$ $y_{-1} = A_0$,
при $u = 1$ $A_0 + A_1 + A_2 = y_{+1}$,
при $u = 2$ $A_0 + 2A_1 + 4A_2 = y_{+2}$.

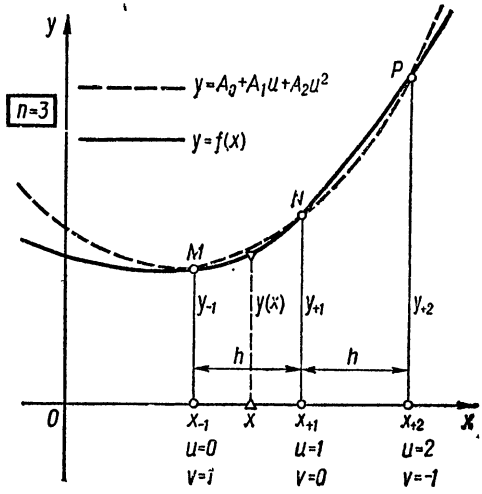


Рис. 198.

Решив эту систему уравнений, находим

$$A_0 = y_{-1}; \quad A_1 = \frac{1}{2}(-3y_{-1} + 4y_{+1} - y_{+2}); \quad A_2 = \frac{1}{2}(y_{-1} - 2y_{+1} + y_{+2}),$$

и тогда согласно (VI.19)

$$y(u) = y_{-1} + \frac{1}{2}(-3y_{-1} + 4y_{+1} - y_{+2})\,u + \frac{1}{2}(y_{-1} - 2y_{+1} + y_{+2})\,u^2,$$

или, перегруппировав члены, получим

$$y(u) = \left(1 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}u^2\right) y_{-1} + (2u - u^2)\,y_{+1} - \frac{1}{2}(u - u^2)\,y_{+2} =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - u)(2 - u)\,y_{-1} + u(2 - u)\,y_{+1} - \frac{1}{2}u(1 - u)\,y_{+2}. \quad \text{(VI.20)}$$

Вводя дополнительную безразмерную переменную $v = 1 - u$, после очевидных преобразований придаем искомой формуле следующий вид:

$$y(u) = \frac{1}{2}v(1 + v)\,y_{-1} + u(1 + v)\,y_{+1} - \frac{1}{2}uvy_{+2}, \quad \text{(VI.21)}$$

где u и v, как и прежде, определяются формулами (VI.18).

С целью контроля полученных результатов подставляем в формулу (VI.21) узловые значения и убеждаемся, что если

$u = 0$,	$v = 1$,	то	соответственно	$y = y_{-1}$;
$u = 1$,	$v = 0$,	»	»	$y = y_{+1}$;
$u = 2$,	$v = -1$,	»	»	$y = y_{+2}$.

При вычислении по формуле (VI.21), как и в случае линейной интерполяции, находим сначала весовые коэффициенты:

$$c_{-1} = \frac{1}{2} v (1 + v); \quad c_{+1} = u (1 + v); \quad c_{+2} = -\frac{1}{2} uv, \tag{VI.22}$$

а затем определяем искомое значение $y = y(u)$ как сумму произведений весовых коэффициентов c_k на соответствующие табличные значения y_k;

$$y(u) = c_{-1} y_{-1} + c_{+1} y_{+1} + c_{+2} y_{+2}. \tag{VI.23}$$

Применив формулу (VI.23) к интерполяции функции $y(u) \equiv 1 = \text{const}$ (а в таком случае и все узловые значения $y_{-1} = y_{+1} = y_{+2} = 1$), получаем контрольное равенство для весовых коэффициентов c_k:

$$\sum c_k = c_{-1} + c_{+1} + c_{+2} = 1. \tag{VI.24}$$

Все вычисления при квадратичной интерполяции удобнее всего выполнять в табличной форме.

Пример 2. Вычислить при помощи квадратичной интерполяции значение функции $y = e^x$ в точке $x = 1{,}6243$, которое было уже рассмотрено в примере 1.

Решение. Присоединив к ранее найденным по табл. II приложения табличным значениям $y_{-1} = 5{,}053090$ и $y_{+1} = 5{,}103875$ еще одно значение $y_{+2} = 5{,}155170$, по формулам (VI.22) и (VI.23) получаем ответ:

$$y(x) \equiv y(u) = \sum c_k y_k = 5{,}07486505 \approx 5{,}074865,$$

в котором все знаки верные, так как более точное значение (найденное при помощи рядов) есть $y(x) = 5{,}074865377$.

Все необходимые вычисления, выполненные с двумя запасными знаками, приведены в табл. 38, которую читателю полезно продублировать. Вычисленные для заданных $u = 0{,}43$ и $v = 0{,}57$ коэффициенты $c_k \equiv c_k^{(3)}$ контролируем при помощи формулы (VI.24). Для того чтобы подчеркнуть, что c_k являются весовыми коэффициентами интерполяционной формулы, использующей три узловые точки ($n = 3$), эту цифру в скобках ставим в качестве верхнего индекса: $c_k \equiv c_k^{(3)}$.

Таблица 38

$y = ex$; $x = 1{,}6243$; $u = 0{,}43$; $v = 1 - u = 0{,}57$

$c_{-1} = \frac{1}{2} v (1 + v)$; $c_{+1} = u (1 + v)$; $c_{+2} = -\frac{1}{2} uv$

k	x_k	y_k	$c_k = c_k^{(3)}$	$c_k y_k$
-1	1,62	5,053090	$+0{,}44745$	$+2{,}26100512$
$+1$	1,63	5,103875	$+0{,}67510$	$+3{,}44562601$
$+2$	1,64	5,155170	$-0{,}12255$	$-0{,}63176608$
	$\sum_k \equiv \sum c_k y_k =$		$+1{,}00000$	$+5{,}07486505$

Таблица 39

$y = \sin x$; $y = \cos x$; $x = 1{,}56842$; $h = 0{,}01$; $u = 0{,}842$; $v = 0{,}158$

k	x_k	$y_k = \sin x_k$	$y_k = \cos x_k$	$c_k = c_k^{(3)}$	$c_k \sin x_k$	$c_k \cos x_k$
-1	1,56	0,999942	+0,010796	+0,091482	+0,09147669	+0,00098764
⊕1	1,57	1,000000	⊕0,000796	+0,975036	+0,97503600	+0,00077613
⊕2	1,58	0,999958	−0,009204	−0,066518	−0,06651521	⊕0,00061223
			$\sum_k =$	+1,000000	⊕0,99999748	⊕0,00237600

Контроль:

$\sin^2 x \oplus \cos^2 x = 0{,}99999496 \oplus 0{,}00000565 = 1{,}00000061$

Пример 3. Найти при помощи квадратичной интерполяции значения $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 1{,}56842$ *рад*.

Решение. В данном примере $x = 1{,}56842$, так что за узловые значения принимаем $x_{-1} = 1{,}56$; $x_{+1} = 1{,}57$; $x_{+2} = 1{,}58$ и по табл. I приложения находим соответствующие им $\sin x_k$ и $\cos x_k$, которые непосредственно вносим в расчетную табл. 39. Подставив в формулу (VI.18) заданные значения x, x_{-1}, x_{+1}, вычисляем $u = \dfrac{1{,}56842 - 1{,}56}{1{,}57 - 1{,}56} = 0{,}842$; $v = 1 - u = 0{,}158$, а затем согласно (VI.22) определяем весовые коэффициенты $c_{-1} = \dfrac{1}{2} v (1 \oplus v) = 0{,}091482$; $c_{+1} = u (1 + v) = 0{,}975036$; $c_{+2} = -\dfrac{1}{2} uv = -0{,}066518$, которые также вносим в расчетную таблицу.

Весовые коэффициенты $c_k \equiv c_k^{(n)}(u)$ зависят только от числа узловых точек n интерполяционной формулы и от аргумента x (определяющего собой u, v) и являются независимыми по отношению к интерполируемой функции $y = f(x)$. Поэтому при заданном n (в данном случае $n = 3$) и x (определяющем собой безразмерные переменные u и v) найденные весовые коэффициенты $c_k = c_k^{(3)}$ можно применить к интерполированию любой функции. В частности, в данном примере, перемножив (с двумя запасными знаками) стоящие в одних и тех же строках табл. 39 y_k и c_k, и просуммировав результаты, согласно формуле (VI.23) получаем искомые ответы:

$$\sin x = 0{,}99999748 \approx 0{,}999997; \quad \cos x \approx 0{,}002376.$$

Контрольным в данном случае является тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, которое показывает, что погрешность вычислений лежит за пределами точности исходных данных и, действительно, более точные значения (которые можно вычислить при помощи рядов) есть

$$\sin x = 0{,}9999971765; \quad \cos x = 0{,}0023763246.$$

Если же мы воспользуемся формулой линейной интерполяции (VI.17), то получим:

$$\sin x = 0{,}158 \cdot 0{,}999942 + 0{,}842 \cdot 1{,}000000 = 0{,}99999084 \approx 0{,}999991;$$
$$\cos x = 0{,}158 \cdot 0{,}010796 + 0{,}842 \cdot 0{,}000796 = 0{,}00237600 \approx 0{,}002376,$$

и тогда контрольное равенство для этих результатов даст

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0{,}99998168 \oplus 0{,}00000565 = 0{,}99998733.$$

Таким образом, в данном примере квадратичная интерполяция позволяет получить результаты без потери точности исходных данных (а мы пользовались таблицами функций $\sin x$ и $\cos x$, вычисленными с шестью десятичными знаками), в то время как линейная интерполяция для $\sin x$ позволила получить только пять значащих цифр.

Замечание. При вычислениях по формуле (VI.23) на арифмометре или любой другой настольной вычислительной машине надо только перемножить y_k и c_k (с учетом их знаков), стоящие в одних и тех же строках расчетной таблицы, не гася промежуточных результатов, и в результативном счетчике непосредственно получим алгебраическую сумму этих произведений, т. е. искомый ответ. Мы же привели все промежуточные результаты только для того, чтобы облегчить читателю дублирование табл. 38 и 39, которое обязательно надо выполнить.

Упражнения

1. Найти по формуле (VI.23) $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ при $x = 1{,}6243$, взяв весовые коэффициенты c_k из табл. 38. Точность полученных результатов проконтролировать, воспользовавшись тождествами

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

2. Вычислить при помощи линейной и квадратичной интерполяции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ для $x = 0{,}8326$. Необходимые узловые значения y_k рассматриваемых функций приведены в табл. I и II приложения. Точность результатов интерполяции для гиперболических функций проконтролировать, воспользовавшись тождествами

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1; \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x.$$

3. Вывести формулу (VI.17), представив интерполяционную функцию в виде

$$y = A_0 + A_1 u$$

и определив коэффициенты A_0 и A_1 из условия, что в узловых точках (т. е. при $u = 0$, $u = 1$) функция должна принять следующие значения: $y(0) = y_{-1}$, $y(1) = y_{+1}$.

4. Вывести контрольное равенство (VI.24), найдя непосредственным путем сумму весовых коэффициентов $c_k = c_k(u)$ в интерполяционной формуле (VI.20)

$$y(u) = \left(1 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}u^2\right) y_{-1} + (2u - u^2)\, y_{+1} - \frac{1}{2}(u - u^2)\, y_{+2},$$

которая эквивалентна формуле (VI.23).

§ 80. Уплотнение таблиц, или субтабулирование

Большинство таблиц составлено с таким малым шагом h, что линейная или квадратичная интерполяция обеспечивает вычисление результата без потери точности исходных данных. Поэтому наиболее употребительными являются интерполяционные формулы (VI.17) и (VI.23). Но если необходимо вычислить новую таблицу для какой-либо функции, то мы должны перейти к $n \geqslant 4$. При этом интерполяционные формулы принимают более простой вид, если число узловых точек будет четным ($n = 2\nu$).

При любом $n = 2\nu$ интерполяционную формулу можно представить в следующем виде:

$$y(x) = \sum_{k=-\nu}^{+\nu}{}' y_k c_k^{(2\nu)}, \quad c_k^{(2\nu)} = \begin{cases} v_{-k}^{(2\nu)} & \text{при } k < 0, \\ u_{+k}^{(2\nu)} & \text{при } k > 0, \end{cases} \tag{VI.25}$$

где аргумент x берется в интервале $x_{-1} \leqslant x \leqslant x_{+1}$, а штрих при $\sum$ означает, что при суммировании надо пропускать значение $k = 0$.

Как уже отмечалось, коэффициенты $u_k^{(2\nu)}$, $v_{-k}^{(2\nu)}$ зависят от числа выбранных узловых точек и от безразмерной переменной $u = u(x)$. В частности, выполнив несложные преобразования (на чем остановимся несколько позже), получаем следующие формулы.

Для $n = 4$; $\nu = 2$:

$$v_2^{(4)} = -\frac{\Pi_4(u)}{3!\,(1+u)}; \quad u_2^{(4)} = -\frac{\Pi_4(u)}{3!\,(1\dotplus v)}; \tag{VI.26}$$

$$v_1^{(4)} = +\frac{\Pi_4(u)}{1!2!u}; \quad u_1^{(4)} = \dotplus\frac{\Pi_4(u)}{1!2!v},$$

где

$$\Pi_4(u) = (1+u)\,u\,(1-u)\,(2-u) = (1\dotplus u)\,uv\,(1\dotplus v).$$

Для $n = 6$; $\nu = 3$:

$$v_3^{(6)} = \dotplus\frac{\Pi_6(u)}{5!\,(2+u)}; \quad u_3^{(6)} = \dotplus\frac{\Pi_6(u)}{5!\,(2\dotplus v)};$$

$$v_2^{(6)} = -\frac{\Pi_6(u)}{1!4!\,(1\dotplus u)}; \quad u_2^{(6)} = -\frac{\Pi_6(u)}{1!4!(1+v)}; \tag{VI.27}$$

$$v_1^{(6)} = +\frac{\Pi_6(u)}{2!3!u}; \quad u_1^{(6)} = \dotplus\frac{\Pi_6(u)}{2!3!v},$$

где

$$\Pi_6(u) = (2+u)\,(1\dotplus u)\,u\,(1-u)\,(2-u)\,(3-u) = (2+u)\,(1\dotplus u)\,uv\,(1+v)\,(2\dotplus v).$$

В общем случае $n = 2\nu$:

$$v_\nu^{(2\nu)} = (-1)^{\nu-1}\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(2\nu-1)!\,(\nu-1+u)}; \quad u_\nu^{(2\nu)} = (-1)^{\nu-1}\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(2\nu-1)!\,(\nu-1+v)};$$

$$v_{\nu-1}^{(2\nu)} = (-1)^{\nu-2}\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{1!\,(2\nu-2)!\,(\nu-2\dotplus u)}; \quad u_{\nu-1}^{(2\nu)} = (-1)^{\nu-2}\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{1!\,(2\nu-2)!\,(\nu-2\dotplus v)}; \tag{VI.28}$$

. . . . . .

$$v_2^{(2\nu)} = (-1)^1\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(\nu-2)!\,(\nu+1)!\,(1+u)}; \quad u_2^{(2\nu)} = (-1)^1\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(\nu-2)!\,(\nu\dotplus 1)!\,(1+v)};$$

$$v_1^{(2\nu)} = \dotplus\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(\nu-1)!\,\nu!\,u}; \quad u_1^{(2\nu)} = \dotplus\frac{\Pi_{2\nu}(u)}{(\nu-1)!\,\nu!\,v},$$

где

$$\Pi_{2\nu}(u) = (\nu-1+u)\ldots(1+u)\,uv\,(1\dotplus v)\ldots(\nu-1+v); \quad v = 1-u.$$

Легко видеть, что коэффициенты $v_{-k}^{(2\nu)}$ найдем, поменяв ролями u и v в расчетных формулах или воспользовавшись формулой дополнения

$$v_{-k}^{(n)}(t) = u_{+k}^{(n)}(1-t); \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{VI.29}$$

Контрольное равенство для весовых коэффициентов $c_k^{(2\nu)}$ (при любом $n = 2\nu$) получим, применив формулу (VI.25) к интерполированию функции $y(x) = y(u) \equiv 1 = \text{const}$, для которой все узловые значения $y_{-k} = \cdots = y_{-1} = y_{+1} = \cdots = y_{+k} = 1$. В таком случае, обозначив итоговую сумму через $\sum_k$, приходим к искомой формуле

$$\sum_k \equiv \sum_{k=-\nu}^{+\nu}{}' c_k^{(2\nu)} = \sum_{k=1}^{\nu} u_k^{(2\nu)} + v_{-k}^{(2\nu)} = 1. \qquad \text{(VI.30)}$$

Контроль по этой формуле легко выполняется непосредственно в самих расчетных таблицах, как будет показано при решении примеров. При этом если коэффициенты $c_k^{(2\nu)}$ вычислены приближенно, то фактическая сумма $\sum c_k^{(2\nu)}$ в формуле (VI.30) из-за неустранимых ошибок округления может отличаться от своего точного значения на несколько единиц последнего знака.

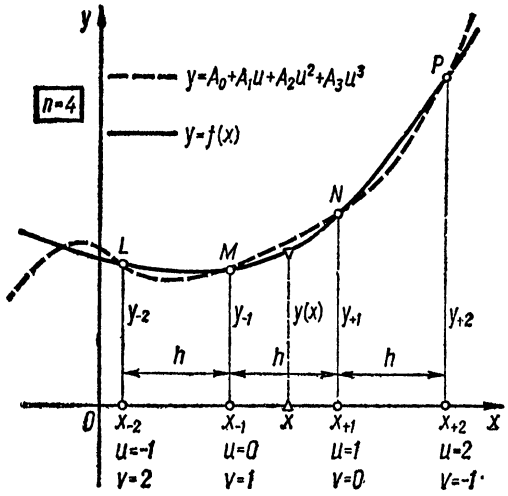


Рис. 199.

Для того чтобы максимально упростить процесс интерполяции, в табл. III приложения вычислены точные значения коэффициентов $u_{+k}^{(4)}$, $v_{-k}^{(4)}$ и $u_{+k}^{(6)}$, $v_{-k}^{(6)}$ для $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$ с шагом $h = 0{,}01$.

Переходим к выводу формул (VI.26) для весовых коэффициентов интерполяционной формулы (VI.25) при $n = 4$.

Легко непосредственно проверить, что полином четвертой степени от u

$$\Pi_4(u) = (1+u)\,u\,(1-u)\,(2-u) = (1 \dot{+} u)\,uv\,(1+v) \qquad \text{(VI.31)}$$

во всех узловых точках $u = -1$, $u = 0$, $u = +1$, $u = +2$ обращается в нуль. Поэтому интерполяционную формулу будем искать в виде суммы следующих полиномов третьей степени:

$$y(u) = B_0 u\,(1-u)\,(2-u) + B_1\,(1+u)\,(1-u)\,(2-u) \dot{+} + B_2\,(1+u)\,u\,(2-u) + B_3\,(1 \dot{+} u)\,u\,(1-u), \qquad \text{(VI.32)}$$

каждый из которых отличен от нуля только в одной из узловых точек, так как в нем отсутствует один из четырех множителей, входящих в $\Pi_4(u)$.

Коэффициенты B_0, B_1, B_2, B_3 определяем из условия, что интерполяционная функция должна проходить через узловые точки (рис. 199). Тогда при $u = -1$ имеем $y(u) = y(-1) = y_{-2}$ и, следовательно, согласно (VI.32)

$$y_{-2} = B_0 u\,(1-u)\,(2-u)\big|_{u=-1} = B_0\,(-1)\cdot 2\cdot 3,$$

откуда

$$B_0 = -\frac{y_{-2}}{3!}.$$

В пояснение к этому результату остается заметить, что при $u = -1$ множитель $(1 \dot{+} u) = 0$ обращает в нуль все остальные члены в правой части равенства (VI.32).

При $u = 0$ $y(u) = y(0) = y_{-1}$; аналогичным путем находим

$$y_{-1} = B_1 (1 \mp u)(1-u)(2-u)|_{u=0} = B_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2; \quad B_1 = \mp \frac{y_{-1}}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \mp \frac{y_{-1}}{1!2!}.$$

При $u = \mp 1$ $y(u) = y(+1) = y_{+1}$, так что

$$y_{+1} = B_2 (1+u) u (2-u)|_{u=+1} = B_2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1; \quad B_2 = + \frac{y_{+1}}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \mp \frac{y_{+1}}{1!2!}.$$

При $u = +2$ $y(u) = y(\mp 2) = y_{+2}$, и тогда

$$y_{+2} = B_3 (1 \mp u) u (1-u)|_{u=+2} = B_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1);$$

$$B_3 = -\frac{y_{+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{y_{+2}}{3!},$$

поскольку при $u = \mp 2$ множитель $(2-u) = 0$ выключает все остальные члены формулы (VI.32).

Подставив найденные B_0, B_1, B_2, B_3 в (VI.32), получаем интерполяционную формулу в случае $n = 4$:

$$y(u) = -\frac{u(1-u)(2-u)}{3!} y_{-2} + \frac{(1+u)(1-u)(2-u)}{2!} y_{-1} + \mp \frac{(1+u) u (2-u)}{2!} y_{+1} - \frac{(1+u) u (1-u)}{3!} y_{+2}. \qquad \text{(VI.33)}$$

Вводя дополнительную безразмерную переменную $v = 1-u$, $1+v = 2-u$, придаем этой формуле более симметричный вид:

$$y(u) = -\frac{uv(1+v)}{3!} y_{-2} + \frac{(1+u) v (1+v)}{2!} y_{-1} + + \frac{(1+u) u (1+v)}{2!} y_{+1} - \frac{uv(1+u)}{3!} y_{+2}. \qquad \text{(VI.34)}$$

Формула (VI.34) тождественно совпадает с формулой (VI.25), если в ней положить $\nu = 2$. Поэтому, выполнив очевидные преобразования с коэффициентами, входящими в (VI.34), приходим к формулам (VI.26).

Вывод формул (VI.27), (VI.28) осуществляется вполне аналогично и читателю полезно выполнить это в виде упражнения.

Замечание. Формулу (VI.34) можно вывести тем же путем, каким была выведена в § 79 формула квадратичной интерполяции. Для этого надо представить интерполяционный полином при $n = 4$ в виде параболы третьей степени:

$$y(x) \equiv y(u) = A_0 \mp A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3; \quad u = \frac{x - x_{-1}}{x_{+1} - x_{-1}} \qquad \text{(VI.35)}$$

и определить коэффициенты A_0, A_1, A_2, A_3 из условия, что аппроксимирующая парабола должна проходить через узловые точки $L(x_{-2};\ y_{-2})$, $M(x_{-1};\ y_{-1})$, $N(x_{+1};\ y_{+1})$, $P(x_{+2};\ y_{+2})$, как показано на рис. 199. В результате мы придем к системе четырех линейных уравнений, решив которую и найдем не определенные вначале коэффициенты A_j. Однако путь, которым мы шли в данном параграфе, приводит к более простым выкладкам, поскольку коэффициенты B_j полинома (VI.32) определяются непосредственно каждый в отдельности, а не из системы уравнений.

Полином (VI.32) также является полиномом третьей степени. При этом коэффициенты обоих полиномов, (VI.32) и (VI.35), определяются одними и теми же четырьмя узловыми точками, а полином третьей степени — четырьмя точками определяется однозначно. Следовательно, это тождественные полиномы и различаются они только формой записи. С увеличением числа узловых точек n второй путь дает более значительное упрощение в выкладках.

Заметим также, что мы неоднократно, в зависимости от обстоятельств, употребляли символы $y = y(x)$ или $y = y(u)$, которые между собой тождественно совпадают, так как безразмерная переменная u есть линейная функция от аргумента x.

Для того чтобы проиллюстрировать то большое значение, которое имеют интерполяционные формулы, рассмотрим табл. 40. В этой таблице приведены с восемью верными десятичными знаками значения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ при шаге $h = 5°$.

Таблица 40

$x°$	$\sin x$	$\cos x$	—
0	0,00000000	1,00000000	90
5	0,08715574	0,99619470	85
10	0,17364818	0,98480775	80
15	0,25881905	0,96592583	75
20	0,34202014	0,93969262	70
25	0,42261826	0,90630779	65
30	0,50000000	0,86602540	60
35	0,57357644	0,81915204	55
40	0,64278761	0,76604444	50
45	0,70710678	0,70710678	45
—	$\cos x$	$\sin x$	$x°$

Интерполяционные формулы дают возможность по табл. 40, которая занимает менее четверти страницы, вычислить без потери точности, т. е. с восемью десятичными знаками, любое значение $\sin x$ или $\cos x$, а следовательно, и всех остальных тригонометрических функций.

Пример 1. Вычислить $\sin 17° 23' 11'',4$.

Решение. В этом примере $h = 5°$, $x_{-1} = 15°$, $x_{+1} = 20°$, $x = 17° 23' 11'',4 = 17°,386500$ и, следовательно,

$$u = \frac{x - x_{-1}}{h} = \frac{2°,386500}{5°} = 0,477300; \quad v = 1 - u = 0,522700.$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой (VI.25) при $n = 2\nu = 2; 4; 6$. Весовые коэффициенты $c_k^{(2)}$, $c_k^{(4)}$, $c_k^{(6)}$ для заданного $u = 0,477300$ вычисляем по формулам (VI.28), (VI.26), (VI.27). Все эти вычисления (выполненные на арифмометре без записи промежуточных результатов) приведены в табл. 41. Строка $\sum_k \equiv \sum' c_k^{(2\nu)}$ является контрольной — в ней записаны суммы соответствующих весовых коэффициентов, которые согласно равенству (VI.30) при любом n должны быть равны единице.

Продолжив эти вычисления и найдя $\sin x$ при $n = 8$, получим (при той же точности исходных y_k) тот же результат, что и при $n = 6$. Таким образом, в данном примере при $n = 6$ мы достигли требуемой точности и нашли окончательный ответ: $\sin x = 0,298815948 \approx 0,2988159\overline{5}$. Проверка, выполненная, например, по семизначным таблицам Бега [14] (при помощи которых по $\log \sin x$ находим необходимое нам значение $\sin x$), дает $\sin x = 0,2988160$, а более точное значение, найденное при помощи рядов, есть $\sin 17° 23' 11'',4 = 0,2988159463...$.

Следовательно, табл. 40 при интерполировании дает более точные результаты, чем семизначная таблица [14], которая занимает 270 страниц. Если же табл. 40 вычислить с девятью или десятью знаками, то интерполирование, выполненное

по формуле (VI.25) при $n = 2\nu = 8$, обеспечит еще большую точность. Линейная же интерполяция (т. е. интерполяция при $n = 2$), как видим из табл. 41, дает только три верных знака.

Таблица 41

$y = \sin x$; $x_{-1} = 15°$; $x_{+1} = 20°$; $x = 17°,386500$; $h = 5°$; $u = 0,477300$; $v = 0,522700$
$\Pi_4 = (1 + u)\,uv\,(1 + v) = 0,5612120405$; $\Pi_6(u) = (2 + u)(2 + v)\,\Pi_4(u) = 3,5072860661$

k	x_k°	y_k	$c_k^{(2)}$ (0,477300)	$c_k^{(4)}$ (0,477300)	$c_k^{(6)}$ (0,477300)
−3	5	0,08715574	($n = 2$; $\nu = 1$)	($n = 4$; $\nu = 2$)	$+0,011798080 = v_3^{(6)}$
−2	10	0,17364818	—	$-0,063315061 = v_2^{(4)}$	$-0,098921627 = v_2^{(6)}$
−1	15	0,25881905	$+0,522700000 = v_1^{(2)}$	$+0,587902829 = v_1^{(4)}$	$+0,612348290 = v_1^{(6)}$
+1	20	0,34202014	$+0,477300000 = u_1^{(2)}$	$+0,536839526 = u_1^{(4)}$	$+0,559161735 = u_1^{(6)}$
+2	25	0,42261826	—	$-0,061427294 = u_2^{(4)}$	$-0,095972233 = u_2^{(6)}$
+3	30	0,50000000	—	—	$+0,011585755 = u_3^{(6)}$
Контроль: $\sum' c_k^{(2\nu)} =$			1,000000000	1,000000000	1,000000000
$\sin x = \sum c_k^{(2\nu)} y_k =$			0,298530930	0,298815541	0,298815948

Применим полученные результаты к *уплотнению таблиц*, которое называют также *субтабулированием*. С этой целью рассмотрим несколько характерных примеров.

Пример 2. По результатам, приведенным в табл. 40, построить таблицу значений функции $y = \sin x$ с шагом $h_2 = 1°$, т. е. уплотнить эту таблицу и уменьшить в пять раз ее первоначальный шаг $h_1 = 5°$.

Решение. Все интересующие нас промежуточные значения заданной функции найдем при помощи интерполяционной формулы (VI.25) при $2\nu = 6$. Положив

$$x_{-1} = 10°, \quad x_{+1} = 15°, \quad h = h_1 = x_{+1} - x_{-1} = 5°,$$

для интересующих нас значений

$$x = 11°, \quad x = 12°, \quad x = 13°, \quad x = 14°$$

будем иметь соответственно

$$u = \frac{x - x_{-1}}{h} = \frac{1°}{5°} = 0,2; \quad u = \frac{2°}{5°} = 0,4; \quad u = \frac{3°}{5°} = 0,6; \quad u = \frac{4°}{5°} = 0,8.$$

Необходимые коэффициенты $u_k^{(6)}$, $v_{-k}^{(6)}$ для найденных значений u берем непосредственно из табл. III приложения, причем, для того чтобы не допустить потери точности исходных данных $y_k = \sin x_k$, эти коэффициенты берем с одним запасным знаком. Умножив (не снимая промежуточных результатов) коэффициенты $c_k^{(6)}$, стоящие в колонке $u = 0,2$, на узловые значения y_k, стоящие в тех же строках, найдем

$$\sin 11° = \sum c_k^{(6)} y_k = 0,008064 \cdot 0 - 0,073920 \cdot 0,08715574 +$$
$$+ 0,887040 \cdot 0,17364818 + \dots + 0,006336 \cdot 0,42261826 = 0,190808999.$$

Аналогичным путем, умножив $c_k^{(6)}$, стоящие в колонке $u = 0{,}4$, на те же y_k, получим $\sin 12°$.

Далее, чтобы вычислить $\sin 13°$ и $\sin 14°$, для которых $u = 0{,}6 = 1 - 0{,}4$ и $u = 0{,}8 = 1 - 0{,}2$, надо умножить те же самые y_k на соответствующую колонку коэффициентов c_k, проходя последнюю, в силу формулы дополнения (VI.29), снизу вверх, т. е. выполняя умножение не на «параллельных», а «на встречных курсах»:

$$\sum c_k y_k = u_3 y_{-3} + u_2 y_{-2} + u_1 y_{-1} + v_1 y_{+1} + v_2 y_{+2} + v_3 y_{+3}.$$

Все необходимые исходные данные и результаты вычислений приведены в табл. 42, в которой в строке, обозначенной $\sum_k$, выполнен контроль коэффициентов $c_k^{(6)}$ по формуле (VI.30).

Положив $x_{-1} = 15°$, $x_{+1} = 20°$, т. е. опустившись на одну строку вниз в колонке y_k, совершенно аналогично вычисляем $\sin 16°$, $\sin 17°$, $\sin 18°$ и $\sin 19°$, например $\sin 18° = 0{,}010752 \cdot 0{,}08715574 - 0{,}08736 \cdot 0{,}17364818 + \dots + 0{,}011648 \times 0{,}50000000 = 0{,}309016993$.

Продолжая этот процесс, легко построить всю таблицу значений функций $\sin x$ с шагом в 1°. При этом для того чтобы облегчить ориентировку, величины, которые участвуют в данном шаге вычислений, надо отмечать какими-либо марками, например металлическими монетами, перемещая их по мере надобности в соответствующих колонках. Окончательные результаты округляем до семи десятичных знаков — на один знак меньше, чем в исходных узловых значениях $y_k = \sin x_k$.

Упражнение 1. Положив $x_{-1} = 20°$, $x_{+1} = 25°$, продолжить вычисление табл. 42 и найти $\sin 21°$, $\sin 22°$, $\sin 23°$, $\sin 24°$.

При выполнении субтабулирования часто возникает необходимость удвоить объем данной таблицы, т. е. перейти в таблице к половинному шагу. Это осуществляется при помощи *интерполяции на середину интервала*, т. е. интерполяцией по формуле (VI.25) при значении $u = v = 0{,}5$.

Так как при $u = 0{,}5$ согласно (VI.28) или (VI.29) и все

$$u_k^{(2\nu)}(0{,}5) = v_k^{(2\nu)}(0{,}5);\ u = v = 1 - u = 0{,}5,$$

то формула (VI.25) при интерполяции на середину интервала несколько упрощается и принимает следующий вид:

$$y(x) = y\left(\frac{x_{-1} + x_{+1}}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\nu} u_k^{(2\nu)}(0{,}5)\,(y_{-k} + y_k). \qquad \text{(VI.36)}$$

Упрощаются также формулы для вычисления самих коэффициентов $u_k^{(2\nu)}(0{,}5)$. Эти формулы получим, положив в (VI.28) $u = v = 0{,}5$, в результате чего после очевидных упрощений будем иметь

$$u_1^{(2\nu)}(0{,}5) = \frac{\Pi_{2\nu}(0{,}5)}{{}^1/_2\,(\nu-1)!\,\nu!};$$

$$u_2^{(2\nu)}(0{,}5) = -\frac{\Pi_{2\nu}(0{,}5)}{{}^3/_2\,(\nu-2)!\,(\nu+1)!} = -\frac{1\cdot(\nu-1)}{3\cdot(\nu+1)}\,u_1^{(2\nu)}(0{,}5);$$

$$u_3^{(2\nu)}(0{,}5) = +\frac{\Pi_{2\nu}(0{,}5)}{{}^5/_2\,(\nu-3)!\,(\nu+2)!} = -\frac{3\cdot(\nu-2)}{5\cdot(\nu+2)}\,u_2^{(2\nu)}(0{,}5); \qquad \text{(VI.37)}$$

. . . . . .

$$u_\nu^{(2\nu)}(0{,}5) = (-1)^{\nu-1}\frac{\Pi_{2\nu}(0{,}5)}{(\nu-{}^1/_2)\,(2\nu-1)!} = -\frac{(\nu-{}^3/_2)\cdot 1}{(\nu-{}^1/_2)\,(2\nu-1)}\,u_{\nu-1}^{(2\nu)}(0{,}5),$$

Таблица 42

k	$c_k^{(6)}(t)$	$u=0{,}2$	$u=0{,}4$	x_k°	$y_k=\sin x_k$	x°	$\sin x$	x°	$\sin x$
-3	$v_3^{(6)}$	$+0{,}008064000$	$+0{,}011648000$	0	0,00000000	10	0,17364818	15	0,25881905
-2	$v_2^{(6)}$	$-0{,}073920000$	$-0{,}099840000$	5	0,08715574	11	0,190808999	16	0,275637359
-1	$v_1^{(6)}$	$+0{,}887040000$	$+0{,}698880000$	10	0,17364818	12	0,207911695	17	0,292371705
$+1$	$u_1^{(6)}$	$+0{,}221760000$	$+0{,}465920000$	15	0,25881905	13	0,224951059	18	0,309016993
$+2$	$u_2^{(6)}$	$-0{,}049280000$	$-0{,}087360000$	20	0,34202014	14	0,241921901	19	0,325568152
$+3$	$u_3^{(6)}$	$+0{,}006336000$	$+0{,}010752000$	25	0,42261826				
k	$c_k^{(6)}(1-t)$	$u=0{,}8$	$u=0{,}6$	30	0,50000000				
	$\Sigma_k=$	$+1{,}000000000$	$+1{,}000000000$	35	0,57357644				

Таблица 43

k	$u_k^{(8)}(0{,}5)$	$u_k^{(10)}(0{,}5)$	$u_k^{(12)}(0{,}5)$	$u_k^{(16)}(0{,}5)$	$u_k^{(20)}(0{,}5)$
1	$+0{,}598144531250$	$+0{,}605621337891$	$+0{,}610668182373$	$+0{,}617045536637$	$+0{,}620908022684$
2	$-0{,}119628906250$	$-0{,}134582519531$	$-0{,}145397186279$	$-0{,}159974768758$	$-0{,}169338551641$
3	$+0{,}023925781250$	$+0{,}034606933594$	$+0{,}043619155884$	$+0{,}057590916753$	$+0{,}067735420656$
4	$-0{,}002441406250$	$-0{,}006179809570$	$-0{,}010385513306$	$-0{,}018698349595$	$-0{,}026052084868$
5		$+0{,}000534057617$	$+0{,}001615524292$	$+0{,}004847720265$	$+0{,}008684028289$
6			$-0{,}000120162964$	$-0{,}000915303826$	$-0{,}002368371352$
7				$+0{,}000110641122$	$+0{,}000501001632$
8				$-0{,}000006392598$	$-0{,}000076623779$
9					$+0{,}000007512135$
10					$-0{,}000000353757$
$\Sigma u_k^{(n)}$	$+0{,}500000000000$	$+0{,}500000000001$	$+0{,}500000000000$	$+0{,}500000000000$	$+0{,}499999999999$

где

$$\Pi_{2\nu}(0{,}5) = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\right]^2.$$

Для $n = 2\nu = 4$ и $n = 6$ коэффициенты $u_k^{(n)}(0{,}5)$ приведены в табл. III приложения, а в табл. 43 вычислены с 12 десятичными знаками все $u_k^{(n)}(0{,}5)$ для $n = 2\nu = 8$; 10; 12; 16; 20. В последней строке табл. 43 для контроля найдена сумма $\sum u_k^{(n)} \equiv$ $\equiv \sum_{k=1}^{\nu} u_k^{(n)}(0{,}5)$, которая согласно формуле (VI.30) при $u = v = \frac{1}{2}$ должна быть равна $\frac{1}{2}$.

Это же контрольное равенство

$$\sum_{k=1}^{\nu} u_k^{(2\nu)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{VI.38}$$

можно получить непосредственным путем, положив в интерполяционной формуле (VI.36)

$$y(x) = y_{\pm k} = \text{const} = 1.$$

Пример 3. Построить семизначную таблицу синусов с шагом $h = 1°$, пользуясь только формулами приведения и четырьмя точными значениями

$$\sin 0 = 0;\quad \sin 30° = \frac{1}{2};\quad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \sin 90° = 1.$$

Решение. Приняв $x_{-1} = 150°$, $x_{+1} = 180°$, по формуле (VI.25) или (VI.36) при $\nu = 6$ находим

$$\sin 165° = \sin 15° = 0{,}25881904.$$

Все необходимые для этого величины приведены в табл. 44. Полагая $x_{-1} = 120°$, $x_{+1} = 150°$ и соответственно $x_{-1} = 90°$, $x_{+1} = 120°$, а также учитывая, что $\sin(-30°) = -\sin 30°$; $\sin(-60°) = -\sin 60°$, тем же путем определяем

$$\sin\frac{120° + 150°}{2} = \sin 135° = \sin 45°$$

и

$$\sin\frac{90° + 120°}{2} = \sin 105° = \sin 75°,$$

в результате чего переходим от исходного шага $h = 30°$ в табл. 44 к шагу $h = 15°$. Продолжая процесс уплотнения исходной таблицы, решим поставленную задачу совершенно аналогично примеру 2. Окончательные результаты округляем до семи десятичных знаков.

Если же исходные данные взять с девятью десятичными знаками и выполнить интерполяцию при $\nu = 8$, то путем уплотнения таблицы функции $y = \sin x$ при шаге $h = 30°$ мы получим восьмизначную табл. 40, которую в начале параграфа мы рассматривали как данную.

Таким образом, пользуясь только формулами приведения и значениями $\sin 0$, $\sin 30°$, $\sin 60°$, $\sin 90°$, которые вычисляются элементарным путем, мы при помощи процесса уплотнения таблиц можем построить таблицу тригонометрических функций с любым наперед заданным шагом h.

Таблица 44

$n = 2\nu = 12$; $u = 0{,}5$		Пример 3		Пример 4	
k	$c_k^{(12)}(0{,}5)$	x_k	$y_k = \sin x_k$	x_k	$y_k = e^{x_k}$
−6	−0,000120162964	0	0	0,0	1,000000
−5	+0,00161552429	30°	+0,50000000	0,5	1,648721
−4	−0,0103855133	60°	+0,86602540	1,0	2,718282
−3	+0,0436191559	90°	+1,00000000	1,5	4,481689
−2	−0,145397186	120°	+0,86602540	2,0	7,389056
−1	+0,610668182	150°	+0,50000000	2,5	12,182494
+1	+0,610668182	180°	0	3,0	20,085537
+2	−0,145397186	210°	−0,50000000	3,5	33,115452
+3	+0,0436191559	240°	−0,86602540	4,0	54,59815
+4	−0,0103855133	270°	−1,00000000	4,5	90,01713
+5	+0,00161552429	300°	−0,86602540	5,0	148,41316
+6	−0,000120162964	330°	−0,50000000	5,5	244,6919
Искомый $y\left(\frac{x_{-1}+x_{+1}}{2}\right)$		165°	+0,25881904	2,75	15,6426312

Пример 4. Построить на участке $0 \leqslant x \leqslant 1$ таблицу функции $y = e^x$ с семью значащими цифрами, пользуясь теоремой сложения для показательной функции

$$y(x_1 + x_2) = e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \qquad \text{(VI.39)}$$

и двумя ее точными значениями *

$$y(0) = 1;\ y(0{,}5) = e^{1/2} = 1{,}6487212707001 \ldots,$$

Решение. Пользуясь теоремой сложения (VI.39), строим искомую таблицу с шагом $h = 0{,}5$, а затем уплотняем ее аналогично примеру 2.

В табл. 44 приведены все необходимые данные для вычисления по формуле (VI.25) или (VI.36) при $\nu = 6$ значения $y(2{,}75) = e^{2{,}75} \approx 15{,}6426312$, с помощью которого строим таблицу с шагом $h = 0{,}25$, пользуясь только формулой (VI.39). Точное значение $e^{2{,}75} = 15{,}6426318 \ldots$, так что величина, найденная интерполяцией, имеет восемь значащих цифр.

Упражнение 2. Пользуясь данными, приведенными в табл. 44, построить таблицу функции $y = e^x$ с шагом $h = 0{,}1$. Результаты округлить до семи значащих цифр и проверить по таблице [136].

§ 81. Прямая и обратная табличные задачи

В предыдущих параграфах мы рассматривали лишь задачи отыскания значений функции, соответствующих данным значениям аргумента, которых нет в таблице, т. е. решали так называемую *прямую табличную задачу*. Между тем нередко приходится встречаться и с *обратной табличной задачей*: по таблице функции отыскать значение аргумента x, которому соответствует данное значение функции,

* Значение $y(0{,}5)$ будет вычислено в § 98 гл. VIII при помощи степенного ряда.

отсутствующее в таблице. Поставленную так задачу называют также *задачей обратной интерполяции.*

Работа с любой таблицей в большинстве случаев и сводится к решению прямой или обратной табличной задачи, поэтому продолжим изучение этих вопросов.

Все рассмотренные ранее примеры относились к тригонометрическим или экспоненциальной функциям. Расширим круг рассматриваемых функций, поскольку интерполяционные формулы применимы к любой достаточно гладкой функции и при этом никаких новых трудностей не возникает.

Пример 1. Найти интеграл вероятности

$$y = f(x) = \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

при $x = 0{,}5437$ по таблице его значений, часть которой приведена в колонке y_k табл. 45.

Таблица 45

x	y	$x = 0{,}5437;\ h = 0{,}01;\ u = 0{,}37;\ y = \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$			
...	...	k	x_k	y_k	$c_k^{(6)}$ (0,37)
x_{-3}	y_{-3}	−3	0,52	0,5378986305	$+0{,}011408405 = v_3^{(6)}$
x_{-2}	y_{-2}	−2	0,53	0,5464640969	$-0{,}098678542 = v_2^{(6)}$
x_{-1}	y_{-1}	−1	0,54	0,5549392505	$+0{,}730754618 = v_1^{(6)}$
x_{+1}	y_{+1}	+1	0,55	0,5633233663	$+0{,}429173348 = u_1^{(6)}$
x_{+2}	y_{+2}	+2	0,56	0,5716157638	$-0{,}082938407 = u_2^{(6)}$
x_{+3}	y_{+3}	+3	0,57	0,5798158062	$+0{,}010280578 = u_3^{(6)}$
...	...	$y(x) = 0{,}5580520210$			$+1{,}000000000 = \sum c_k$

Решение. Приняв $\nu = 3$, $n = 2\nu = 6$, $x_{-1} = 0{,}54$; $x_{+1} = 0{,}55$ и учтя, что шаг таблицы в данном случае $h = x_{+1} - x_{-1} = 0{,}01$, имеем

$$u = \frac{x - x_{-1}}{h} = \frac{0{,}5437 - 0{,}5400}{0{,}01} = 0{,}37.$$

Все необходимые значения коэффициентов $c_k^{(6)}$ при $u = 0{,}37$ берем из табл. III приложения и, перемножив (не снимая промежуточных результатов) y_k и $c_k^{(6)}$, стоящие в одних строках, находим согласно формуле (VI.25) интересующее нас значение $y(x) = 0{,}5580520210$. Сравнение с результатами, приведенными в более подробных таблицах этого интеграла, показывает, что все найденные нами знаки верные.

Замечание 1. В том случае, когда все рассматриваемые y_k имеют один или несколько одинаковых первых знаков, согласно (VI.30) при вычислении по интерполяционной формуле (VI.25) эти же знаки перейдут без изменения и в $y(x)$, так что при умножении y_k на соответствующие c_k общие знаки следует опускать.

Так, в табл. 45 все y_k имеют одинаковый первый десятичный знак 0,5, поэтому в $y(x)$ надо вычислить только остальные девять десятичных знаков.

В первых двух колонках табл. 45 для большей наглядности показаны x_k и соответствующие им узловые значения y_k, которые используются в интерполяционной формуле (VI.25), причем данное значение аргумента x всегда должно лежать в интервале $x_{-1} < x < x_{+1}$.

Упражнение 1. Вычислить эти же значения $y = \operatorname{erf} x$ для $x = 0{,}5437$ при $n = 2\nu = 2$ и $n = 4$, а затем, сравнив с результатом, полученным при $n = 6$, определить число найденных значащих цифр *.

Как уже отмечалось, наиболее распространенными являются таблицы, вычисленные с таким шагом h, который обеспечивает линейную интерполяцию без потери точности исходных данных. В этом случае процесс интерполяции существенно упрощается и согласно формуле (VI.17) или (VI.25) при $\nu = 1$ сводится к умножению табличных данных на два весовых коэффициента $v = 1 - u = c_{-1}^{(2)}$ и $u = c_{+1}^{(2)}$.

Пример 2. Найти $y = \operatorname{arctg} x$ при $x = 2{,}545091$ по двум значениям: $y(2{,}545) = 1{,}196402$ и $y(2{,}546) = 1{,}196536$, взятым из шестизначных таблиц.

Решение. Все необходимые вычисления (выполненные по формуле (VI.25) с двумя запасными знаками) приведены в табл. 46, в пояснение к которой отметим, что шаг таблицы в данном случае равен $h = x_{+1} - x_{-1} = 2{,}546 - 2{,}545 = 0{,}001$, так что

$$c_{+1}^{(2)} = u = \frac{x - x_{-1}}{h} = \frac{2{,}545091 - 2{,}545000}{0{,}001} = 0{,}091; \quad c_{-1}^{(2)} = v = 0{,}909.$$

Округлив два последних знака результата, получаем окончательно $y(x) = 1{,}196414$.

Таблица 46

$y = \operatorname{arctg} x$; $x = 2{,}545091$; $h = 0{,}001$; $u = 0{,}091$				
k	x_k	y_k	$c_k^{(2)}$ (0,091)	$y_k c_k^{(2)}$
-1	2,545	1,196402	$+0{,}909 = v_1^{(2)}$	1,08752942
$+1$	2,546	1,196536	$+0{,}091 = u_1^{(2)}$	0,10888478
		$\sum c_k =$	$+1{,}000$; $y(x) =$	1,19641420

Приняв во внимание замечание 1, этим же вычислениям можно придать следующий, более сокращенный вид:

$$y(x) = 1{,}196000 + 0{,}000402 \cdot 0{,}909 + 0{,}000536 \cdot 0{,}091 = 1{,}19641420 \approx 1{,}196414.$$

Формулы (VI.25) — (VI.28) дают возможность решать и обратную табличную задачу: по заданным (не узловым) значениям функции $y = y(x) = y(u)$ найти соответствующее значение аргумента. Эта задача сводится к решению алгебраического относительно u уравнения $(n-1)$-й степени, так как в формуле (VI.25) после подстановки в нее всех весовых коэффициентов в конечном итоге неизвестной остается только величина u.

* На вопросе выбора n, которое обеспечивало бы заданную точность при интерполировании по формуле (VI.25), мы кратко остановимся в § 83.

В случае линейной или квадратичной интерполяции ($n = 2$ или $n = 3$) обратная интерполяция осуществляется элементарно, а решение алгебраических уравнений более высокой степени будет рассмотрено в следующей главе.

Пример 3. По данным, приведенным в табл. 46, найти аргумент x, при котором $y = \operatorname{arctg} x = 1{,}196500$.

Решение. Воспользовавшись формулой линейной интерполяции и решив относительно u уравнение (VI.16), которое эквивалентно уравнению (VI.17), имеем

$$u = \frac{y - y_{-1}}{y_{+1} - y_{-1}}. \quad (VI.40)$$

Подставив в формулу (VI.40) взятые из табл. 46 значения y_{-1}, y_{+1} и заданное значение $y = y(x)$, находим

$$u = \frac{1{,}196500 - 1{,}196402}{1{,}196536 - 1{,}196402} = \frac{0{,}000098}{0{,}000134} = 0{,}7313.$$

Так как, с другой стороны, $u = \frac{x - x_{-1}}{h}$, то по известному u легко вычислить искомый аргумент x:

$$x = x_{-1} + hu = 2{,}545 + 0{,}001 \cdot 0{,}7313 = 2{,}5457313.$$

Округлив результат до шести десятичных знаков, получаем окончательно $x = 2{,}545731$.

Замечание 2. Интерполяционную формулу (VI.25) можно применять и вне основного интервала $x_{-1} < x < x_{+1}$, но при этом точность полученных результатов будет снижаться, так что в этом случае надо проявлять большую осторожность. Поэтому при интерполировании не следует без особой надобности выходить из основного интервала, и только в самом начале или в самом конце таблицы (если нет возможности ее продолжить) мы вынуждены это делать.

Более подробно данный вопрос рассмотрен в книге [148, гл. 2], где указана и дальнейшая литература.

Упражнение 2. По данным табл. 46 найти аргумент x, при котором $y = \operatorname{arctg} x = 1{,}196450$.

§ 82. Конечные разности. Вычисление таблиц полиномов

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную таблицей своих значений в ряде фиксированных узловых точек *:

$$y_0 = f(x_0);\ y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

В случае равноудаленных узлов, т. е. когда значения аргумента образуют арифметическую прогрессию (VI.14)

$$x_n = x_0 + kh,\ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1),$$

где h — шаг таблицы, первые разности значений функции $y = f(x)$ определяются такими равенствами:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\ \Delta y_1 = y_2 - y_1;\ \ldots;\ \Delta y_n = y_{n+1} - y_n. \quad (VI.41)$$

По первым разностям аналогичным путем вычисляем значения других разностей или разностей второго порядка, отнимая от каждой последующей разности предыдущую, т. е.

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0;\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;\ \ldots; \quad (VI.42)$$
$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.$$

* При изложении вопроса о конечных разностях более удобным являются обозначения $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$, которыми мы пользовались в начале § 79.

По вторым разностям составляем разности третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta(\Delta^2 y_0) = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0; \quad \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1; \ \ldots . \quad \text{(VI.43)}$$
$$\Delta^3 y_n = \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n,$$

и вообще, разности порядка $k+1$ определяются по разностям порядка k при помощи рекуррентной формулы

$$\Delta^{k+1} y_n = \Delta^k y_{n+1} - \Delta^k y_n; \ k = 0, 1, 2, \ldots . \quad \text{(VI.44)}$$

В формуле (VI.44) разности нулевого порядка ($k = 0$) принимаем тождественно равными самой функции: $\Delta^0 y_n \equiv y_n = f(x_n)$.

Разности обычно записывают в таблице между теми строками, в которых стоят исходные данные для вычисления рассматриваемой разности.

Замечание 1. Все табличные разности принято записывать целыми числами в единицах последнего знака без нулей впереди. Этого правила мы будем придерживаться в дальнейшем без каких-либо исключений.

Разности, определенные формулами (VI.41) — (VI.44), называются *разностями, взятыми вперед*, или *правыми разностями*, и обозначаются обычно соответствующей степенью большой греческой буквы дельта Δ.

Рассматривают также *разности, взятые назад*, или *левые разности*, которые обозначают символом набла ∇ и определяют равенствами

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}; \quad \nabla^2 y_n = \nabla(\nabla y_n) = \nabla y_n - \nabla y_{n-1}; \ \ldots .$$

и *центральные разности*

$$\delta y_n = y_{n+1/2} - y_{n-1/2},$$

где $y_{n+1/2}$ и $y_{n-1/2}$ — значения функции в центре отрезков $[x_{n+1}, x_n]$ и $[x_n, x_{n-1}]$.

Пример 1. Вычислить таблицу разностей для функции $y = x^4 - 0{,}3x + 17{,}86$ на сегменте $3{,}0 \leqslant x \leqslant 4{,}0$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. В табл. 47 приведены значения исходной функции и вычислены все разности по формулам (VI.41) — (VI.44). Техника вычислений разностей следующая.

Устанавливаем наибольшее значение функции, а именно: $y_{10} = 272{,}6600$, отнимаем от него $y_9 = 248{,}0341$ и найденный результат

$$\Delta y_9 = y_{10} - y_9 = 24{,}6259 = 246259 \cdot 10^{-4}$$

записываем в целых единицах последнего разряда в табл. 47. После этого гасим результат, но установку y_9 сохраняем для вычисления $\Delta y_8 = y_9 - y_8$. Вычислив всю колонку Δy, аналогично определяем $\Delta^2 y$ и т. д.

Таблица 47

n	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	3,0	97,9600				
			$\Delta y_0 = 113221$			
1	3,1	109,2821		$\Delta^2 y_0 = 11534$		
			$\Delta y_1 = 124755$		$\Delta^3 y_0 = 756$	
2	3,2	121,7576		$\Delta^2 y_1 = 12290$		$\Delta^4 y_0 = 24$
			$\Delta y_2 = 137045$		$\Delta^3 y_1 = 780$	
3	3,3	135,4621		$\Delta^2 y_2 = 13070$		$\Delta^4 y_1 = 24$
			$\Delta y_3 = 150115$		$\Delta^3 y_2 = 804$	
4	3,4	150,4736		$\Delta^2 y_3 = 13874$		$\Delta^4 y_2 = 24$
			$\Delta y_4 = 163989$		$\Delta^3 y_3 = 828$	
5	3,5	166,8725		$\Delta^2 y_4 = 14702$		$\Delta^4 y_3 = 24$
			$\Delta y_5 = 178691$		$\Delta^3 y_4 = 852$	
6	3,6	184,7416		$\Delta^2 y_5 = 15554$		$\Delta^4 y_4 = 24$
			$\Delta y_6 = 194245$		$\Delta^3 y_5 = 876$	
7	3,7	204,1661		$\Delta^2 y_6 = 16430$		$\Delta^4 y_5 = 24$
			$\Delta y_7 = 210675$		$\Delta^3 y_6 = 900$	
8	3,8	225,2336		$\Delta^2 y_7 = 17330$		$\Delta^4 y_6 = 24$
			$\Delta y_8 = 228005$		$\Delta^3 y_7 = 924$	
9	3,9	248,0341		$\Delta^2 y_8 = 18254$		
			$\Delta y_9 = 246259$			
10	4,0	272,6600				
$\Sigma_k =$		—	1747000	133038	6720	168
$R_k =$		174,7000	133038	6720	168	0

Этот способ, который экономит до 50% установок чисел, можно применять при вычислении разности любой монотонной функции. Если же функция не монотонная, то разности в пределах данной колонки будут только изменять знак.

Таблица 48

n	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	3,0	97,960					
			11322				
1	3,1	109,282		1154			
			12476		74		
2	3,2	121,758		1228		+6	
			13704		80		−8
3	3,3	135,462		1308		−2	
			15012		78		+10
4	3,4	150,474		1386		+8	
			16398		86		−12
5	3,5	166,872		1472		−4	
			17870		82		+12
6	3,6	184,742		1554		+8	
			19424		90		−10
7	3,7	204,166		1644		−2	
			21068		88		+8
8	3,8	225,234		1732		+6	
			22800		94		
9	3,9	248,034		1826			
			24626				
10	4,0	272,660					
	$\Sigma_k =$	—	174700	13304	672	20	0
	$R_k =$	174700	13304	672	20	0	—

В рассматриваемом примере разности четвертого порядка имеют постоянное значение (следовательно, при $p > 4$ все последующие разности $\Delta^p y \equiv 0$), и это не случайно.

Действительно, если функция $y = f(x)$ на данном промежутке имеет непрерывные производные до k-го порядка включительно, то справедлива формула *

$$\Delta^k y_n = f^{(k)}(\xi) \cdot h^k, \tag{VI.45}$$

где ξ — некоторая точка, лежащая между x_n и $x_{n+k} = x_n + kh$. Поэтому для полинома k-й степени

$$y = f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{VI.46}$$

для которого $f^{(k)}(x) = a_k \cdot k! = \text{const}$; $f^{(p)}(x) \equiv 0$, если $p > k$, при произвольном n (но постоянном h) имеем

$$\Delta^k y_n = a_k h^k k! = \text{const} \text{ и } \Delta^p y_n \equiv 0 \text{ при } p > k, \tag{VI.47}$$

т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для полинома k-й степени (при произвольном n, но постоянном шаге h) разности k-го порядка будут постоянны, а все последующие разности тождественно равны нулю.*

В нашем примере $k = 4$; $a_4 = 1$; $h = 0{,}1$; следовательно, и должно быть

$$\Delta^4 y_n = (0{,}1)^4 \cdot 4! = 0{,}0024 = 24 \cdot 10^{-4}; \ \Delta^p y_n \equiv 0 \text{ при } p > 4.$$

Справедливо и обратное утверждение, которое мы приводим без доказательства.

* При $k = 1$ формула (VI.45) совпадает с формулой конечных приращений $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(x_n + h) - f(x_n) = f'(\xi) \cdot h$, где $x_n < \xi < x_{n+1}$. При $k > 1$ формулу (VI.45) можно доказать методом полной математической индукции при помощи обобщенной формулы конечных приращений Коши.

Теорема 2. *Если k-е разности $\Delta^k y_n$ функции, образованные для равноотстоящих значений аргумента при любом шаге h, постоянны, то эта функция представляет собой полином k-й степени* (VI.46), *у которого коэффициент при x^k равен*

$$a_k = \frac{\Delta^k y_n}{h^k \cdot k!}. \tag{VI.48}$$

Однако необходимо подчеркнуть, что свойство постоянства k-х разностей (VI.47) справедливо только для таблиц точных значений полиномов. Например, если в табл. 47 округлить последний десятичный знак функции $y = f(x)$, т. е. в данном примере округлить только десятитысячные, то получим совсем другую таблицу разностей (табл. 48).

Погрешность округления равняется половине единицы последнего разряда табличного значения функции. Поэтому по правилу вычисления абсолютной погрешности разности двух приближенных чисел (см. § 75) находим, что для

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

погрешность не превышает одной единицы, для

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n$$

двух единиц и т. д. согласно таблице (в единицах последнего разряда):

Табличные разности	$\Delta^0 y \equiv y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	...	$\Delta^k y$
Граничная абсолютная погрешность округления	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	...	2^{k-1}

Таким образом, из-за неизбежной погрешности округления на практике обычно не следует пользоваться разностями выше четвертого-пятого порядков.

Введем необходимые определения.

Определение 1. *Таблица разностей до k-го порядка включительно называется правильной, если модули разностей $(k+1)$-го порядка меньше граничных погрешностей их округления, т. е.*

$$|\Delta^{k+1} y_n| < 2^k,$$

а разности более низких порядков таким свойством не обладают.

В этом случае *разности k-го порядка называются практически постоянными, а разности $(k+1)$-го порядка — практически равными нулю. Разности высших порядков не вычисляют и в расчетах не применяют.*

Из формулы (VI.45) вытекает такое достаточное условие того, что разности $(k+1)$-го порядка практически равны нулю:

$$|\Delta^{k+1} y_n| \leqslant M_{k+1} \cdot h^{k+1} \leqslant 10^{-m}, \tag{VI.49}$$

где M_{k+1} — наибольшее значение модуля $(k+1)$-й производной $|f^{(k+1)}(x)|$ на промежутке табличных значений аргумента, а m — количество десятичных знаков после запятой в таблице значений функции $y = f(x)$.

Заметим, что на практике определить число M_{k+1} бывает трудно, а часто и невозможно, когда, например, функция задана таблицей или графиком.

Определение 2. *Будем считать, что разности* $\Delta^{k+1}y_n$ *практически равны нулю, если их сумма и величина каждой из них меньше, чем соответствующая погрешность округления, а знаки стоят в беспорядке или чередуются.*

Например, всем этим условиям удовлетворяют только $\Delta^5 y$ в табл. 48, так как для разностей пятого порядка граничная погрешность округления равняется 16 единицам последнего разряда. Сумма же разностей четвертого порядка в табл. 48 и отдельные их значения больше или равны граничной погрешности округления, которая для $k = 4$ равна $2^3 = 8$.

Вообще, благодаря частичной взаимной нейтрализации погрешностей округления среднее арифметическое значение разностей, которые являются практически постоянными или практически равными нулю, значительно ближе к действительным значениям этих разностей, чем их отдельные табличные значения, в большей степени искаженные погрешностями округления.

Например, в табл. 48 при $n = 10$ имеем

$$\sum_{\nu=0}^{5} \Delta^5 y_\nu = 0; \quad \sum_{\nu=0}^{6} \Delta^4 y_\nu = 20,$$

откуда соответствующие средние арифметические значения равны:

$$\Delta^5 y_{\text{ср}} = 0; \ \Delta^4 y_{\text{ср}} = \frac{20}{7} = 2{,}86,$$

что хорошо совпадает с точными значениями

$$\Delta^4 y = 0{,}0024 = 2{,}4 \cdot 10^{-3} = \text{const}; \quad \Delta^5 y = 0.$$

Замечание 2. Если разности $(k+1)$-го порядка практически равны нулю, то это согласно теореме 2 означает, что данная функция $y = f(x)$ при данном шаге h и на рассматриваемом сегменте аппроксимируется полиномом k-й степени (с точностью до единиц последнего разряда). При этом чем меньшим выбран шаг таблиц h, тем меньшей будет и степень аппроксимирующего полинома k.

Остановимся на контроле вычисления таблиц разностей.

Непосредственно из формул (VI.41) и (VI.44) находим, что

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta y_\nu = (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) = y_n - y_0 \qquad \text{(VI.50)}$$

и, соответственно,

$$\sum_{\nu=0}^{n-k} \Delta^{k+1} y_\nu = (\Delta^k y_1 - \Delta^k y_0) + \cdots + (\Delta^k y_{n-k} - \Delta^k y_{n-k-1}) = \\ = \Delta^k y_{n-k} - \Delta^k y_0, \qquad \text{(VI.51)}$$

т. е. сумма значений в каждом столбце разностей равна разности между последним и первым значениями предыдущего столбца. Этот факт и служит численным контролем, для чего в таблице разностей вычисляют еще две строки: строку Σ_k, равную сумме чисел, стоящих в данном столбце k, и строку R_k, равную разности крайних значений этого столбца. Тогда если все вычисления выполнены правильно, то согласно формуле (VI.51) для каждого столбца k должно выполняться равенство

$$R_k = \Sigma_{k+1}; \ k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad \text{(VI.52)}$$

В табл. 47 и 48, в которых вычислены также строки Σ_k и R_k, контрольное равенство (VI.52) выполняется для всех рассмотренных значений k. Однако этот контроль не учитывает ошибок, сумма которых равна нулю.

При вычислении таблиц полиномов широко используют свойство постоянства их k-х разностей, сформулированное в теореме 1. Пользуясь этим свойством, необходимо только непосредственно вычислить первые $k+1$ значения полинома (для таблиц с постоянным шагом), а все дальнейшие значения легко определяются путем суммирования найденных разностей.

Пример 2. Вычислить таблицу значений полинома

$$y = 0{,}267x^4 - 1{,}378x^3 + 2{,}060x^2 - 0{,}031x + 2{,}743$$

для значений $0 \leqslant x \leqslant 1{,}5$ с шагом $h = 0{,}1$.

Решение. Вычисляем по заданной формуле непосредственно только первые пять значений функции $y(x)$ и соответствующие им разности.

Так как для полинома 4-й степени четвертые разности постоянны, то по найденной

$$\Delta^4 y_0 = 6408 = \Delta^4 y_n = \text{const}$$

согласно формуле (VI.44) вычисляем все интересующие нас третьи разности:

$$\Delta^3 y_{n+1} = \Delta^3 y_n + \Delta^4 y_n = \Delta^3 y_n + 6408.$$

Таблица 49

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,0	2,7430000				
		+161487			
0,1	2,7591487		+333058		
		+494545		−73068	
0,2	2,8086032		+259990		+6408
		+754535		−66660	
0,3	2,8840567		+193330		
		+947865		−60252	
0,4	2,9788432		+133078		
		+1080943		−53844	
0,5	3,0869375		+79234		
		+1160177		−47436	
0,6	3,2029552		+31798		
		+1191975		−41028	
0,7	3,3221527		−9230		
		+1182745		−34620	
0,8	3,4404272		−43850		
		+1138895		−28212	
0,9	3,5543167		−72062		
		+1066833		−21804	
1,0	3,6610000		−93866		
		+972967		−15396	
1,1	3,7582967		−109262		
		+863705		−8988	
1,2	3,8446672		−118250		
		+745455		−2580	
1,3	3,9192127		−120830		
		+624625		+3828	
1,4	3,9816752		−117002		
		+507623			
1,5	4,0324375				

Таблица 50

x	$\tilde{y}$	$\Delta\tilde{y}$	$\Delta^2\tilde{y}$	$\Delta^3\tilde{y}$	$\Delta^4\tilde{y}$
0,0	2,743000				
		+16149			
0,1	2,759149		+33305		
		+49454		−7305	
0,2	2,808603		+26000		+637
		+75454		−6668	
0,3	2,884057		+19332		
		+94786		−6031	
0,4	2,978843		+13301		
		+108087		−5394	
0,5	3,086930		+7907		
		+115994		−4757	
0,6	3,202924		+3150		
		+119134		−4120	
0,7	3,322058		−970		
		+118164		−3483	
0,8	3,440222		−4453		
		+113711		−2846	
0,9	3,553933		−7299		
		+106412		−2209	
1,0	3,660345		−9508		
		+96904		−1572	
1,1	3,757249		−11080		
		+85824		−935	
1,2	3,843073		−12015		
		+73809		−298	
1,3	3,916882		−12313		
		+61496		+339	
1,4	3,978378		−11974		
		+49522			
1,5	4,027900				

По найденным третьим разностям аналогичным путем вычисляем вторые разности, по ним — первые, а по первым — значения самой функции. Все эти вычисления приведены в табл 49. Для контроля последнее значение $y\,(1{,}5) = 4{,}0324375$ вычисляем непосредственно по заданной формуле и убеждаемся, что все найденные знаки верные.

Необходимо, однако, не упускать из виду одно важное обстоятельство: *данный метод вычислений справедлив только для полиномов и при непременном условии, что все вычисления выполнялись абсолютно точно, без каких-либо округлений и погрешностей* *. Самая ничтожная погрешность, допущенная, предположим, в четвертой разности, будет накапливаться в третьей разности пропорционально количеству строк n, во второй разности — возрастать пропорционально квадрату количества строк, в первой разности — пропорционально их кубу и для самой функции — пропорционально n^4.

В табл. 50 мы округлили только последние знаки в исходных пяти значениях функции y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 и повторили все вычисления, выполненные в табл. 49. В результате для $x = 1{,}5$ получили значение $y\,(1{,}5) \approx 4{,}027900$, абсолютная погрешность которого $\varepsilon = 4{,}0324375 - 4{,}0279000 = 0{,}0045375$, т. е. в данном при-

* Например, при помощи этого метода мы вычислили табл. III приложения, поскольку $u_k^{(4)}$ и $u_k^{(6)}$ суть полиномы третьей и пятой степеней соответственно.

мере при вычислении 11 дополнительных строк таблицы погрешность окончательного результата превысила предельную абсолютную погрешность округления исходных значений, равную 0,0000005, в 9075 раз!

Упражнение. Продолжить вычисление табл. 49 и 50 до $x = 2{,}5$ включительно и определить погрешность приближенного значения y (2,5), которое будет получено в табл. 50.

§ 83. О точности полиномиальной интерполяции. Проверка и корректировка таблиц

Согласно теореме 2 § 82 функция $y = f(x)$ при данном шаге $h = \text{const}$ аппроксимируется с точностью до единиц последнего разряда полиномом k-й степени, если разности $(k+1)$-го порядка практически равны нулю. Так как, с другой стороны, интерполяционная формула (VI.25) для полинома $(n-1)$-й степени дает точные результаты, то мы приходим к следующему критерию выбора числа узловых точек в этой формуле.

Формула (VI.25) позволяет интерполировать без потери точности исходных данных таблицу достаточно гладкой функции $y = f(x)$, если при выбранном шаге $h = \text{const}$ на рассматриваемом сегменте число узловых точек n равно порядку разности, которая практически равна нулю[*].

В частности, если для заданного участка таблицы вторые разности практически равны нулю, то на этом участке можно пользоваться линейной интерполяцией ($n = 2$).

Этот же критерий остается в силе и при нечетном числе узловых точек. Поэтому квадратичную интерполяцию ($n = 3$) можно применять на тех участках таблицы, на которых $\Delta^3 y_k$ практически равны нулю (или, что эквивалентно, $\Delta^2 y_k$ практически постоянны).

Пример 1. В примере 2 § 81 путем линейной интерполяции мы нашли, что $\operatorname{arctg} x = 1{,}196414$ при $x = 2{,}545091$. Проверим этот результат, воспользовавшись таблицей функции $y = \operatorname{tg} x$, которая является обратной по отношению к исходной функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Решение. Рассмотрим небольшой участок таблицы значений функции $y = \operatorname{tg} x$ и вычислим для нее по формулам (VI.41), (VI.42) первые и вторые разности. Результаты этих вычислений приведены в табл. 51. Как видим, в данном примере вторые разности постоянные, поэтому заданная точность будет обеспечена, если воспользоваться квадратичной интерполяцией. Все вычисления, выполненные по формулам (VI.22) — (VI.24), приведены в той же табл. 51. Округлив найденный результат до шести десятичных знаков (т. е. взяв его с той точностью, с какой составлена исходная таблица), получаем окончательный ответ:

$$\operatorname{tg}(1{,}196414) = 2{,}545091,$$

который полностью совпадает с результатом, полученным в § 81. Линейная же интерполяция, которую мы выполняем по формуле (VI.17) с учетом замечания 1 § 81, дает

$$\operatorname{tg}(1{,}196414) = 2{,}540000 + 0{,}001998 \cdot 0{,}586 + 0{,}009479 \cdot 0{,}414 = 2{,}540000 + 0{,}00117093 + 0{,}00392431 = 2{,}54509514 \approx 2{,}545095.$$

Пример 2. Показать с помощью разностей, что при решении примера 2 § 81 линейная интерполяция обеспечивает заданную точность.

Решение. Дополнив данные, приведенные в табл. 46, еще двумя значениями и вычислив по формулам (VI.41), (VI.42) первые и вторые разности, осуществляем требуемый контроль. Все эти вычисления приведены в табл. 52, согласно которой для рассматриваемой функции $y = \operatorname{arctg} x$ первые разности Δy

[*] Этот критерий справедлив только в случае таблиц, составленных для равноудаленных значений аргумента.

практически постоянны, а вторые разности $\Delta^2 y$ практически равны нулю. Поэтому линейная интерполяция, которая была применена в табл. 46, обеспечивает получение результата без потери точности исходных табличных данных.

Таблица 51

$y = \operatorname{tg} x$; $x = 1{,}196414$; $h = 0{,}001$; $u = \frac{x - x_{-1}}{h} = 0{,}414$

k	x_k	y_k	Δy	$\Delta^2 y$	$c_k^{(2)}$	$c_k^{(3)}$	$y_k c_k^{(3)}$
−3	1,194	2,527150			—	—	—
			7405				
−2	1,195	2,534555		38	—	—	—
			7443				
−1	1,196	2,541998		38	+0,586000	+0,464698	+1,18126139
			7481				
+1	1,197	2,549479		38	+0,414000	+0,656604	+1,6739 9811
			7519				
+2	1,198	2,556998		38	—	−0,121302	−0,31016897
			7557				
+3	1,199	2,564555			—	—	—
				$\Sigma_k =$	+1,000000	+1,000000	+2,54509053

Таблица 52

x	$y = \operatorname{arctg} x$	Δy	$\Delta^2 y$
2,544	1,196268		
		134	
2,545	1,196402		0
		134	
2,546	1,196536		−1
		133	
2,547	1,196669		

Сравнив результаты, полученные в табл. 51 и 46, видим, что переход к обратной функции может упростить решение поставленной задачи. Действительно, для функции $y = \operatorname{tg} x$ заданная точность обеспечивалась только квадратичной интерполяцией (а линейная интерполяция давала погрешность в четыре единицы последнего знака), в то время как для обратной функции $y = \operatorname{arctg} x$ требуемая точность была достигнута при $n = 2$. Заметим также, что при переходе к обратной функции прямая и обратная табличные задачи меняются ролями.

Упражнение 1. По данным, приведенным в табл. 52, вычислить путем интерполяции $y = \operatorname{arctg} x$ для $x = 2{,}545731$ при $n = 2$, 3, 4 и сравнить между собой результаты. Эти же результаты сравнить с решением примера 3 § 81.

Пример 3. Определить n, обеспечивающее на сегменте $1{,}90 \leqslant x \leqslant 2{,}00$ при интерполировании по формуле (VI.25) сохранение точности исходных данных для функции $y = e^x$, значения которой приведены в табл. II приложения.

Решение. В табл. 53 вычислены разности для рассматриваемого участка значений функции $y = e^x$. Как видим, в данном случае $\Delta^3 y$ практически постоянны, а $\Delta^4 y$ практически равны нулю. Поэтому на сегменте $1{,}90 \leqslant x \leqslant 2{,}00$ интерполяция будет осуществляться без потери точности табличных данных, если взять $n = 4$.

Таблица 53

x	$y = e^x$	Δy	Δ^2	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1,90	6,685894				
		67195			
1,91	6,753089		674		
		67869		9	
1,92	6,820958		683		—3
		68552		6	
1,93	6,889510		689		+1
		69241		7	
1,94	6,958751		696		—1
		69937		6	
1,95	7,028688		702		+2
		70639		8	
1,96	7,099327		710		0
		71349		8	
1,97	7,170676		718		—2
		72067		6	
1,98	7,242743		724		+1
		72791		7	
1,99	7,315534		731		
		73522			
2,00	7,389056				
			$\Sigma =$	6327	57	—2

Так как с уменьшением значения аргумента функция $y = e^x$ монотонно убывает, то полученный результат остается справедливым и для всей табл. II приложения, т. е. для сегмента $0 \leqslant x \leqslant 2$. Более того, при $0 \leqslant x \leqslant 1$ требуемая точность будет обеспечиваться квадратичной интерполяцией ($n = 3$). В примере 2 § 79 квадратичная интерполяция обеспечила требуемую точность при $x = 1{,}6243$, но это произошло благодаря случайной компенсации ошибок округления, на что, разумеется, мы рассчитывать не имеем права. Поэтому в примере 2 § 79 для полной надежности надо было повторить интерполяцию при $n = 4$, тогда совпадение результатов при $n = 3$ и $n = 4$ подтверждало бы их достоверность.

Упражнение 2. Определить n, обеспечивающее при интерполировании на сегменте $1{,}52 \leqslant x \leqslant 1{,}57$ точность исходных данных для функции $y = \sin x$, значения которой приведены в табл. I приложения.

Переходим к рассмотрению вопроса о проверке и корректировке таблиц.

К сожалению, в некоторых таблицах встречаются опечатки, поэтому каждый вычислитель должен уметь проверять таблицы, с которыми он работает. Непременно надо контролировать также те таблицы, которые вновь составляются самим вычислителем. Наиболее удобно контролировать таблицы при помощи разностей. Для этого на сомнительном участке вычисляют табличные разности (обычно первого и второго порядков). Тогда если одно из табличных значений функции y имеет ошибку величиной ε, то влияние этой ошибки распространится на таблицу разностей так, как показано в табл. 54.

Таблица 54

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
....	....	....	....	....
....	....	....	+ε	+ε
....	+ε	+ε	−3ε	−4ε
ε	−ε	−2ε	+3ε	+6ε
....	....	+ε	−ε	−4ε
....	....	....	....	+ε
....	....	....	....	....

Таким образом, даже незначительная и совсем незаметная в таблице неточность совершенно четко выявляется в таблице разностей. Ошибочное значение y находится в той строке, в какой вторая разность (или более высокие разности четного порядка) больше всего отклоняется от своего истинного значения.

Чтобы исправить это значение, составляем небольшой участок таблицы с удвоенным (или утроенным) шагом $2h$ (или $3h$) и при помощи интерполирования находим истинное значение функции для середины соответствующего интервала т. е. при $u = 0{,}5$ (и соответственно при $u = {}^1/_3$ в случае шага $3h$).

Так, например, при работе с табл. 55 возникло подозрение, что в колонке $y = \sin x$ есть ошибочное значение табулированной функции. Вычисление разностей для этой колонки, которое выполнено в табл. 56, подтвердило, что $y = \sin x$ при $x = 0{,}80$ содержит ошибку.

Таблица 55

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	e^x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{th} x$
0,75	0,68164	0,73169	0,93160	2,117000	0,82232	1,29468	0,63515
0,76	68892	72484	95045	138276	83530	30297	64108
0,77	69614	71791	96967	159766	84838	31739	64693
0,78	70328	71091	98926	181472	86153	31994	65271
0,79	71035	70385	1,00925	203396	87478	32862	65841
0,80	71738	69671	02968	225541	88811	33748	66409
0,81	72429	68950	05046	247906	90149	34638	66959
0,82	73115	68225	07171	270500	91503	35543	67507
0,83	73793	67488	09343	293319	92863	36468	68048
0,84	74464	66746	11563	316367	94233	37404	68581
0,85	0,75128	0,65998	1,13833	2,339647	0,95612	1,38353	0,69107

Все вычисления, необходимые для определения истинного значения $y = \sin 0{,}80$, приведены в той же табл. 56. При этом мы воспользовались интерполяционной формулой (VI.25), в которой надо положить $n = 4$; $h = 0{,}02$; $x_{-1} = 0{,}79$; $x_{+1} = 0{,}81$; $x = 0{,}80$; $u = \dfrac{x - x_{-1}}{h} = \dfrac{0{,}80 - 0{,}79}{0{,}02} = 0{,}5$. Искомое значение

Таблица 56

k	x	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$c_k^{(4)}(0,5)$	$y_k c_k^{(4)}(0,5)$
	0,75	0,68164						
			728					
	0,76	0,68892		—6				
			722		—2			
—2	0,77	0,69614		—8		+3	—0,0625000	—0,0435088
			714		+1			
	0,78	0,70328		—7		+2		
			707		+3			
—1	0,79	0,71035		—4		—11	+0,5625000	+0,3995719
			703		—8			
	0,80	0,71738		—12		+15		
			691		+7			
+1	0,81	0,72429		—5		—10	+0,5625000	+0,4074131
			686		—3			
	0,82	0,73115		—8		+4		
			678		+1			
+2	0,83	0,73793		—7		—1	—0,0625000	—0,0461206
			671		0			
	0,84	0,74464		—7				
			664					
	0,85	0,75128						
$y(0,80) = 0,7173556 \approx 0,71736;$						$\sum_k =$	+1,0000000	+0,7173556

$y(0,80)$ находим как сумму произведений $\sum_{k=-2}^{+2}{}' y_k c_k^{(4)}(0,5)$. Необходимые значения y_k берем непосредственно из табл. 56, а весовые коэффициенты $c_k^{(4)}(0,5)$ из табл. III приложения. Все вычисления ведем с двумя запасными знаками, округлив которые мы и получим откорректированное значение искомой функции

$$y(0,80) = 0,7173556 \approx 0,71736.$$

Для окончательного контроля исправленное значение $y = \sin 0,80 = 0,71736$ надо внести в табл. 56 и снова вычислить соответствующие разности, что читателю полезно выполнить в виде упражнения. При этом необходимо иметь в виду, что благодаря неустранимым погрешностям округления разности будут изменяться не совершенно плавно.

Рассмотренный способ исправления ошибок применим только в том случае, когда эти ошибки являются изолированными. В тех же, вообще говоря, очень редких случаях, когда два-три ошибочных табличных значения стоят рядом или настолько близко друг к другу, что искажают рассмотренную выше типичную картину хода разностей, необходимо выписать достаточно большие участки таблицы через одно, два или три значения (т. е. с удвоенным, утроенным или учетверенным шагом) и тем самым изолировать встретившиеся ошибки. С каждой из составленных подтаблиц поступаем затем так, как было описано выше.

Для каждой конкретной функции всегда можно построить таблицу высокой точности, но небольшого объема и при этом найти такой шаг h, который обеспечил бы осуществление интерполяции по формуле (VI.25) при $\nu = 2$ или $\nu = 3$ без

потери точности таблицы *. Так как при $\nu = 2$ или $\nu = 3$ сам процесс интерполяции сводится к умножению четырех или шести узловых значений y_k на табулированные коэффициенты $c_k^{(2\nu)}$, то такая таблица будет компактной и удобной в работе, причем нет надобности приводить в ней разности, что экономит не только труд вычислителя, но и бумагу при печатании таблиц. Для построения такой таблицы надо располагать очень небольшим числом основных узловых точек (порядка 20—30), но вычисленных с двумя-тремя запасными знаками.

При вычислениях на ЭВМ, когда вопросы объема памяти машины имеют очень существенное значение, таблицы заданных функций также удобно вводить в наиболее компактном виде, т. е. с максимально возможным шагом и с подпрограммой интерполирования по формуле (VI.25), которую легко составить, включая и подпрограмму автоматического вычисления коэффициентов $c_k^{(2\nu)}$.

В заключение отметим, что мы ограничились самыми начальными, основными сведениями, без которых невозможно сознательно выполнять приближенные вычисления. Подробнее все эти вопросы изложены в работах [6, 7, 13, 31, 34, 60, 65, 72, 73, 83, 84, 85, 93, 108, 118, 124, 143, 148, 154, 179, 180, 184, 190].

Контрольные упражнения

1. Округлить до трех десятичных знаков следующие числа:

$$x_1 = 15{,}2734;\ x_2 = 0{,}000567;\ x_3 = 0{,}080491;\ \pi = 3{,}14159...$$

и определить абсолютную и относительную погрешности результатов.

2. Округлить до четырех значащих цифр числа $a = 27{,}00953$ и $b = 0{,}014024783$, а затем определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных значений a, b и величин $a \pm b$, $a \cdot b$, $a : b$.

3. Вычислить с четырьмя значащими цифрами $\sqrt{15}$, $\sqrt[3]{15}$ и $\sqrt[4]{15}$. Полученные результаты проконтролировать возведением в квадрат, куб и четвертую степень.

4. Воспользовавшись табл. II приложения, найти интерполированием (без потери точности табличных данных) значения функций e^x, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ для $x = 0{,}3728$ и $x = 0{,}7854$. Результаты проконтролировать при помощи тождеств

$$e^x + e^{-x} = 2 \operatorname{ch} x;\quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

5. Составить пятизначную таблицу степенной функции $y = x^n$ при таких исходных данных:

$$0 \leqslant x \leqslant 1;\ \Delta x = 0{,}1;\ 2 \leqslant n \leqslant 5;\ \Delta n = 1.$$

При помощи этой таблицы определить y при $x = 0{,}382$; $n = 2{,}67$ и $x = 0{,}417$; $n = 3{,}2$ и результаты проверить по таблице логарифмов.

6. Составить четырехзначную таблицу для определения показателя преломления света в прозрачной среде

$$\nu = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ при } 0 \leqslant \alpha \leqslant 90°;\ 0 \leqslant \beta \leqslant 90°;\ \Delta\alpha = \Delta\beta = 10°,$$

где α — угол падения луча в воздухе, β — угол переломления.

* Отметим, что степень аппроксимирующего полинома существенно зависит не только от рассматриваемой функции, но и от шага таблиц, так как при уменьшении h в 2 раза первые разности также уменьшаются в 2 раза, вторые — в 4 и k-е — в 2^k раз. Следовательно, если мы рассматриваем функцию на достаточном удалении от ее особых точек, то для заданного промежутка всегда можно найти такой достаточно малый шаг h, чтобы аппроксимирующий полином не превышал наперед заданную степень n. В окрестности особых точек функцию проще всего исследовать при помощи рядов. К этим вопросам мы вернемся в гл. X.

7. Составить пятизначную таблицу для определения среднего геометрического

$$c = \sqrt{ab} \text{ при } 1 \leqslant a \leqslant 10;\ 1 \leqslant b \leqslant 10;\ \Delta a = \Delta b = 1.$$

8. Составить пятизначную таблицу перехода от декартовых координат к полярным (отдельно для ρ и φ)

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 \pm y^2};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

при таких исходных данных: $0 \leqslant x \leqslant 10;\ 0 \leqslant y \leqslant 10;\ \Delta x = \Delta y = 1$.

9. Составить для сегмента [1; 3] с шагом $h = 0{,}2$ шестизначную таблицу функции

$$y = x^3 - 3{,}7485x^2 \pm 2{,}0672x - 0{,}8349,$$

а потом интерполированием найти несколько промежуточных значений (например при $x = 1{,}27548$; $x = 1{,}87231$; $x = 2{,}54702$) и проверить точность результатов непосредственным вычислением по заданной формуле.

Указание. Необходимо вычислить только первые четыре значения функции и составить для них таблицу разностей, так как заданная функция есть полином третьей степени, для которого $\Delta^3 y = \text{const}$.

10. Найти и устранить все опечатки, которые имеются в табл. 55 § 83.

Глава VII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

Одной из важнейших и наиболее распространенных задач прикладной математики является задача определения корней алгебраических или трансцендентных уравнений и их систем. Эта задача в настоящее время эффективно решена только в случае одного уравнения с действительными или комплексными коэффициентами. Что же касается систем таких уравнений (особенно в комплексной области), то этот вопрос в литературе освещен совершенно недостаточно. Поэтому после ознакомления с наиболее распространенными методами решения одного уравнения основное внимание уделим методу вариации параметра, который дает удовлетворительные результаты при решении систем алгебраических или трансцендентных уравнений, если число уравнений, входящих в систему, не превышает десяти.

§ 84. Численное решение уравнений с одним неизвестным. Графический метод отделения корней

В данном параграфе и в параграфах 85—87 этой главы рассматриваются методы приближенного вычисления действительных корней алгебраического или трансцендентного уравнения

$$f(x) = 0 \qquad \text{(VII.1)}$$

на заданном сегменте $[a, b]$. Относительно функции $f(x)$ будем предполагать, что она есть любая кусочно-непрерывная функция действительного аргумента, которая на $[a, b]$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную. Вопросы определения комплексных корней для функций действительного или комплексного переменного $f(z)$ рассмотрены в § 90.

Уравнение (VII.1) называется *алгебраическим*, если заданная функция есть полином n-й степени:

$$f(x) = P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0;\ a_0 \neq 0. \qquad \text{(VII.2)}$$

Требование $a_0 \neq 0$ обязательно, так как при $a_0 = 0$ степень полинома $P(x)$ будет более низкой, чем n.

Всякое неалгебраическое уравнение (VII.1) называется *трансцендентным*, например,

$$5e^x - 7x^2 + 15 = 0;\quad x - \operatorname{tg} x = 0.$$

В число алгебраических уравнений, строго говоря, надо включить и те уравнения, которые путем алгебраических преобразований могут быть сведены к виду (VII.2), например,

$$3 + \sqrt[5]{2 + 7x^2} = \sqrt{x - 1} - 0{,}3x^2 + 6x.$$

Однако этого не всегда придерживаются, и такого рода уравнения обычно условно относят к трансцендентным уравнениям.

Алгебраические и трансцендентные уравнения получили общее название *конечных уравнений*, в отличие от дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и других.

Задача решения уравнения (VII.1) совпадает с задачей определения корней (или нулей) функции $f(x)$.

Число $x = \xi$ называется *корнем функции* $f(x)$, если $f(\xi) \equiv 0$.

Число ξ называется *корнем k-й кратности*, если при $x = \xi$ вместе с функцией обращаются в нуль и все производные до порядка $k - 1$ включительно:

$$f(\xi) = f'(\xi) = \cdots = f^{(k-1)}(\xi) = 0,\ \text{но}\ f^{(k)}(\xi) \neq 0.$$

Часто говорят, что функция имеет «k совпадающих корней». Если $k = 1$, корень называют *простым*.

При определении приближенных значений корней уравнения (VII.1) необходимо решить две задачи, а именно, необходимо осуществить:

1) *отделение корней*, т. е. определение достаточно малых промежутков, в каждом из которых заключен один и только один корень уравнения (простой или кратный);

2) *уточнение корней* с наперед заданным числом верных знаков.

При условии $f'(\xi) \neq 0$ задача отделения корня $x = \xi$ всегда возможна. Отделение корней можно производить графически и аналитически.

При *графическом отделении корней* уравнения (VII.1) надо это уравнение преобразовать к виду

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \tag{VII.3}$$

и построить графики функций

$$y_1 = \varphi_1(x); \quad y_2 = \varphi_2(x).$$

Действительно, корнями уравнения (VII.1)

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$$

являются абсциссы точек пересечения этих графиков (и только они).

Из всех способов, какими можно уравнение (VII.1) преобразовать к виду (VII.3), выбираем тот, который обеспечивает наиболее простое построение графиков $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$. В частности, можно взять $\varphi_2(x) = 0$ и тогда придем к построению графика функции

$$y = f(x),$$

точки пересечения (или касания) которого с прямой $y_2 = \varphi_2(x) = 0$, т. е. с осью абсцисс, и есть искомые корни уравнения $f(x) = 0$.

В общем случае при построении графиков

$$y_1 = \varphi_1(x) \text{ и } y_2 = \varphi_2(x) \tag{VII.4}$$

следует прежде всего выявить поведение каждой из функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ при $x \to -\infty$, и $x \to +\infty$, найти значения x, при которых $\varphi_j(x) = \infty$ $(j = 1; 2)$, определить точки пересечения этих функций с осями x и y и вычислить ряд промежуточных, наиболее характерных их значений, начиная со значений $\varphi_j(x)$ для $x = \pm 1$, при которых обычно проще всего вычисляются значения любой функции. Полезно также, если это не требует значительных вычислений, определить (хотя бы очень грубо) точки минимума и максимума функций (VII.4).

Пример 1. Отделить действительные корни уравнения

$$3(\sin x + 1) - 2x = 0. \tag{VII.5}$$

Решение. Записав данное уравнение в виде

$$\sin x = \frac{2}{3}x - 1,$$

построим графики* синусоиды $y_1 = \sin x$ и прямой $y_2 = \frac{2}{3}x - 1$. Точка пересечения этих графиков дает приближенное значение корня

$$x = \xi \approx 2{,}45,$$

который для данного уравнения будет единственным корнем, так как других точек пересечения линий $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$ нет (рис. 200).

* Эти графики удобнее всего строить на миллиметровой бумаге, что одновременно обеспечивает и более высокую точность результатов.

Пример 2. Отделить действительные корни уравнения

$$\frac{x+1}{x-1} - \sin x = 0. \qquad \text{(VII.6)}$$

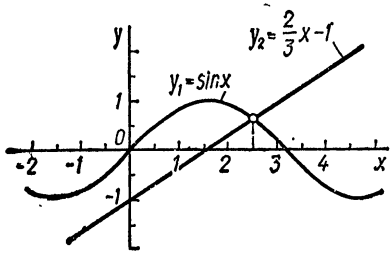


Рис. 200.

Решение. Представив уравнение (VII.6) в виде

$$\sin x = \frac{x+1}{x-1},$$

строим графики

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \frac{x+1}{x-1},$$

абсциссы точек пересечения которых и определяют собой все действительные корни исходного уравнения (рис. 201). В данном случае все корни отрицательные, так как правая ветвь гиперболы $y_2 = \frac{x+1}{x-1}$ нигде не пересекает синусоиду $y_1 = \sin x$. Хотя количество корней бесконечно, все они изолированы, так как только один

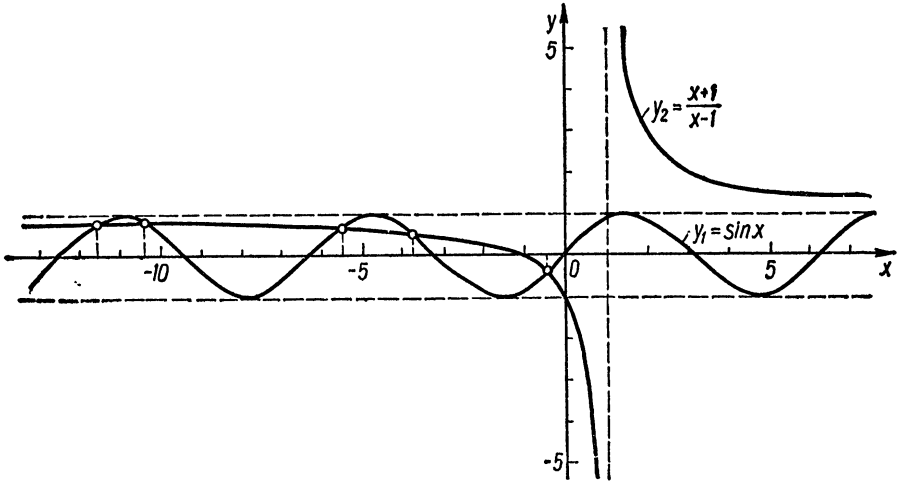


Рис. 201.

корень встречается в каждом из промежутков $\left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{3}{2}\pi\right)$, ..., $\left(\frac{1-2k}{2}\pi; \frac{-1-2k}{2}\pi\right)$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Таким образом, задача отделения корней для уравнения (VII.6) полностью решена.

Из *аналитических методов отделения корней* укажем только на два общих метода, которые одинаково пригодны как для алгебраических, так и для трансцендентных уравнений. Один из них — нахождение более простого уравнения, которое имеет корни, приблизительно равные искомым корням данного уравнения. Это часто можно сделать, пренебрегая в данном уравнении малыми членами. При втором методе используются следующие теоремы, непосредственно вытекающие из известных свойств непрерывных функций.

Теорема 1. *Если функция действительного аргумента $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на его концах значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют противоположные знаки, то между точками a и b имеется хотя бы один действительный корень уравнения $f(x) = 0$.* Если при этом $f(x)$ имеет первую производную, не меняющую знака на $[a, b]$, т. е. если $f(x)$ на $[a, b]$ изменяется монотонно, то корень единственный.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ есть аналитическая функция переменного x на сегменте $[a, b]$; если на концах $[a, b]$ она принимает значения разных знаков, то между точками a и b имеется нечетное число корней уравнения $f(x) = 0$; если же на концах $[a, b]$ она принимает значения одинаковых знаков, то между a и b или нет действительных корней этого уравнения, или имеется четное число их (учитывая и кратность корней).*

Число корней у трансцендентного уравнения может быть произвольным. Например, уравнение (VII.6) имеет бесконечно много действительных корней, уравнение (VII.5) — только один действительный корень, уравнение $\sin z = 2$ не имеет ни одного действительного корня, но имеет бесконечно много комплексных корней, а уравнение $5^z = 0$ при действительном или комплексном z не имеет ни одного ни действительного ни комплексного корня.

Алгебраическое уравнение n-й степени (VII.2) всегда имеет точно n корней (действительных или комплексных), что непосредственно вытекает из теоремы, наиболее строгое и полное доказательство которой принадлежит Карлу Фридриху Гауссу (Carl Friedrich Gauß, 1777—1855).

Теорема Гаусса. *Полином степени n имеет точно n действительных или комплексных корней, если каждый k-кратный корень считать k раз.*

При решении алгебраических уравнений важное значение имеет также теорема Этьена Безу (Étienne Bezout, 1730—1783).

Теорема Безу. *Остаток от деления полинома $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$, т. е. значению этого полинома при $x = a$.*

В частности, если число a есть корень полинома $P(x)$, то остаток $P(a)$ равен нулю и, следовательно, полином нацело делится на $(x - a)$. Если найден один корень алгебраического уравнения, то это позволяет понизить степень уравнения. Действительно, если $x = a$ — корень исходного уравнения, то $P(a) = 0$, и согласно теореме Безу полином $P(x)$ разделится на $(x - a)$ без остатка:

$$P(x) = (x - a)\,Q(x).$$

Остальные корни $P(x)$ являются, очевидно, корнями $Q(x)$, и задача сводится, таким образом, к решению уравнения

$$Q(x) = 0,$$

степень которого на единицу ниже степени исходного уравнения $P(x) = 0$.

Отметим, что теорема Безу остается справедливой и в комплексной области. В частности, если все коэффициенты полинома $P(x)$ суть действительные числа, то, как известно, корни уравнения $P(x) = 0$ могут быть только действительными или комплексно сопряженными. В таком случае, найдя два комплексно сопряженных корня

$$a = \alpha + i\beta \text{ и } \bar{a} = \alpha - i\beta,$$

мы можем степень уравнения $P(x) = 0$ сразу понизить на две единицы, разделив $P(x)$ на произведение двучленов

$$(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 - (a + \bar{a})x + a\bar{a} = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2),$$

все коэффициенты которого суть действительные числа, так что и частное $Q(x)$ будет также иметь действительные коэффициенты.

Число действительных корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0;\ a_0 \neq 0 \qquad \text{(VII.7)}$$

равно или на четное число меньше степени уравнения.

Теорема Декарта (René Descartes, 1596—1650). *Число положительных корней равно (или на четное число меньше) числу перемен знака в ряду коэффициентов уравнения.*

Число отрицательных корней можно оценить, произведя замену $x = -y$.

Если в уравнении (VII.7) $a_0 > 0$ (а этого всегда можно достичь, поменяв при отрицательном a_0 все знаки в левой части уравнения), то его действительные корни удовлетворяют неравенству, установленному Колином Маклореном (Colin MacLaurin, 1698—1746):

$$x < 1 + \sqrt[m]{\frac{A}{a_0}}, \qquad \text{(VII.8)}$$

где m — индекс первого отрицательного коэффициента в ряду $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$; A — максимальный из модулей отрицательных коэффициентов.

Эта же оценка позволяет установить и нижнюю границу корней.

Для этого следует сделать замену $x = -y$ и умножить полученное уравнение на $(-1)^n$, для того чтобы старший коэффициент остался положительным, после чего снова воспользоваться формулой (VII.8).

Пример 3. Исследовать уравнение

$$2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 2 = 0. \qquad \text{(VII.9)}$$

Решение. Уравнение (VII.9) имеет нечетное число действительных корней, но не больше девяти. Число перемен знаков в ряду его коэффициентов равно четырем, поэтому согласно теореме Декарта положительных корней может быть четыре, два или ни одного.

Выполнив замену $x = -y$ и поменяв все знаки на обратные, получаем

$$2y^9 + y^7 + y^4 + 19y^3 + 24y^2 - 2 = 0, \qquad \text{(VII.9')}$$

поэтому в исходном уравнении (VII.9) есть только один отрицательный корень.

Границы действительных корней найдем, воспользовавшись неравенством Маклорена (VII.8)

Для исходного уравнения (VII.9), учтя, что $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 = -1$, имеем $m = 5$; $A = 24$; $a_0 = 2$, следовательно, все его положительные корни удовлетворяют неравенству

$$x < 1 + \sqrt[5]{\frac{24}{2}} = 1 + \sqrt[5]{12} \approx 2{,}6.$$

Аналогично, для преобразованного уравнения (VII.9'), у которого знак изменяет только свободный член $a_9 = -2$, получаем

$$y < 1 + \sqrt[9]{\frac{2}{2}} = 2,$$

откуда $x = -y > -2$. Таким образом, корни исходного уравнения лежат в интервале

$$-2{,}0 < x < +2{,}6.$$

Результаты проведенного исследования легко проверить непосредственно, построив график рассматриваемого полинома (рис. 202)

$$Y = P(x) = 2x^9 + x^7 - x^4 + 19x^3 - 24x^2 + 2,$$

а более точные значения минимального и максимального действительных корней равны:

$$x_1 = -0{,}262364; \quad x_3 = +1{,}029626.$$

При исследовании алгебраических уравнений также полезно иметь в виду следующую их особенность. Наличие на графике полинома $Y = P(x)$ каждого

минимума, при котором $P(x)$ положительно, и каждого максимума с отрицательным значением $P(x)$ свидетельствует о наличии у этого полинома пары комплексных корней. Так, полином, график которого изображен на рис. 203, имеет, по крайней мере, три пары комплексных корней, о чем свидетельствует форма графика полинома в окрестности точек A, B, C.

Данные условия не принадлежат к необходимым условиям, а являются только достаточными. Поэтому, например, уравнение (VII.9) имеет три пары комплексных корней, в то время как график, представленный на рис. 202, не имеет ни одной точки рассматриваемых типов.

Теория алгебраических уравнений в настоящее время разработана значительно полнее теории уравнений трансцендентных. Поэтому трансцендентные уравнения часто пытаются свести к уравнениям алгебраическим. В частности, это можно сделать, разложив левую часть заданного трансцендентного уравнения

$$f(x) = 0 \qquad \text{(VII.10)}$$

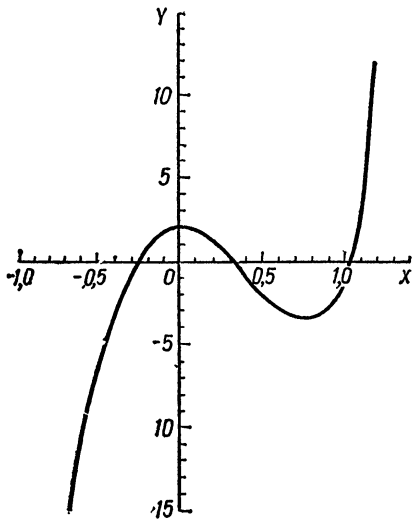


Рис. 202.

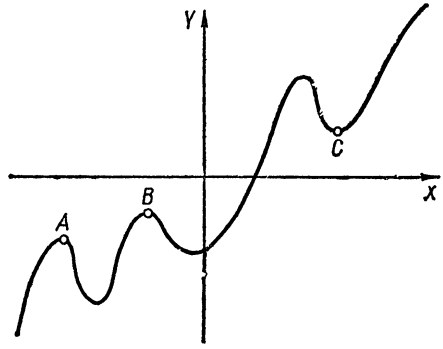


Рис. 203.

в степенной ряд*

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots, \qquad \text{(VII.11)}$$

где

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0); \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим последовательность алгебраических уравнений, получающихся, если приравнять нулю частичные суммы ряда (VII.11):

$$\begin{gathered} c_0 + c_1 x = 0; \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 = 0; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n = 0. \end{gathered} \qquad \text{(VII.12)}$$

Пусть ξ_1 — корень первого из этих уравнений, ξ_2 — один из корней второго уравнения, ξ_n — один из корней n-го уравнения. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ сходится и предел этой последовательности ξ принадлежит области, в которой ряд (VII.11) сходится к функции $f(\xi)$, то число ξ является корнем уравнения $f(x) = 0$.*

* Необходимые сведения о рядах приведены в гл. VIII.

Из этой теоремы, доказательство которой опускаем, следует, что вместо уравнения (VII.10) можно попытаться решить несколько уравнений последовательности (VII.12). Если среди найденных корней окажутся близкие, то их можно принять в качестве приближенных значений корней заданного трансцендентного уравнения.

Обычно таким путем удается найти один или несколько наименьших по модулю корней. В принципе безразлично, каким методом решаются полученные алгебраические уравнения, однако наиболее пригодны для этого, по-видимому, методы Лобачевского и Бернулли.

Методика решения алгебраических уравнений хорошо изложена в книге [40, гл. II и III], из которой мы, в частности, заимствовали (с незначительными изменениями) пример 3. Более подробное изложение всех вопросов, рассматриваемых в данной главе, читатель найдет в книгах [6, 7, 13, 31, 34, 60, 65, 72, 73, 83, 85, 93, 94, 108, 118, 124, 143, 144, 146, 154, 179, 180, 181, 184, 188, 190], в которых приведена также дальнейшая библиография.

После того как исследование уравнения (VII.1) закончено и для каждого действительного корня ξ установлен интервал, в котором этот корень находится, переходим к решению второй задачи — к уточнению найденных корней.

Отделение корня ξ, т. е. установление двойного неравенства

$$a<\xi<b,$$

само по себе уже дает возможность получить его грубое приближенное значение, в качестве которого можно взять, например, центр интервала (a, b):

$$\xi_1=\frac{a+b}{2}.$$

При этом абсолютная погрешность будет меньше числа

$$\varepsilon<\frac{|a-b|}{2}.$$

Подставив найденное ξ_1 в уравнение (VII.1) и убедившись, что оно не обеспечивает требуемую точность, принимаем $f(\xi_1)=a_1$ или $f(\xi_1)=b_1$ и в результате приходим к одному из следующих, более точных неравенств:

$$a_1<\xi<b \text{ или } a<\xi<b_1,$$

так что, продолжая этот процесс, можем произвести уточнение корня с любой наперед заданной степенью точности.

Однако существуют другие, более эффективные методы уточнения корней, наиболее распространенные из которых рассмотрим в § 85—87.

§ 85. Метод Ньютона, или метод касательных

Метод Ньютона, или метод касательных, принадлежит к одному из наиболее часто употребляемых в настоящее время методов уточнения корней, в одинаковой мере пригодных как для алгебраических, так и для трансцендентных уравнений *.

Пусть PAQ — дуга кривой $y=f(x)$ (рис. 204), которая пересекает ось Ox в точке A, так что абсцисса $x=\xi$ точки A есть корень уравнения (VII.1)

$$f(x)=0.$$

Допустим, что дуга AP обращена выпуклостью к оси Ox.

Проведем через точку P с координатами $(x_0;\ y_0=f(x_0))$ касательную к кривой $y=f(x)$. Угловой коэффициент касательной равняется значению производной от

* Этот метод, по сути, был найден Рефсоном в 1690 г., однако раньше, в 1685 г., Ньютон предложил метод, подобный данному, поэтому его называют также методом Ньютона — Рефсона.

функции $f(x)$ в точке касания; $k = f'(x_0)$; следовательно, уравнение касательной, которая проходит через точку $P(x_0, y_0)$, будет

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad \text{(VII 13)}$$

Отсюда, положив в (VII.13) $y = 0$, $y_0 = f(x_0)$, находим точку пересечения касательной с осью абсцисс ($y = 0$), которую обозначим через x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Через точку $P_1(x_1; y_1 = f(x_1))$ снова проводим касательную и, продолжая этот процесс, приходим к формуле Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{(VII.14)}$$

которая дает возможность шаг за шагом вычислять все более точные значения корня. Другими словами, значения $x_0, x_1, x_2, \ldots$, вычисленные по формуле (VII.14), образуют последовательность, которая стремится к значению корня уравнения $f(x) = 0$.

Если мы начнем процесс, исходя из точки Q, в которой кривая обращена к оси Ox вогнутостью, то первый же шаг приведет на другую сторону от оси Ox, где кривая обращена к ней выпуклостью, так что в дальнейшем будем приближаться к значению корня так же, как и прежде.

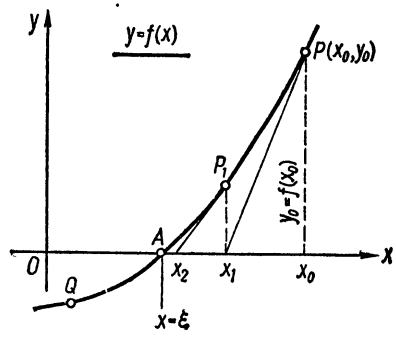


Рис. 204.

В тех случаях, когда вычисление второй производной для функции $f(x)$ не ведет к существенным усложнениям, можно указать критерий, который поможет непосредственно проверить правильность выбора начального значения x_0. Действительно, так как кривая $y = f(x)$ обращена выпуклостью к оси Ox в тех точках, для которых выполняется соотношение

$$f(x) \cdot f''(x) > 0, \qquad \text{(VII.15)}$$

то этому условию и должно удовлетворять выбранное начальное значение x_0.

Пример 1. Вычислить наименьший положительный корень уравнения

$$e^x - 3x = 0 \text{ (где } e = 2{,}71828\ldots)$$

с четырьмя десятичными знаками.

Решение. Для того чтобы разделить корни, приведем заданное уравнение к виду

$$e^x = 3x$$

и построим графики функций (рис. 205)

$$y_1 = e^x \text{ и } y_2 = 3x$$

причем масштабы по осям Ox и Oy могут быть разными.

Согласно рис. 205 наименьший положительный корень лежит в интервале (0; 1). Переходим к его уточнению. В данном примере имеем

$$f(x) = e^x - 3x; \quad f'(x) = e^x - 3; \quad f''(x) = e^x,$$

и формула (VII.14) принимает следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n, \text{ где } \alpha_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad \text{(VII.14')}$$

Из двух возможных значений $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$ мы должны выбрать первое, так как согласно критерию (VII.15)

$$f(x) f''(x)|_{x=0} = (e^x - 3x) e^x|_{x=0} = 1 > 0,$$

в то время как

$$f(x) f''(x)|_{x=1} = (e^x - 3x) e^x|_{x=1} = (e - 3) e < 0.$$

Таблица 57

n	$x = x_n$	e^x	$3x$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	a_n
0	0,0	1,0	0,0	1,0	—2,0	—0,5
1	0,5	1,65	1,50	0,15	—1,35	—0,11
2	0,61	1,8404	1,8300	0,0104	—1,16	—0,0090
3	0,6190	1,8571	1,8570	0,0001	—1,14	—0,000088
4	0,61909	1,8573	1,8573	0,0000	—	—

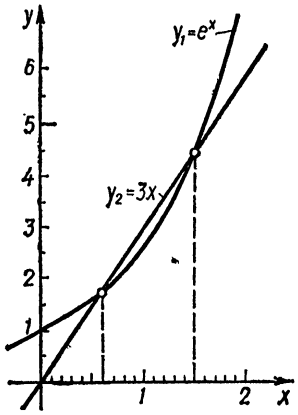


Рис. 205.

Все последующие приближения*, вычисленные по формуле (VII.14′), приведены в табл. 57. Значения e^x можно найти, например, в таблицах [136] или в табл. II, помещенной в приложении к данной книге.

Таким образом, искомый корень с необходимой нам точностью есть

$$x = 0{,}6191.$$

Выполнив еще один шаг вычислений, получаем более точное значение этого корня:

$$x = 0{,}61906129.$$

Упражнения

1. Выполнить эти же вычисления, взяв $x_0 = 1$.
2. Вычислить с этой же точностью второй корень уравнения $e^x - 3x = 0$, который согласно рис. 205 лежит в интервале (1; 2).

Подведем итоги. При вычислении простого корня уравнения

$$f(x) = 0$$

по методу Ньютона процесс последовательных приближений всегда сходится, если нулевое приближение x_0 взято настолько близко к корню $x = \xi$, что на сегменте $[\xi, x_0]$:

1) наклон кривой $y = f(x)$ не равняется нулю, т. е.

$$f'(x) \neq 0;$$

2) кривая $y = f(x)$ не имеет точек перегиба, т. е.

$$f''(x) \neq 0.$$

Практически это означает, что по формуле (VII.14) корень уравнения $f(x) = 0$ можно вычислить с любой, сколь угодно высокой степенью точности, если только

* В этом примере производную $f'(x)$ достаточно вычислить с тремя значащими цифрами, так как большая точность здесь не нужна.

корень $x = \xi$ не есть кратный (т. е. $f'(\xi) \neq 0$) и если нулевое приближение x_0 взято достаточно близко к искомому корню ξ.

Кратные корни можно также находить по формуле Ньютона, как соответствующие корни уравнения

$$f'(x) = 0,$$

или, в более общем случае,

$$f^{(k)}(x) = 0; \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Для того чтобы лучше понять приведенные выше требования, обратимся к рис. 206.

На сегменте $[\xi, x_0]$ условия 1) и 2) нарушены, и мы видим, что касательная, проведенная через точку P_0, приводит к значению x_1, расстояние которого от корня $x = \xi$ больше, чем для исходного x_0. Следующий шаг приводит к значению $x_2 \to \infty$, так как касательная в точке P_1 параллельна оси Ox.

Однако хотя и на сегменте $\left[\xi, x_0^*\right]$ также нарушены оба условия, но касательная в точке P_0^* приводит к такому значению x_1^*, для которого на новом сегменте $\left[\xi, x_1^*\right]$ все условия уже удовлетворяются. Продолжая процесс в этом случае, мы имеем возможность вычислить корень с какой угодно точностью.

Таким образом, условия 1) и 2) являются не необходимыми, а только достаточными.

Практически в тех случаях, когда бывает трудно исследовать функцию $f(x)$ и ее первые две производные (а именно этот случай и является типичным), можно непосредственно вычислить одно-два приближения по формуле (VII.14), исходя из x_0, найденного графическим путем. Найденные результаты и покажут, стоим ли мы на правильном пути.

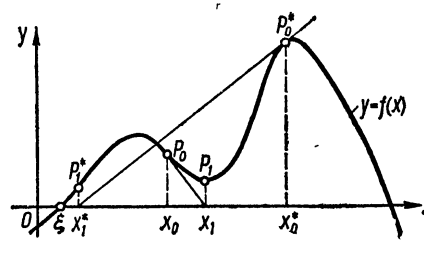


Рис. 206.

Установим связь между погрешностями n-го и $(n+1)$-го шага. Согласно формуле Тейлора * имеем

$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(\xi - x_n)^2,$$

где точка c_n лежит между x_n и ξ.

Так как $f(\xi) = 0$, то отсюда получаем

$$\xi - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2.$$

Но согласно формуле (VII.14)

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}.$$

Следовательно,

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (\xi - x_n)^2,$$

откуда и находим интересующую нас оценку:

$$|\xi - x_{n+1}| \leqslant \frac{M}{2|f'(x_n)|} (\xi - x_n)^2, \qquad \text{(VII.16)}$$

где M — наибольшее значение $|f''(x)|$ в рассматриваемой окрестности корня ξ.

* О ряде Тейлора будет сказано более подробно в § 98 гл. VIII. Формулу Тейлора получим, если в ряде Тейлора отбрасываемые члены заменим остатком ряда $R_n(x)$.

Оценка (VII.16) показывает, что при вычислении корня по методу Ньютона погрешность каждого нового приближения уменьшается пропорционально квадрату погрешности предыдущего приближения. Таким образом, в тех случаях, когда в рассматриваемой окрестности искомого корня величина $\frac{M}{|f'(x_n)|}$ не слишком велика, можно считать, что каждое новое приближение удваивает число верных десятичных знаков, и тогда каждое новое приближение надо вычислять с числом десятичных знаков вдвое большим, чем число верных десятичных знаков в предыдущем приближении. Если же величина $\frac{M}{|f'(x_n)|}$ велика, то сходимость метода Ньютона будет медленной, и в этом случае лучше воспользоваться каким-либо другим методом, например методом линейной аппроксимации, который рассмотрим в следующем параграфе.

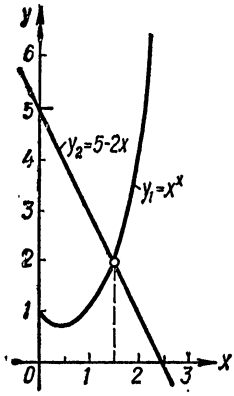


Рис. 207.

Так как число верных знаков, полученных в n-м шаге, остается неизвестным, пока не выполнен следующий шаг, то представление об истинном значении величины $\frac{M}{|f'(x_n)|}$ в каждом конкретном примере можно получить, проанализировав рост числа верных знаков в двух-трех предыдущих шагах. Если в предыдущих шагах число верных знаков с ростом n примерно удваивалось, то это практически подтверждает, что величина $\frac{M}{|f'(x_n)|}$ достаточно мала и метод Ньютона целесообразно применять.

Пример 2. Найти с семью значащими цифрами положительный корень уравнения

$$x^x + 2x - 5 = 0.$$

Решение. Представим данное уравнение в виде

$$x^x = 5 - 2x$$

и построим графики функций $y_1 = x^x$, $y_2 = 5 - 2x$. Тогда согласно рис. 207 находим $x_0 = 1{,}5$. Далее, в рассматриваемом примере имеем

$$f(x) = x^x + 2x - 5; \quad f'(x) = x^x(1 + \ln x) + 2$$

и при помощи формулы (VII.14′) после трех шагов получаем с необходимой точностью $x = 1{,}534889$.

Таблица 58

n	$x = x_n$	$2x - 5$	x^x	$f(x_n)$	$1 + \ln x$	$f'(x_n)$	α_n
0	1,5	—2,00	1,84	—0,16	1,41	4,6	—0,035
1	1,535	—1,93000	1,93053	0,00053	1,429	4,759	0,000111
2	1,534889	—1,930222	1,930223	0,000001	1,43	4,76	0,0000002

Все вычисления приведены в табл. 58. При этом величину $z = x^x$ вычисляем, пользуясь семизначными таблицами логарифмов [14]. Величину $\lg x = \log_{10} x$, которую устанавливаем на арифмометре при вычислении $\lg z = x \lg x$, используем и при вычислении

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \text{ где } \frac{1}{M} = 2{,}3026 \ldots .$$

Значение $f'(x)$, а следовательно, и $1 + \ln x$, достаточно вычислять с четырьмя значащими цифрами.

Анализ роста числа верных знаков с увеличением n показывает, что сходимость метода Ньютона в данном примере вполне удовлетворительная.

Замечание. Для того чтобы сократить объем вычислений в методе Ньютона, можно, начиная с некоторого n, не вычислять $f'(x_n)$, а все время пользоваться одним из предыдущих значений, например $f'(x_0)$ или $f'(x_1)$. В результате будем приближаться к корню при помощи хорд, параллельных касательной в выбранном нами шаге, а не самих касательных. Практически это приводит не больше чем к одному лишнему шагу, что во многих случаях требует меньше времени, чем вычисление производных для всех шагов.

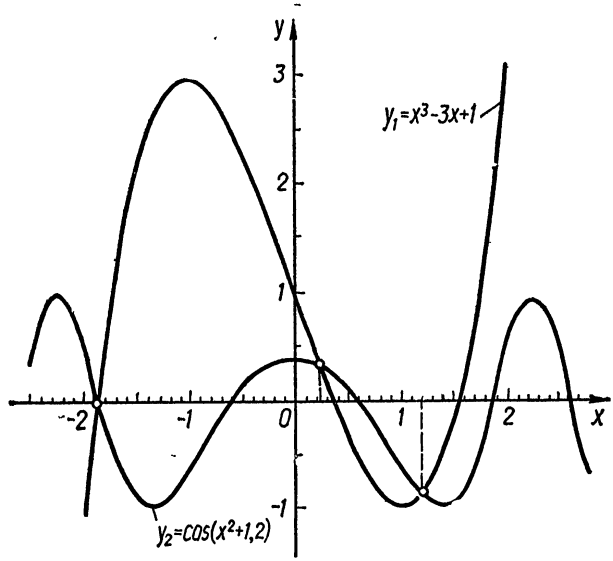


Рис. 208.

Пример 3. Определить с шестью десятичными знаками все корни уравнения

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 - \cos(x^2 + 1,2) = 0.$$

Решение. Построив (лучше всего на миллиметровой бумаге) графики функций

$$y_1 = x^3 - 3x + 1 \quad \text{и} \quad y_2 = \cos(x^2 + 1,2),$$

находим в нулевом приближении значения искомых корней как точки пересечения этих графиков (рис. 208):

$$x = -1,85; \quad x = +0,24; \quad x = +1,20.$$

Подставив найденные значения в формулу (VII.14'), после двух приближений определяем корни с заданной точностью:

$$x = -1,877649; \quad x = +0,234003; \quad x = +1,198050.$$

Все вычисления, необходимые для уточнения положительных корней, приведены в табл. 59, а уточнение отрицательного корня читателю полезно выполнить в виде упражнения, учтя, что в данном примере

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 - \cos(x^2 + 1,2);$$
$$f'(x) = 3(x^2 - 1) + 2x \sin(x^2 + 1,2).$$

Таблица 59

n	$x_n = x$	x^2	x^3	$x^3 - 3x + 1$	$(x^2 + 1{,}2)$	$\cos(\ )$	$\sin(\ )$	$2x \sin(\ )$	$f(x)$	$f'(x)$	α_n
0	0,240000	0,057600	0,013824	+0,293824	1,257600	+0,308101	+0,951354	+0,456650	−0,014277	−2,370550	+0,006023
1	0,233977	0,054745	0,012809	+0,310878	1,254745	+0,310816	—	—	+0,000062	−2,370550	−0,000026
2	0,234003	0,054757	0,012813	+0,310804	1,254757	+0,310805	—	—	−0,000001		
0	1,200000	1,440000	1,728000	−0,872000	2,640000	−0,876818	+0,480823	+1,153975	+0,004818	+2,473975	+0,001947
1	1,198053	1,435331	1,719603	−0,874556	2,635331	−0,874563	—	—	+0,000007	+2,473975	+0,000003
2	1,198050	1,435324	1,719590	−0,874560	2,635324	−0,874560	—	—	0,000000		

В соответствии с приведенным выше замечанием в табл. 59 при $n = 1$ мы не стали вычислять более точное значение $f'(x_1)$, а воспользовались исходным значением $f'(x_0)$, т. е. приняли, что

$$f'(x_1) \approx f'(x_0).$$

В заключение подчеркнем еще раз, что метод Ньютона дает одинаково хорошие результаты и для алгебраических и для трансцендентных уравнений. При этом его можно использовать для отыскания как действительных, так и комплексных корней, поскольку формула (VII.14) остается справедливой и в комплексной области. Однако когда уравнение $f(x) = 0$ имеет действительные коэффициенты, то его комплексные корни попарно сопряжены и итерации не будут сходиться к комплексному корню, если только значение x_0 само не является комплексным.

Поэтому в случае действительной функции $f(x)$ при определении комплексных корней и начальное приближение x_0 необходимо брать комплексным числом, достаточно близким к искомому корню; тогда последующие приближения (или, как их чаще называют, итерации) будут сходиться к этому корню. Другой, более эффективный метод решения уравнений в комплексной области рассмотрим в § 90.

Упражнения

3. Повторить пример 1, положив, что

$$f'(x_n) \approx f'(x_1) \text{ при } n \geqslant 2.$$

4. Определить с шестью десятичными знаками все корни уравнения

$$f(x) = \left(\frac{3}{7}x - 0{,}3\right) - \cos(x^2 + 1{,}2) = 0.$$

Указание. Нулевое приближение корней можно найти, определив абсциссы пересечения прямой $y_1 = \frac{3}{7}x - 0{,}3$ и кривой $y_2 = \cos(x^2 + 1{,}2)$, для чего достаточно на рис. 208 провести прямую, проходящую через точки $(x = 0;\ y = -0{,}3)$ и $(x = +0{,}7;\ y = 0)$.

5. Определить с той же точностью корень уравнения $f(x) = \left(\frac{4}{5}x - 2\right) + \operatorname{sh} x = 0$ и показать, что это уравнение имеет только один действительный корень.

Указание. Найдите точку пересечения прямой $y_1 = \frac{4}{5}x - 2$ и кривой $y_2 = -\operatorname{sh} x$. Необходимые значения гиперболического синуса можно взять из табл. II приложения.

§ 86. Метод линейной аппроксимации, или метод хорд

Простой корень уравнения

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — алгебраическая или трансцендентная функция, можно найти при помощи метода хорд *.

Для этого находим графическим способом два значения x_1 и x_2, для которых функция $f(x)$ имеет различные знаки, например,

$$f(x_1) > 0; \quad f(x_2) < 0,$$

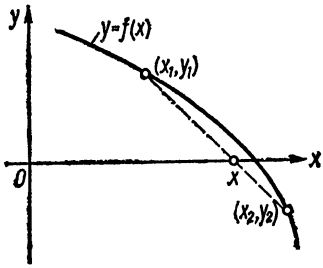


Рис. 209.

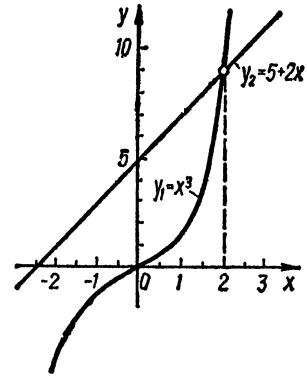


Рис. 210.

и проводим через точки $[x_1,\ y_1 = f(x_1)]$; $[x_2,\ y_2 = f(x_2)]$ прямую линию

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Положив $y = 0$, найдем точку x, как точку пересечения хорды с осью абсцисс, которая и дает приближенное значение корня (рис. 209):

$$x = x_1 - \frac{y_1 (x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_2 - y_1},$$

или

$$x = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}. \qquad \text{(VII.17)}$$

Определим, какой знак имеет функция $f(x)$ в найденной точке x, и в соответствии с этим заменим в формуле (VII.17) x_1 или x_2 новым, более точным значением x. Повторив вычисления по формуле (VII.17), получим второе приближение корня. Продолжая этот процесс, можно вычислить корень $x = \xi$ заданного уравнения $f(x) = 0$ с какой угодно точностью.

Название данного метода обусловлено тем, что при определении корня в каждом шаге участок дуги истинной кривой $y = f(x)$ заменяют ее хордой.

* Этот метод имеет еще латинское название *regula falsi*, что означает «правило ложного положения».

Пример. Вычислить методом хорд с пятью десятичными знаками действительный корень уравнения *

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Решение. Построение, выполненное на рис. 210, дает возможность выбрать два исходных значения, необходимых для метода хорд: $x_1 = 2{,}2$ и $x_2 = 2{,}0$. Воспользовавшись формулой (VII.17), находим шаг за шагом корень с необходимой точностью. При этом в данном примере $x_1 = 2{,}200000$ имеет фиксированное значение, а x_2 уточняем в каждом последующем шаге. Числа x_1 и $f(x_1) = 1{,}248$, которые используются во всех последующих шагах, можно считать точными и брать в них столько десятичных знаков, сколько требуется в данном шаге.

Все необходимые вычисления приведены в табл. 60, согласно которой находим с заданной точностью $x = 2{,}09455$.

Таблица 60

n	x_n	$\overset{3}{x_n}$	$f(x_n)$	$f(x_1)-f(x_n)$
1	2,2	10,648	+1,248	—
2	2,0	8,000	—1,000	2,248
3	2,09	9,129	—0,051	1,299
4	2,0943	9,18579	—0,00281	1,25081
5	2,09453	9,188820	—0,000240	1,248240
6	2,094550	9,189084	—0,000016	—

Упражнение. Решить этот же пример при помощи метода Ньютона, положив $x_0 = 2{,}2$.

Выполняя данное упражнение, легко заметить, что метод касательных все время дает значения корня с превышением, в то время как метод хорд дает их с недостачей. Поэтому, применив эти два метода одновременно, имеем возможность не только вычислить корни, но и установить погрешность вычислений, которая будет равняться разности соответствующих значений корней (в качестве окончательного значения корня более целесообразно взять среднее арифметическое значений, найденных методом хорд и методом касательной; тогда погрешность уменьшается вдвое).

Это важное свойство метода хорд и метода касательных будет всегда иметь место, когда $f''(x)$ в рассматриваемой окрестности корня $x = \xi$ не изменяет знака и когда в методе касательных в качестве x_0 взято то значение, для которого

$$f(x_0)\, f''(x_0) > 0.$$

Рекомендуем читателю дать соответствующее геометрическое пояснение, воспользовавшись вначале рис. 209 (на котором надо еще провести из точки (x_2, y_2) касательную), а потом рассмотреть четыре возможных случая расположения относительно оси x кривой $f(x)$ в зависимости от знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ в рассматриваемой окрестности корня $x = \xi$. Более подробно этот вопрос изложен в книгах [7, т. II, гл. VII, § 4]; [31, гл. I, § 3]; [108, гл. II, § 2].

В заключение отметим, что достаточные условия, которые обеспечивают вычисление корня уравнения $f(x) = 0$ по методу хорд с любой заданной степенью точности, будут теми же, что и по методу касательных. Но метод касательных в большинстве случаев дает лучшую сходимость, чем метод хорд.

Замечание. Сходимость метода хорд можно улучшить, если отказаться от его классического варианта и применять не только интерполяцию результатов, но и экстраполяцию, т. е. если отказаться от условия, чтобы рассматри-

* На этом примере Валлис в 1685 г. в книге «Algebra» впервые показал применение метода Ньютона, благодаря чему пример стал историческим. Позже корень уравнения Валлиса был вычислен с 101 десятичным знаком; мы приводим лишь первые 12 знаков: $x = 2{,}094551481542$.

ваемые пробы были разных знаков. В соответствии с этим метод хорд обычно называют методом линейной интерполяции, но мы будем употреблять более широкое название — «метод линейной аппроксимации».

Суть этого метода, как уже отмечалось, заключается в том, что участок дуги истинной кривой $y = f(x)$ заменяют отрезком прямой линии и с помощью этой прямой определяют искомый корень не только внутри рассматриваемого сегмента $[x_1, x_2]$, но и за его пределами*. Подчеркнем, что никаких усложнений при этом не возникает, поскольку формула (VII.17) остается справедливой и в случае экстраполяции. Так, если в рассмотренном выше примере Валлиса в качестве исходных значений взять $x_1 = 2{,}2$ и $x_2 = 2{,}1$, которым соответствуют значения функции одного и того же знака

$$y_1 = y(2{,}2) = +1{,}248; \quad y_2 = y(2{,}1) = +0{,}061,$$

то для получения той же точности, что и в табл. 60, потребуется выполнить на два шага меньше. Все необходимые вычисления, выполненные по формуле (VII.17), приведены в табл. 61, в которой для большей наглядности добавлена еще строка $n = 5$, вычисленная с девятью десятичными знаками.

Таблица 61

n	x_n	x_n^3	$f(x_n)$
1	2,200000	10,648000	+1,248000
2	2,100000	9,261000	+0,061000
3	2,094860	9,193163	+0,003443
4	2,094550	9,189084	—0,000016
5	2,094551349	9,189102338	—0,000000530

При решении простых примеров экономия в 1—2 шага существенной роли не играет, но в тех случаях, когда вычисление $f(x)$ или ее производной $f'(x)$ трудоемко, метод линейной аппроксимации дает большую экономию труда. При этом главным фактором, влияющим на ускорение сходимости процесса, является величина рассматриваемого сегмента $[x_1, \xi]$, где ξ — истинное значение корня. Поэтому при прочих равных условиях надо отдавать предпочтение сегменту $[x_1, x_2]$, меньшему по абсолютной величине. С примерами, когда вычисление $f(x)$ или $f'(x)$ требует многих (иногда нескольких десятков) часов ручного счета, мы встречаемся на практике довольно часто. В дальнейшем при решении систем уравнений такие примеры будут рассмотрены более подробно.

§ 87. Метод итераций**

Приведем алгебраическое или трансцендентное уравнение $f(x) = 0$ к следующему виду:

$$x = \varphi(x), \tag{VII.18}$$

что, вообще говоря, можно выполнить различными путями и получить различные выражения для функции $\varphi(x)$.

Возьмем приближенное значение корня x_0 и найдем более точный результат при помощи формулы $x_1 = \varphi(x_0)$ или в более общем виде:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{VII.19}$$

* В случае экстраполяции надо проявлять известную осторожность, так как в окрестности рассматриваемого участка корня может и не быть. Один из таких примеров будет приведен в контрольных упражнениях.

** Название метода происходит от латинского слова *iteratio* что означает «повторение».

Повторяя этот процесс, т. е. «итеируя» несколько раз, можно получить значение корня с любой степенью точности, если выполняется условие (которое является достаточным)

$$|\varphi'(x)| < 1 \text{ на сегменте } [\xi, x_0], \qquad \text{(VII.20)}$$

где $x = \xi$ — точное значение корня.

Если же условие (VII.20) не выполняется, то уравнение $f(x) = 0$ всегда можно представить в виде

$$x = x - c \cdot f(x)$$

и константу c подобрать так, чтобы для функции

$$\varphi(x) = x - c \cdot f(x)$$

условие (VII.20) имело место. Тогда согласно формуле (VII.19) получим

$$x_{n+1} = x_n - cf(x). \qquad \text{(VII.21)}$$

Замечание. Метод Ньютона и метод линейной аппроксимации по сути являются итеративными методами. Так, например, формулу (VII.14) получим как частный случай формулы (VII.21), положив в ней

$$c = \frac{1}{f'(x_n)}.$$

Пользуясь формулой (VII.21), Дж. Вегстейн (1958) предложил итеративный метод, который обеспечивает сходимость процесса независимо от того, выполняется условие (VII.20) или нет. Подробное изложение метода Вегстейна, который хорошо реализуется как при ручном счете, так и при счете на ЭВМ, приведено в работе [72, гл. 6, § 6.4].

В некоторых случаях, когда непосредственное применение формулы (VII.19) приводит к расходящемуся процессу, можно избежать трудностей, перейдя к обратной функции. Например, при $x > 0$ уравнение

$$2 + x = e^x$$

методом итераций непосредственно решить нельзя, так как при $x > 0$

$$\varphi'(x) = (e^x - 2)' = e^x > 1$$

и согласно условию (VII.20) процесс будет расходящимся. Однако метод итераций можно применить и в этом случае, если предварительно перейти к обратной функции. Тогда получим уравнение

$$x = \ln(2 + x),$$

для которого при $x > 0$ имеем

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2+x} < 1.$$

Если при решении уравнения (VII.18) по методу итераций одновременно выполняются условия:

$$\varphi'(x) < 0 \text{ и } |\varphi'(x)| < 1,$$

то два последовательных приближенных значения корня будут соответственно больше и меньше его точного значения ξ, что дает возможность оценить полученную точность.

Пример. Найдем по методу итераций с пятью значащими цифрами наименьший положительный корень уравнения

$$\cos x - \frac{1}{x}\sin x = 0. \qquad \text{(VII.22)}$$

Решение. Заменяем уравнение (VII.22) эквивалентным ему уравнением*

$$x = \operatorname{tg} x \qquad \text{(VII.23)}$$

и, построив графики функций $y_1 = x$, $y_2 = \operatorname{tg} x$ (это читателю полезно выполнить самостоятельно), находим, что можно взять

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7.$$

Однако к уравнению (VII.23) непосредственно метод итераций применить нельзя, так как при любом значении x

$$\varphi'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \geqslant 1$$

и условие (VII 20) не удовлетворяется.

Поэтому перейдем к обратной функции, т. е. к уравнению

$$x = \operatorname{arctg} x, \qquad \text{(VII.24)}$$

для которого

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{ при } x \neq 0.$$

Уравнение (VII.24), которое эквивалентно исходному уравнению (VII.22) решаем при помощи формулы

$$x_{n+1} = \operatorname{arctg} x_n, \quad \text{где } x_0 = 4{,}7.$$

Итерационный процесс заканчиваем тогда, когда с необходимой точностью совпадут значения x_n и x_{n+1}.

Выполнив вычисления, приведенные в табл. 62, получаем $x = 4{,}4934$.

Таблица 62

n	0	1	2.	3
x_n	4,7	4,50	4,494	4,4934
$\operatorname{arctg} x_n$	4,50	4,494	4,4934	4,4934

Значения $\operatorname{arctg} x$ находим либо непосредственно по таблицам [137,176], либо по таблице функции $\operatorname{tg} x$, например [121, 156], решая каждый раз обратную табличную задачу (см. гл. VI, § 81). Можно также пользоваться и табл. I, помещенной в приложении к данной книге.

Заметим, что табл. 62 приведена в полном объеме только из-за методических соображений; практически записывать значения $\operatorname{arctg} x_n$ нет надобности, так как они повторяются в последующем шаге для x_{n+1}. Вообще, опытный вычислитель такое простое уравнение решает без записи промежуточных результатов, фиксируя все необходимые данные непосредственно в таблице функции $\operatorname{arctg} x$ или в таблице функции $\operatorname{tg} x$. При этом сначала значения $\operatorname{arctg} x$ можно определять очень грубо, пока не приблизимся к точному значению корня. Более того, в методе

* Эквивалентность уравнений рассматриваем здесь в более общем смысле, который допускает и выполнение операции граничного перехода. Так, например, $x=0$ мы считаем корнем уравнения (VII.22), так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

итераций даже допущенная ошибка автоматически выявляется и исправляется в последующих шагах итерационного процесса.

Таким образом, метод итераций дает возможность «угадывать» новые значения x_n при осуществлении любого шага n, что эквивалентно началу процесса итераций при новом, более удачном значении x_0. Следовательно, в тех случаях, когда процесс сходится медленно, можно вносить соответствующие коррективы, учитывая результаты предыдущих шагов.

Отмеченные свойства метода итераций, его простота и те неограниченные возможности, которые заключены в формуле (VII.21), дают возможность вычислителю полностью проявить свое мастерство, интуицию и опыт. Поэтому метод итераций получил очень широкое распространение в математике: его используют

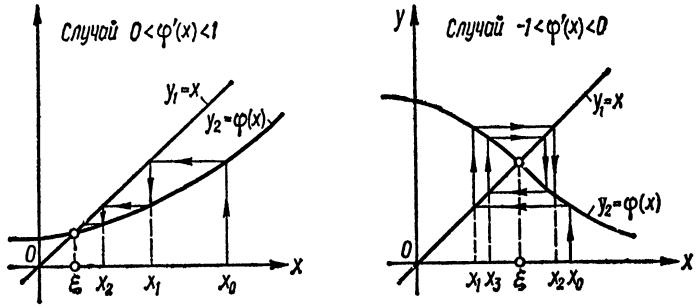


Рис. 211.

также при решении дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и во многих других вопросах теоретической и прикладной математики.

Геометрический смысл решения уравнения $x = \varphi(x)$ методом итераций вполне ясен из рис. 211.

Рекомендуем читателю выяснить геометрическим путем, почему при $|\varphi'(x)| \geqslant 1$ метод итераций приводит к расходящемуся процессу. Остановимся еще на вопросе о «потере точности» в методе итерации, т. е. на вопросе о влиянии ошибок округления промежуточных результатов на окончательные результаты.

В частности, при решении уравнений по методу итераций для двух последовательных приближений можно установить следующую связь [40, гл. III, § 5]:

$$x_{n+1} - \xi \approx \varphi'(\xi)(x_n - \xi), \qquad \text{(VII.25)}$$

где ξ — точное значение искомого корня.

Таким образом, точность результата при определении корня по методу итераций растет, примерно, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\varphi'(\xi)$.

Пусть при вычислении $\varphi(x_n)$ допущена в результате округления промежуточных результатов суммарная погрешность ε. В таком случае

$$x_{n+1} - \xi = \varphi'(\xi)(x_n - \xi) \pm \varepsilon.$$

Процесс может перестать сходиться (т. е. предельная точность, с которой может быть вычислен искомый корень, будет достигнута), если

$$|x_{n+1} - \xi| = |x_n - \xi|.$$

Тогда будет иметь место равенство

$$|x_n - \xi| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_n - \xi| + \varepsilon,$$

из которого находим

$$|x_n - \xi| = \frac{\varepsilon}{1 - |\varphi'(\xi)|}. \qquad \text{(VII.26)}$$

Таким образом, потеря точности в методе итераций равна произведению потери точности, возникающей при вычислении $\varphi(x)$, и дроби

$$\frac{1}{1-|\varphi'(\xi)|}.$$

Все изложенное выше не противоречит утверждению, что метод итераций при выполнении условия (VII.20) может обеспечить любую степень точности вычисления корня. Но формула (VII.26) позволяет фактически установить, с каким количеством запасных знаков надо вести все вычисления для того, чтобы неизбежные ошибки округления промежуточных результатов не повлияли на последнюю из интересующих нас значащих цифр окончательного результата.

Упражнения

1. Решить методом итераций все примеры, рассмотренные в § 85, 86.
2. Доказать эквивалентность уравнений (VII.23) и (VII.24) в примере, рассмотренном в данном параграфе.

§ 88. Решение систем двух уравнений

Систему двух уравнений с двумя неизвестными всегда можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.27)}$$

где x, y — независимые действительные переменные, а f_1, f_2 — заданные функции этих независимых переменных.

Если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ — линейные функции, то приходим к системе двух линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ f_2(x, y) &= a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.28)}$$

которую проще всего решить *методом исключения*. Для этого умножаем первое уравнение системы на $(+b_2)$, а второе — на $(-b_1)$ и, сложив алгебраически эти уравнения, получаем следующий результат:

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \;\big|\cdot(+b_2) \\ +\;a_2x + b_2y + c_2 = 0 \;\big|\cdot(-b_1) \\ \hline (a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (b_1b_2 - b_2b_1)\,y + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0. \end{array}$$

Так как $b_1b_2 - b_2b_1 = 0$, то мы в результате исключили переменную y и свели систему (VII.28) к уравнению с одним неизвестным x, решив которое, имеем

$$x = -\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_2}. \qquad \text{(VII.29)}$$

Аналогичным путем исключаем из системы (VII.28) переменную x, что читателю полезно выполнить в виде упражнения, и получаем

$$y = +\frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad \text{(VII.30)}$$

Подставив x и y, вычисленные по формулам (VII.29) и (VII.30), в исходную систему, контролируем, с какой степенью точности найденные корни удовлетворяют заданной системе линейных уравнений. Данный контроль позволяет выявить ошибки, возникшие в процессе вычислений, и возможные описки при окончательном фиксировании результатов.

Пример 1. Вычислить с пятью десятичными знаками корни следующей системы двух линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 5x - 8y + 7 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2x + 6y - 9 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. В данном примере $a_1 = +5$; $b_1 = -8$; $c_1 = +7$; $a_2 = +2$; $b_2 = +6$; $c_2 = -9$, так что согласно формулам (VII.29) и (VII.30), получаем:

$$x = -\frac{7 \cdot 6 - (-9) \cdot (-8)}{5 \cdot 6 - 2 \cdot (-8)} = +\frac{30}{46} = 0{,}6521739 \ldots \approx 0{,}65217;$$

$$y = +\frac{7 \cdot 2 - (-9) \cdot 5}{5 \cdot 6 - 2 \cdot (-8)} = +\frac{59}{46} = 1{,}2826086 \ldots \approx 1{,}28261.$$

Подставив эти значения в исходную систему, имеем

$$f_1(x, y) = 5 \cdot 0{,}65217 - 8 \cdot 1{,}28261 + 7 = -0{,}00003;$$
$$f_2(x, y) = 2 \cdot 0{,}65217 + 6 \cdot 1{,}28261 - 9 = 0{,}00000;$$

следовательно, найденные корни с заданной степенью точности действительно удовлетворяют исходной системе.

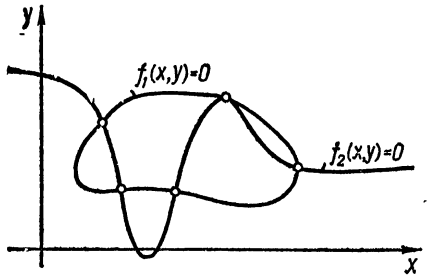


Рис. 212.

Упражнение 1. Округлить найденные корни до трех десятичных знаков и определить, с какой точностью они будут удовлетворять исходной системе.

Линейную систему уравнений (VII.28) мы уже частично рассматривали в § 11 и 12 гл. I. Поэтому не будем больше останавливаться на этом вопросе и перейдем к основной теме данного параграфа — к решению систем двух нелинейных уравнений, что представляет большой теоретический и практический интерес.

Систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными (VII.27) всегда можно решить *графическим методом*. Для этого на плоскости (x, y) выбирается какая-нибудь система координат. Чаще всего применяют прямоугольную декартову систему, однако возможно также использование полярной, логарифмической и любой другой системы координат. В выбранной системе координат строятся кривые

$$f_1(x, y) = 0; \quad f_2(x, y) = 0,$$

что, за редким исключением, можно осуществить только по точкам: полагаем $y = a$ и определяем соответствующие x, как корни уравнений

$$f_1(x; a) = 0, \quad f_2(x; a) = 0.$$

Определив достаточное число таких точек, находим корни системы (VII.27) как точки пересечения (или касания) построенных кривых (рис. 212).

Графический метод не получил широкого распространения из-за его трудоемкости. Трудности значительно возрастают, если необходима высокая точность результатов, для чего построения надо осуществлять в несколько этапов, рассматривая окрестности искомых корней при все возрастающем масштабе соответствующих фрагментов рис. 212.

Поэтому сосредоточим свое внимание на *методе вариации параметра*, который позволяет найти все действительные корни системы уравнений (VII.27). При этом существенным также является то обстоятельство, что данный метод легко обобщается на случай системы n нелинейных уравнений и применим для решения систем как алгебраических, так и трансцендентных уравнений.

В системе (VII. 27)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\ y) &= 0, \\ f_2(x,\ y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

всегда можно одну из независимых переменных, например y, рассматривать в качестве параметра, т. е. всегда можно положить

$$y = p.$$

Тогда каждое из уравнений системы (VII.27) обратится в уравнение с одним неизвестным:

$$f_1(x;\ p) = 0, \qquad \text{(VII.31)}$$

$$f_2(x;\ p) = 0, \qquad \text{(VII.32)}$$

но корни этих уравнений будут являться функциями от введенного параметра p. Обозначим корни уравнений (VII.31) и (VII.32) соответственно

$$x_{\mathrm{I}}^{(0)} = x_{\mathrm{I}}(p) \text{ и } x_{\mathrm{II}}^{(0)} = x_{\mathrm{II}}(p)$$

и рассмотрим так называемую *невязку**

$$\delta^*(p) = x_{\mathrm{I}}(p) - x_{\mathrm{II}}(p),$$

которая будет зависеть только от величины параметра p, т. е. являться функцией одного независимого переменного $p = y$.

Приравняв невязку нулю:

$$\delta^*(p) = x_{\mathrm{I}}(p) - x_{\mathrm{II}}(p) = 0, \qquad \text{(VII.33)}$$

получим еще одно уравнение с одним неизвестным, каждый действительный корень которого однозначно определяет соответствующую пару действительных корней системы (VII.27).

В самом деле, если

$$p = p^{(0)} = y^{(0)}$$

обращает левую часть уравнения (VII.33) в нуль, то при таком значении параметра $p = p^{(0)}$ корни уравнений (VII.31) и (VII.32) тождественно совпадают между собой:

$$x_{\mathrm{I}}(p^{(0)}) = x_{\mathrm{II}}(p^{(0)}) = x^{(0)}.$$

Следовательно,

$$y = y^{(0)} = p^{(0)} \text{ и } x = x_{\mathrm{I}}^{(0)} = x_{\mathrm{II}}^{(0)} = x(p^{(0)})$$

тождественно удовлетворяют исходной системе.

Таким образом, решение системы (VII.27) мы свели к решению трех независимых уравнений (каждое — с одним неизвестным) и осуществили косвенным путем разделение переменных для любой системы нелинейных уравнений.

Так как в системе (VII.27) обе независимые переменные совершенно равноправны, то в качестве параметра можно также брать $x = p$, а не $y = p$. Тогда все формулы останутся прежними, только в них надо будет поменять местами x и y.

Какую именно из независимых переменных следует выбирать в качестве параметра, надо определять в каждом конкретном примере, в зависимости от того, какая из пар уравнений (VII.31), (VII.32):

$$\left.\begin{aligned} f_1(x;\ p) &= 0, \\ f_2(x;\ p) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} f_1(y;\ p) &= 0, \\ f_2(y;\ p) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

будет иметь более простую структуру.

* В дальнейшем введем еще невязку $\delta(p) = p - x^{(0)}(p)$, которую для большей определенности будем обозначать без звездочки.

Пример 2. Определить все действительные корни системы

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\ y) &= xy^3 + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - 2{,}50 = 0, \\ f_2(x,\ y) &= x + y - (\sin x + \sin y + 0{,}75) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.34)}$$

Решение. В данном примере в качестве параметра лучше взять

$$y = p.$$

В результате приходим к двум уравнениям:

$$f_1(x;\ p) = p^3 x + \operatorname{arctg}\frac{x}{p} - 2{,}50 = 0, \qquad \text{(VII.35)}$$

$$f_2(x;\ p) = x + a_p - \sin x = 0, \text{ где } a_p = p - 0{,}75 - \sin p. \qquad \text{(VII.36)}$$

Исследуем, как изменяются корни $x_{\mathrm{I}}(p)$ и $x_{\mathrm{II}}(p)$ уравнений (VII.35) и (VII.36) и невязка $\delta^*(p) = x_{\mathrm{I}}(p) - x_{\mathrm{II}}(p)$ на всей действительной оси p, т. е. при изменении параметра p от $-\infty$ до $+\infty$.

При $p \to \pm 0$ из уравнений (VII.35) и (VII.36) получаем

$$x_{\mathrm{I}}(\pm 0) = \frac{2{,}50 \pm 1{,}57}{p^3} \to \pm\infty,$$

поскольку

$$\lim_{p\to\pm 0} \operatorname{arctg}\frac{x}{p} = \pm\frac{\pi}{2} \approx \pm 1{,}57,$$

и соответственно

$$x_{\mathrm{II}}(0) \approx 1{,}736, \text{ так как } a_p(0) = -0{,}75;\ \sin 1{,}736 = 0{,}98638\ldots$$

Следовательно, при $p \to \pm 0$ функция

$$\delta^*(p) = x_{\mathrm{I}}(p) - x_{\mathrm{II}}(p)$$

терпит разрыв, асимптотически удаляясь в бесконечность:

$$\delta^*(\pm 0) = \pm\infty.$$

При $p \to \pm\infty$, имеем $\operatorname{arctg}\frac{x}{p} = 0$, и тогда из (VII.35) находим

$$x\ (\pm\infty) = \lim_{p\to\pm\infty} \frac{2{,}50}{p^3} = 0,$$

а из (VII.36)

$$x_{\mathrm{II}}(\pm\infty) = -\lim_{p\to\pm\infty} p = \mp\infty,$$

так как $\lim\limits_{p\to\infty} a_p = p$ и $|\sin x + \sin p| \leqslant 2$ при любых значениях x и p.

Следовательно, при $p \to \pm\infty$

$$\delta^*(\pm\infty) = +p = \pm\infty,$$

т. е. при больших значениях параметра p невязка $\delta^*(p)$ асимптотически уходит в бесконечность, приближаясь к биссектрисе первого и третьего координатных углов $\delta^* = p$.

Выяснив поведение $\delta^*(p)$ в нулевой точке и в окрестности бесконечно удаленной точки, вычисляем с 2—3 знаками еще несколько наиболее характерных точек

функции $\delta^* = \delta^*(p)$, по которым и строим ее график. Из этого графика (рис. 213) следует, что функция $\delta^*(p)$ имеет только два действительных положительных нуля, поэтому и система (VII.34) имеет только две пары действительных корней. Все вычисления, необходимые для уточнения одной из пар корней, приведены в табл. 63, в которой $x^{(0)} = +1{,}603288$; $p = y^{(0)} = +0{,}972455$ определены с погрешностью в 1—2 единицы шестого десятичного знака. Сам процесс уточнения выполняем следующим образом. Задавшись двумя исходными значениями параметра p, например $p_{\mathrm{I}} = 1{,}000$ и $p_{\mathrm{II}} = 0{,}900$, вычисляем в табл. 63 при $n = \mathrm{I}$ и $n = \mathrm{II}$ методом линейной аппроксимации (или любым другим методом) корни x_{I}, x_{II} уравнений (VII.35) и (VII.36), а затем находим соответствующие им значения невязки (VII.33):

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{I}} = 1{,}513176 - 1{,}591262 = -0{,}078086;$$

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{II}} = 1{,}885523 - 1{,}631486 = +0{,}254037.$$

По первым двум пробам *

$$M_{\mathrm{I}} \equiv \mathrm{I}\,[p_{\mathrm{I}} = 1{,}000;\quad \delta^*_{\mathrm{I}} = -0{,}078086]$$

и

$$M_{\mathrm{II}} \equiv \mathrm{II}\,[p_{\mathrm{II}} = 0{,}900;\quad \delta^*_{\mathrm{II}} = +0{,}254037],$$

как показано на рис. 214, при помощи той же формулы линейной аппроксимации (VII.17) находим более точное значение параметра:

$$p_{\mathrm{III}} = 0{,}976488 \approx 0{,}976$$

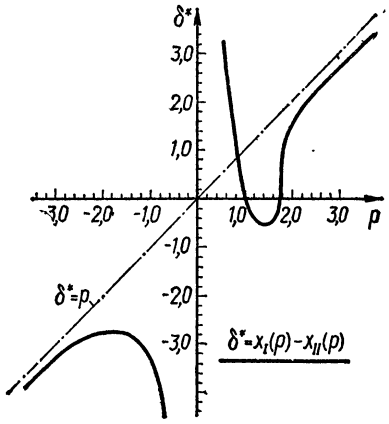


Рис. 213.

и в третьем шаге табл. 63 вычисляем соответствующую ему невязку

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{III}} = 1{,}591231 - 1{,}601783 = -0{,}010552.$$

Значение p_{IV}, в соответствии с замечанием в § 86, определяем по формуле (VII.17) на основании проб I и III и получаем

$$p_{\mathrm{IV}} = 0{,}972251,$$

после чего в пятом шаге находим корни $x^{(0)} = 1{,}603288$; $p = y^{(0)} = 0{,}972455$ с заданной точностью.

Если же в IV шаге параметр p вычислять по пробам II и III (для которых невязка δ^* имеет разные знаки, но при этом проба II более удалена от истинного значения корня, чем проба I, т. е. $[x_{\mathrm{I}}, \xi] < [x_{\mathrm{II}}, \xi]$), то получим менее точное значение $p_{\mathrm{IV}} = 0{,}972969$, в результате чего потребовалось бы выполнить еще один дополнительный шаг $n = \mathrm{VI}$.

Упражнения

2. Вычислить с пятью десятичными знаками вторую пару корней системы (VII.34).

* Совокупность двух чисел p_j, δ^*_j будем называть *пробой* и обозначать символом $M_j \equiv \equiv j\,[p_j, \delta^*_j]$, где $j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots$.

Таблица 63

Шаг n	Параметр и невязка	$x = x_I$	$\frac{x}{p}$	$p^3 x$	$\operatorname{arctg}\frac{x}{p}$	$f_1(x;\ p)$	$x = x_{II}$	$\sin x$	$f_2(x;\ p)$
I	$p = +1{,}000$	1,500	1,500000	1,500000	0,982794	—0,017206	1,500	0,997495	—0,088966
	$\delta^* = -0{,}078086$	1,513	1,513000	1,513000	0,986770	—0,000230	1,591	0,999796	—0,000267
	$p^3 = +1{,}000000$	1,514	1,514000	1,514000	0,987074	+0,001074	1,592	0,999775	+0,000754
	$a_p = -0{,}591471$	1,513176	1,513176	1,513176	0,986824	0,000000	1,591262	0,999790	—0,000001
II	$p = +0{,}900$	1.600	1,777778	1,166400	1,058407	—0,275193	1,600	0,999574	—0,032901
	$\delta^* = +0{,}254037$	1,887	2,096667	1,375623	1,125758	+0,001381	1,630796	0,998201	—0,000732
	$p^3 = +0{,}729000$	1,886	2,095556	1,374894	1,125552	+0,000446	1,631796	0,998140	+0,000329
	$a_p = -0{,}633327$	1,885523	2,095026	1,374546	1,125454	0,000000	1,631486	0,998159	0,000000
III	$p = +0{,}976$	1,600	1,639344	1,487542	1,023056	+0,010598	1,600	0,999574	—0,001837
	$\delta^* = -0{,}010552$	1,591	1,630123	1,479175	1,020546	—0,000279	1,600796	0,999550	—0,001017
	$p^3 = +0{,}929714$	1,592	1,631147	1,480105	1,020825	+0,000930	1,601796	0,999520	+0,000013
	$a_p = -0{,}602263$	1,591231	1,630360	1,479390	1,020610	0,000000	1,601783	0,999520	0,000000
IV	$p = +0{,}972251$	1,603	1,648751	1,473224	1,025597	—0,001179	1,602796	0,999488	—0,000597
	$\delta^* = +0{,}000613$	1,604	1,649780	1,474143	1,025873	+0,000016	1,603796	0,999456	+0,000435
	$a_p = -0{,}603905$	1,603987	1,649766	1,474131	1,025869	0,000000	1,603374	0,999470	—0,000001
V	$p = +0{,}972455$	1,603	1,648405	1,474151	1,025504	—0,000345	1,602796	0,999488	—0,000508
	$\delta^* = 0{,}000000$	1,604	1,649434	1,475071	1,025780	+0,000851	1,603796	0,999456	+0,000524
	$a_p = -0{,}603816$	1,603288	1,648701	1,474416	1,025584	0,000000	1,603288	0,999478	0,000000

3. Определить графическим путем для $p = 0{,}5$; 1,0; 2,0 корни каждого из уравнений (VII.35) и (VII.36), представив их в виде:

$$Y_1 = p^3 x - 2{,}50 = -\operatorname{arctg}\frac{x}{p}; \quad Y_2 = x + a_p = \sin x$$

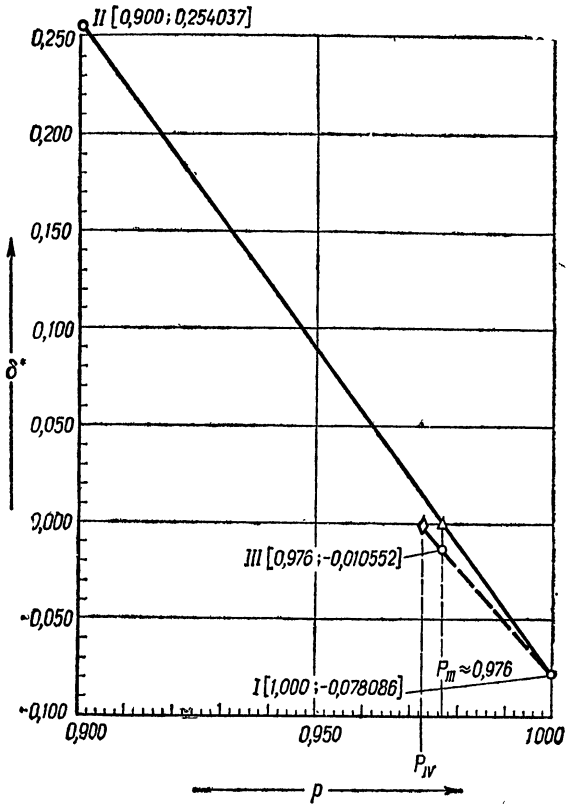


Рис. 214.

и построив соответствующие графики, как изложено в § 84.

Пример 3. Исследовать систему [124]

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= x + 3\lg x - y^2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.37)}$$

и определить с восемью значащими цифрами все ее действительные корни.

Решение. Введя параметр

$$x = p,$$

из системы (VII.37) имеем

$$y_{\mathrm{I}}^{(0)} = 2p + \frac{1}{p} - 5; \quad y_{\mathrm{II}}^{(0)} = \pm\sqrt{p + 3\lg p}. \qquad \text{(VII.38)}$$

В данном случае корни $y^{(0)}(p)$ каждого из уравнений системы (VII.37) выражаются непосредственно через параметр p, что упрощает решение. Поэтому,

задавшись рядом значений p, вычисляем в табл. 64 по формулам (VII.38) соответствующие $y_{\text{I}}^{(0)}$ и $y_{\text{II}}^{(0)}$, а затем невязку

$$\delta^*(p) = y_{\text{I}}^{(0)}(p) - y_{\text{II}}^{(0)}(p).$$

Таблица 64

p	$\frac{1}{p}$	$\lg p$	$p+3\lg p$	$y_{\text{I}}(p)$	$y_{\text{II}}(p)$	$\delta_+^*(p)$	$\delta_-^*(p)$
0,62091	1,6105	−0,20697	0,0000	−2,1477	0,0000	−2,1477	−2,1477
1,0000	1,0000	0,0000	+1,0000	−2,0000	±1,0000	−3,0000	−1,0000
2,0000	0,5000	+0,3010	+2,9030	−0,5000	±1,7038	−2,2038	+1,2038
3,0000	0,3333	+0,4771	+4,4313	+1,3333	±2,1051	−0,7718	+3,4384
4,0000	0,2500	+0,6021	+5,8063	+3,2500	±2,4096	+0,8404	+5,6596
5,0000	0,2000	+0,6990	+7,0970	+5,2000	±2,6640	+2,5360	+7,8640

Таблица 65

n	$p=p_n$	$\frac{1}{p}$	$\lg p$	$p+3\lg p$	$y_{\text{I}}(p)$	$y_{\text{II}}(p)$	$\delta_+^*(p)$
0	3,5	0,2857143	0,5540680	5,1622040	2,2857143	2,2720484	+0,0136659
1	3,4	0,2941176	0,5314789	4,9944367	2,0941176	2,2348236	−0,1407060
2	3,491	0,2864509	0,5429498	5,1198494	2,2684509	2,2627084	+0,0057425
3	3,48743	0,2867441	0,5425055	5,1149465	2,2616041	2,2616248	−0,0000207
4	3,4874428	0,2867431	0,5425071	5,1149641	2,2616287	2,2616286	+0,0000001

Так как $y_{\text{II}}^{(0)}$ может принимать два различных значения, то рассматриваем две ветви функции $\delta^*(p)$:

$$\delta_+^*(p) = y_{\text{I}}^{(0)}(p) - |\,y_{\text{II}}^{(0)}(p)\,| \quad \text{при } y_{\text{II}}^{(0)} > 0$$

и

$$\delta_-^*(p) = y_{\text{I}}^{(0)}(p) + |\,y_{\text{II}}^{(0)}(p)\,| \quad \text{при } y_{\text{II}}^{(0)} < 0,$$

которые совпадают между собой в точке разветвления $p \approx 0{,}62091$.

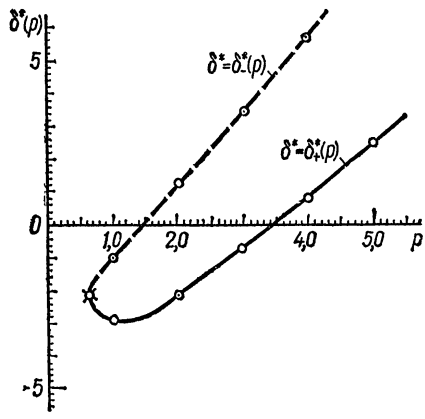


Рис. 215.

Построив на рис. 215 по приведенным в табл. 64 данным графики $\delta^* = \delta_+^*(p)$ и $\delta^* = \delta_-^*(p)$, видим, что функция $\delta^*(p)$ имеет только два нуля: $p \approx 1{,}4$ и $p \approx 3{,}5$. В табл. 65 для $p \approx 3{,}5$ выполнены все вычисления для определения корней с заданной точностью:

$$p = x^{(0)} = 3{,}4874428;\ y^{(0)} = 2{,}2616287.$$

Уточнение значений p мы производили при помощи метода линейной аппроксимации.

Упражнение 4. Воспользовавшись таблицами [14] и [135], определить с той же точностью корни системы (VII.37), соответствующие $p \approx 1{,}4$.

Пример 3 подробно рассмотрен в литературе. Сравнив полученные результаты с приведенными в [124, стр. 189]; [31, стр. 46]; [34, стр. 150], видим, что метод вариации параметра при меньшем объеме вычислений обеспечивает большую точность *.

Системы (VII.34) и (VII.37) являются трансцендентными, притом первая из них довольно сложная. Выполненное нами полное исследование этих систем показало те большие возможности, которыми обладает метод вариации параметра. Поэтому ограничимся рассмотрением только одной, более простой алгебраической системы, которую сможем также решить при помощи метода исключения, что позволит затем провести сопоставление результатов.

Пример 4. Определить с пятью десятичными знаками все корни следующей алгебраической системы:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= yx^2 + y - x + 5 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2x^2 - yx - 7 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.39)}$$

Решение. В качестве параметра возьмем

$$x = p.$$

В результате получаем два уравнения первой степени:

$$f_1(y;\ p) = (p^2 + 1)\,y - p + 5 = 0, \qquad \text{(VII.40)}$$

$$f_2(y;\ p) = 2p^2 - py - 7 = 0, \qquad \text{(VII.41)}$$

решив которые, находим

$$y_{\mathrm{I}}^{(0)}(p) = \frac{p-5}{p^2+1}\ ;\ y_{\mathrm{II}}^{(0)}(p) = \frac{2p^2-7}{p}. \qquad \text{(VII.42)}$$

Исследуем невязку $\delta^*(p)$ на всей действительной оси $-\infty \leqslant p \leqslant +\infty$. Заменив в (VII.33) x на y и использовав формулы (VII.42), получаем

$$\delta^*(p) = y_{\mathrm{I}}^{(0)} - y_{\mathrm{II}}^{(0)} = \frac{p-5}{p^2+1} - \left(2p - \frac{7}{p}\right).$$

В таком случае при $p = \pm 0$ имеем

$$y_{\mathrm{I}}^{(0)} = -5;\ y_{\mathrm{II}}^{(0)} = -\frac{7}{p}\ ;\ \delta^*(\pm 0) = \lim_{p \to \pm 0} \frac{7}{p} = \pm\infty.$$

Аналогично при $p = \pm\infty$

$$y_{\mathrm{I}}^{(0)} = 0; \quad y_{\mathrm{II}}^{(0)} = 2p;\ \delta^*(\pm\infty) = \lim_{p \to \pm\infty} (-2p) = \mp\infty$$

Таблица 66

p	p^2	p^2+1	$p-5$	$2p^2-7$	$y_{\mathrm{I}}^{(0)}(p)$	$y_{\mathrm{II}}^{(0)}(p)$	$\delta^*(p)$
−3	9	10	−8	+11	−0,800	−3,667	+2,867
−2	4	5	−7	+1	−1,400	−0,500	−0,900
−1	1	2	−6	−5	−3,000	+5,000	−8,000
∓0	0	1	−5	−7	−5,000	± ∞	∓ ∞
+1	1	2	−4	−5	−2,000	−5,000	+3,000
+2	4	5	−3	+1	−0,600	+0,500	−1,100

* В книге [34] на рис. 37 кривая $f_1(x, y) = 0$ в окрестности $x = 1$ вычерчена неверно: при $x = 1$ должно быть $y = -2$; в книге [124] на стр. 190 вместо $x^{(3)} = 3{,}4782$ должно быть $x^{(3)} = 3{,}4872$.

Таблица 67

n	p	p^2	$p-5$	$2p^2-7$	$y_I^{(0)}(p)$	$y_{II}^{(0)}(p)$	$\delta^*(p)$
1	—2,23800	5,00864	—7,23800	+3,01728	—1,20460	—1,34820	**+0,14360**
2	—2,20525	4,86313	—7,20525	+2,72626	—1,22891	—1,23626	**+0,00735**
3	—2,20348	4,85532	—7,20348	+2,71064	—1,23024	—1,23016	**—0,00008**
4	—2,20350	4,85541	—7,20350	+2,71082	—1,23023	—1,23023	**0,00000**
1	+1,73000	2,99290	—3,27000	—1,01420	—0,81895	—0,58624	**—0,23271**
2	+1,67745	2,81384	—3,32255	—1,37232	—0,87118	—0,81810	**—0,05308**
3	+1,66192	2,76198	—3,33808	—1,47604	—0,88732	—0,88815	**+0,00083**
4	+1,66216	2,76278	—3,33784	—1,47444	—0,88707	—0,88706	**—0,00001**

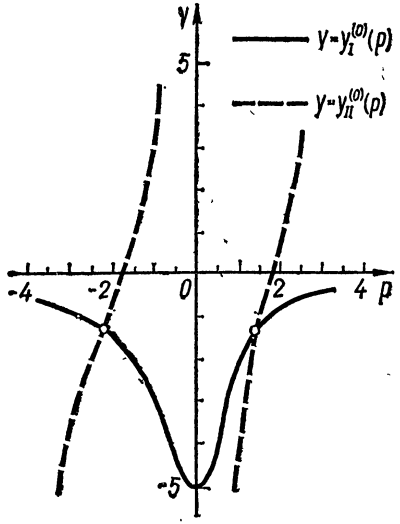


Рис. 216.

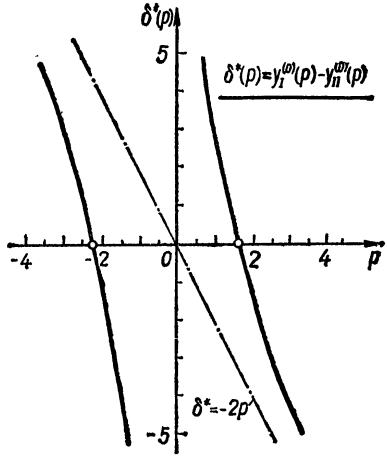


Рис. 217.

и, следовательно, при больших значениях параметра p невязка $\delta^*(p)$ асимптотически стремится к прямой $\delta^* = -2p$. Присоединив к этим результатам ряд значений, вычисленных в табл. 66, строим для большей наглядности графики корней $y = y_I^{(0)}(p)$ и $y = y_{II}^{(0)}(p)$ как функции параметра p (рис. 216), а по ним — график невязки $\delta^* = \delta^*(p)$, который при $p = 0$ имеет разрыв второго рода (рис. 217).

Таким образом, система (VII.39) имеет только две пары корней, значения которых вычислены в табл. 67. Уточнения параметра p, как и в предыдущих примерах, мы осуществили по формуле (VII.17) § 86, используя в качестве начальных проб соответствующие значения, взятые из табл. 66.

В итоге, после четырех шагов, мы нашли с требуемой точностью искомые корни

$$p = x^{(0)} = -2{,}20350; \quad y_I^{(0)} = y_{II}^{(0)} = -1{,}23023$$

и, соответственно,

$$p = x^{(0)} = +1{,}66216; \quad y_{\text{I}}^{(0)} = y_{\text{II}}^{(0)} = -0{,}88707.$$

С целью проверки полученных результатов, решим систему (VII.39) методом исключения.

Из второго уравнения системы (VII.39) находим

$$yx = 2x^2 - 7; \quad y = \frac{2x^2 - 7}{x} = 2x - \frac{7}{x}. \tag{VII.43}$$

Подставив эти значения в первое уравнение (VII.39), получаем

$$(2x^2 - 7)\,x + \frac{2x^2 - 7}{x} - x + 5 = 0$$

или, после умножения левой части этого уравнения на x,

$$2x^4 - 7x^2 + 2x^2 - 7 - (x - 5)\,x = 0.$$

Выполнив приведение подобных членов и обозначив найденный полином через $\varphi(x)$, имеем окончательно

$$\varphi(x) = 2x^4 - 6x^2 + 5x - 7 = 0, \tag{VII.44}$$

$$\varphi'(x) = 8x^3 - 12x + 5; \quad \varphi''(x) = 12\,(2x^2 - 1). \tag{VII.45}$$

Построив график функции $\varphi(x)$ (для которой, в частности, точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}707$; $\varphi''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ являются точками перегиба), видим, что уравнение (VII.44) имеет только два корня: $x \approx -2{,}2$; $x \approx +1{,}7$ и никакие другие значения $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$ не могут быть его корнями (рис. 218). Дальнейшее уточнение корней осуществляем по формуле Ньютона (что читателю полезно выполнить в виде упражнения) и получаем с заданной точностью

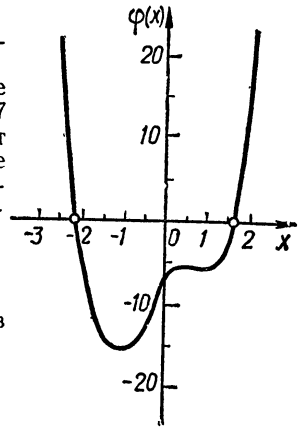


Рис. 218.

$$x^{(0)} = -2{,}20350; \quad x^{(0)} = +1{,}66216.$$

Подставив эти значения во второе из равенств (VII.43), находим соответствующие им значения

$$y^{(0)} = -1{,}23024; \quad y^{(0)} = -0{,}88707.$$

Сравнив результаты, найденные по методу исключения, с результатами, полученными в табл. 67, убеждаемся, что они полностью совпадают. Однако метод исключения применим только в редких случаях, в то время как при помощи метода вариации параметра можно решать любую нелинейную (и линейную) систему (VII.27), причем в тех случаях, когда система может быть сведена методом исключения к уравнению с одним неизвестным, расчетные формулы в методе вариации параметров также существенно упрощаются.

Упражнение 5. Исследовать при помощи метода вариации параметра систему

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^3 + 2y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= 5y^3 + x^2 - 2xy - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

и доказать, что она имеет только одну пару действительных корней. Результаты сравнить с результатами, полученными другим методом в книге Э. Уиттекера и Г. Робинсона [143, стр. 86].

Замечание. Функция $\delta^*(p) = x_I^{(0)}(p) - x_{II}^{(0)}(p)$ может не существовать не только в отдельных изолированных точках, но и на некоторых участках всей бесконечной оси $-\infty \leqslant p \leqslant +\infty$. Однако этот факт не приводит к каким-либо усложнениям, поскольку, строго говоря, нас не интересует функция $\delta^*(p)$ сама по себе, а интересует только множество ее нулей, которые, в свою очередь, определяют корни системы (VII.27). В тех же точках оси p, в которых $\delta^*(p) \neq 0$ или не существует, нет и совместных решений системы (VII.27), а поэтому все множество таких точек мы можем исключить из рассмотрения. Так, в примере 3

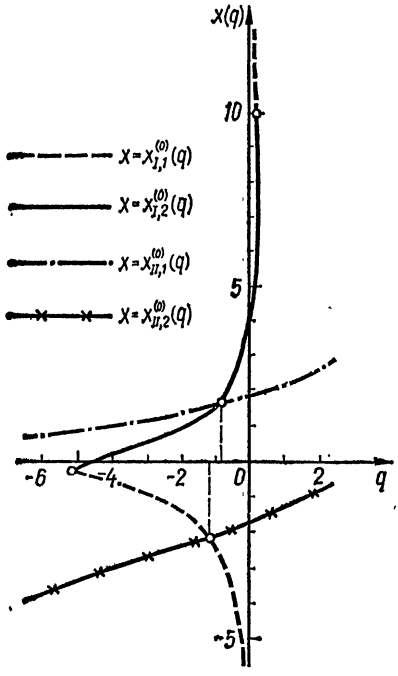


Рис. 219.

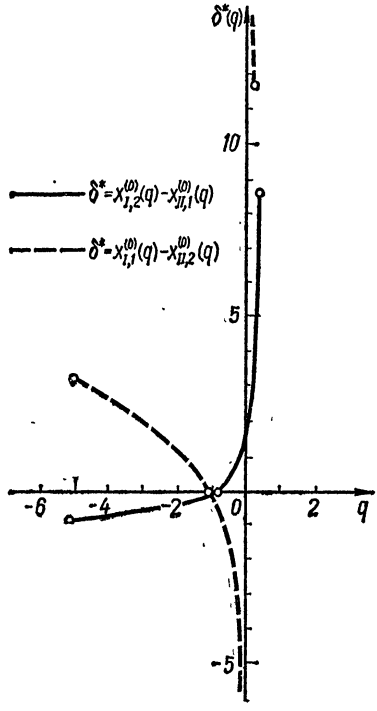


Рис. 220.

функция $\delta^*(p)$ не существует при $p < 0{,}62091$, но при этих значениях параметра p нет и решений системы (VII.37). В примерах 2 и 4 функция $\delta^*(p)$ при $p = 0$ терпит разрыв, но системы (VII.34) и (VII.39) не могут иметь совместных решений, соответствующих значению параметра $p = 0$.

При исследовании системы (VII.27), как уже отмечалось в начале параграфа, объем вычислений и простота расчетных формул в значительной степени зависят от удачного выбора параметра. Для того чтобы это проиллюстрировать, решим повторно пример 4, взяв в качестве параметра

$$y = q.$$

В результате система (VII.39) переходит в два квадратных уравнения:

$$f_1(x;\ q) = qx^2 - x + (q + 5) = 0, \qquad \text{(VII.46)}$$

$$f_2(x;\ q) = 2x^2 - qx - 7 = 0, \qquad \text{(VII.47)}$$

Таблица 68

q	$q+5$	$1-4q(q+5)$	$\sqrt{1-4q(q+5)}$	$x=x_{\mathrm{I}}^{(0)}(q)$		q^2+56	$\sqrt{q^2+56}$	$x=x_{\mathrm{II}}^{(0)}(q)$	
				x_1	x_2			x_1	x_2
+0,04951	+5,04951	0,00000	0,00000	+10,09897	+10,09897	56,00245	7,483478	+1,88325	—1,85849
+0	+5,00000	1,00000	1,00000	$\pm\infty$	+5,00000	56,00000	7,483315	+1,87083	—1,87083
—0,88707	+4,11293	15,59383	3,94890	—2,78946	+1,66216	56,78869	7,535708	+1,66216	—2,10569
—1,00000	+4,00000	17,00000	4,12311	—2,56156	+1,56156	57,00000	7,549834	+1,63746	—2,13746
—1,23023	+3,76977	19,55074	4,42162	—2,20350	+1,39064	57,51347	7,583764	+1,58838	—2,20350
—2,00000	+3,00000	25,00000	5,00000	—1,50000	+1,00000	60,00000	7,745967	+1,43649	—2,43649
—3,00000	+2,00000	25,00000	5,00000	—1,00000	+0,66667	65,00000	8,062258	+1,26556	—2,76556
—4,00000	+1,00000	17,00000	4,12311	—0,64039	+0,39039	72,00000	8,485281	+1,12132	—3,12132
—5,04951	—0,04951	0,00000	0,00000	—0,09902	—0,09902	81,49755	9,027599	+0,99452	—3,51928

решая которые, получаем

$$x_{\mathrm{I}}^{(0)} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4q(q+5)}}{2q};$$

$$x_{\mathrm{II}}^{(0)} = \frac{q \pm \sqrt{q^2+56}}{4}; \qquad \text{(VII.48)}$$

$$\delta^*(q) = x_{\mathrm{I}}^{(0)}(q) - x_{\mathrm{II}}^{(0)}(q).$$

Корни уравнения (VII.47) существуют при любом значении параметра $-\infty \leqslant q \leqslant +\infty$, но уравнение (VII.46) имеет действительные корни только при условии, что

$$-5{,}04951 \leqslant q \leqslant +0{,}04951.$$

Поэтому и функция $\delta^*(q)$ существует только на сегменте $[-5{,}04951;\ +0{,}04951]$.

В табл. 68 вычислены по формулам (VII.48) корни уравнений (VII.46) и (VII.47) для ряда допустимых значений параметра q. При этом корни каждого из рассматриваемых квадратных уравнений мы обозначили соответственно $x_{\mathrm{I},1}^{(0)}$, $x_{\mathrm{I},2}^{(0)}$ и $x_{\mathrm{II},1}^{(0)}$, $x_{\mathrm{II},2}^{(0)}$. В этой же таблице приведены окончательные значения для нулей невязки $\delta^*(q)$, каждый из которых был найден по формуле (VII.17) после четырех приближений:

$$q = y^{(0)} = -0{,}88707;$$

$$x_{\mathrm{I},2}^{(0)} = x_{\mathrm{II},1}^{(0)} = +1{,}66216;$$

$$\delta^*(q) = 0{,}00000;$$

и, соответственно,

$$q = y^{(0)} = -1{,}23023;$$

$$x_{\mathrm{I},1}^{(0)} = x_{\mathrm{II},2}^{(0)} = -2{,}20350;$$

$$\delta^*(q) = 0{,}00000,$$

что еще раз подтверждает полученные ранее результаты.

По данным, приведенным в табл. 68, на рис. 219 построены графики всех четырех корней как функции параметра q, а по ним — невязка $\delta^*(q)$, которая, как и невязка $\delta^*(p)$, при $q=0$ имеет разрыв второго рода (рис. 220). Точки $q=-5{,}04951$ и $q=+0{,}04951$ являются точками разветвления для корней квадратного уравнения (VII.46) и эти же точки ограничивают собой область существования невязки $\delta^*(q)$.

Сравнив табл. 66 и 68, видим, какое большое влияние на объем вычислений может оказать правильный выбор параметра.

§ 89. Решение систем нелинейных уравнений в общем случае. Метод вариации параметров

В общем случае система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.49)}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые переменные; $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — заданные функции n переменных. *Решением системы* (или ее *корнями*) называется совокупность чисел

$$x_1 = x_1^{(0)};\ x_2 = x_2^{(0)};\ \ldots;\ x_n = x_n^{(0)},$$

которые, будучи подставлены на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращают каждое уравнение системы (VII.49) в тождество.

Функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ предполагаем действительнозначными, т. е. будем считать, что при действительных значениях аргументов каждая из заданных функций принимает действительные значения. В этом параграфе определим только действительные решения, а решение систем в комплексной области рассмотрим в § 90.

Система, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, называется *нормальной*. Если число уравнений больше числа неизвестных, то система, вообще говоря, не имеет решений. Если число уравнений меньше числа неизвестных, то система, как правило, имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы найти одно из таких решений, достаточно избыточному числу неизвестных придать произвольные числовые значения и решить полученную нормальную систему. В дальнейшем ограничимся решением только нормальных систем.

Частным случаем системы (VII.49) является система линейных алгебраических уравнений, решение которой хорошо освещено в литературе, так что мы ограничимся лишь краткими замечаниями по этому вопросу в конце параграфа.

Другим частным случаем системы (VII.49) является такой, когда из какого-либо уравнения системы удается выразить одно из неизвестных, например x_n, через остальные. Подставив найденное выражение для x_n во все остальные уравнения, получим $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными. Если из уравнений новой системы удастся исключить еще одно неизвестное, то придем к системе $n-2$ уравнений с $n-2$ неизвестными и т. д. Однако на практике системы, допускающие исключение некоторых из неизвестных, встречаются довольно редко.

Вопросы решения систем нелинейных уравнений в литературе разработаны совершенно недостаточно, причем главным образом рассматриваются только системы с двумя неизвестными. Наиболее распространенными методами для решения таких систем являются метод итераций, метод Ньютона, метод скорейшего спуска и некоторые их модификации. Более подробные сведения по этим вопросам читатель найдет в работах [6, 13, 18, 34, 40, 83, 85, 93, 95, 128, 143, 154, 180, 188]. Поэтому мы непосредственно перейдем к обобщению результатов § 88 и конкретности ради начнем изложение со случая $n = 3$.

Представим систему трех нелинейных уравнений в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0, \\ f_3(x, y, z) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.50)}$$

где f_1, f_2, f_3 — заданные нелинейные функции переменных x, y, z.

Будем одну из независимых переменных считать параметром. Пусть для определенности параметром будет z:

$$z = p.$$

Подставив $z = p$ в любые из двух исходных уравнений, например в первые два, получаем систему с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y; p) &= 0, \\ f_2(x, y; p) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.51)}$$

Найдя одно из решений этой системы:

$$x^{(0)} = x^{(0)}(p); \quad y^{(0)} = y^{(0)}(p)$$

и подставив его в третье уравнение, приходим к уравнению с одним неизвестным:

$$f_3(z; x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \qquad \text{(VII.52)}$$

корень которого в конечном итоге будет функцией только параметра p:

$$z^{(0)} = z^{(0)}(p).$$

Введем невязку

$$\delta_1(p) = p - z^{(0)}(p)$$

и, приравняв ее нулю:

$$\delta_1(p) = p - z^{(0)}(p) = 0, \qquad \text{(VII.53)}$$

получаем *первое разрешающее уравнение*, которое исходную систему с тремя неизвестными (VII.50) сводит к системе (VII.51) с двумя неизвестными.

В самом деле, если найдем корень разрешающего уравнения (VII.53)

$$p = p^{(0)},$$

то при этом значении параметра

$$p = z = z^{(0)}(p)$$

будут одновременно удовлетворяться система (VII.51) и уравнение (VII.52), т. е. исходная система (VII.50). Следовательно, каждый действительный корень уравнения (VII.53) будет однозначно определять собой решение исходной системы (VII.50).

Для решения системы (VII.51) вводим второй параметр, например,

$$y = q.$$

Подставив $y = q$ в первое уравнение системы (VII.51), получаем уравнение с одним неизвестным

$$f_1(x; p, q) = 0, \qquad \text{(VII.54)}$$

корень которого $x^{(0)} = x^{(0)}(p, q)$ вносим во второе уравнение

$$f_2(y; x^{(0)}, p) = 0, \qquad \text{(VII.55)}$$

а затем, аналогично изложенному выше, вводим невязку δ_2 и строим *второе разрешающее уравнение*

$$\delta_2(p, q) = q - y^{(0)}(p, q) = 0, \qquad \text{(VII.56)}$$

где $y^{(0)} = y^{(0)}(p, q)$ есть корень уравнения (VII.55).

Итак, решение системы (VII.50) мы свели к решению пяти уравнений (VII.52)—(VII 56), с одним неизвестным каждое, причем в качестве параметров p и q можно, конечно, выбирать любые из независимых переменных, что приведет лишь к очевидным изменениям обозначений в расчетных формулах. Целесообразность того или иного выбора этих параметров диктуется структурой исходных уравнений в каждом конкретном примере.

Пример 1. Найти с пятью десятичными знаками все действительные корни системы

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2y - 2z + 5 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= x^4 + y - z = 0, \\ f_3(x, y, z) &= xz - y + 3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.57)}$$

Решение. Вводим параметр

$$x = p$$

и, внеся его в первые два уравнения системы (VII.57), приходим к системе с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(y, z; p) &= p^2y - 2z + 5 = 0, \\ f_2(y, z; p) &= y - z + p^4 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.58)}$$

Решив полученную линейную относительно y и z систему, находим

$$y^{(0)} = \frac{2p^4 - 5}{p^2 - 2}; \quad z^{(0)} = \frac{p^6 - 5}{p^2 - 2}. \qquad \text{(VII.59)}$$

Подставив эти корни в третье уравнение системы (VII.57), имеем:

$$x^{(0)} = \frac{y^{(0)} - 3}{z^{(0)}} = \frac{2p^4 - 3p^2 - 1}{p^6 - 5}. \qquad \text{(VII.60)}$$

Вводим невязку

$$\delta(p) = p - x^{(0)}(p)$$

и, приравняв ее нулю, находим первое разрешающее уравнение

$$\delta(p) = p - \frac{2p^4 - 3p^2 + 1}{p^6 - 5} = \frac{p^7 - 2p^4 + 3p^2 - 5p - 1}{p^6 - 5} = 0. \qquad \text{(VII.61)}$$

При $p = \pm\infty$, разделив числитель и знаменатель в (VII.61) на p^6, получаем

$$\delta(\pm\infty) = \lim_{p\to\pm\infty} \frac{p^7 - 2p^4 + 3p^2 - 5p - 1}{p^6 - 5} =$$

$$= \lim_{p\to\pm\infty} \frac{p - \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^4} - \frac{5}{p^5} - \frac{1}{p^6}}{1 - \frac{5}{p^6}} = p.$$

Следовательно, биссектриса первого и третьего координатных углов является асимптотой функции $\delta = \delta(p)$. Кроме того, согласно (VII.61) функция $\delta(p)$ имеет еще две вертикальные асимптоты $p^6 - 5 = 0$, или

$$p = \pm\sqrt[6]{5} = \pm\sqrt{1{,}7099759} = \pm 1{,}3076605.$$

Общий вид графика функции $\delta = \delta(p)$ представлен на рис. 221, который построен по данным приведенным в табл. 69. В той же таблице приведены и окончательные значения трех решений $x = x^{(0)}$, $y = y^{(0)}$, $z = z^{(0)}$ системы (VII.57), соответствующие трем нулям:

$$p = x^{(0)} = -1{,}25936; \quad p = x^{(0)} = -0{,}18081; \quad p = x^{(0)} = +1{,}37706$$

функции $\delta = \delta(p)$. Других нулей функция $\delta(p)$ не имеет, следовательно, система (VII.57) имеет только три указанных выше решения. Промежуточные вычисления, которые были выполнены по формуле (VII.17) для того, чтобы обеспечить заданную точность решений, в табл. 69 опущены, и читателю будет полезно выполнить их самостоятельно в виде упражнения.

Таблица 69

$y^{(0)} = \frac{2p^4 - 5}{p^2 - 2}$; $z^{(0)} = \frac{p^6 - 5}{p^2 - 2}$; $x^{(0)} = \frac{y^{(0)} - 3}{z^{(0)}}$; $\delta(p) = p - x^{(0)}(p)$

p	p^2	p^4	p^6	$p^2 - 2$	$y^{(0)}(p)$	$z^{(0)}(p)$	$x^{(0)}(p)$	$\delta(p)$
—2,00000	4,000000	16,000000	64,000000	+2,000000	+13,5000	+29,5000	+0,35593	—2,35593
—1,50000	2,250000	5,062500	11,390625	+0,250000	+20,5000	+25,5625	+0,68460	—2,18460
—1,31000	1,716100	2,944999	5,053913	—0,283900	—3,13490	—0,18990	+32,3060	—33,6160
—1,3076605	—	—	5,000000	—	—	∓0,00000	±∞	∓∞
—1,25937	1,586013	2,515437	3,989515	—0,413987	—0,07458	+2,44086	—1,25963	+0,00026
—1,25936	1,585988	2,515357	3,989325	—0,414012	—0,07418	+2,44117	—1,25931	—0,00005
—1,00000	1,000000	1,000000	1,000000	—1,000000	+3,00000	+4,00000	0,00000	—1,00000
—0,92000	0,846400	0,716393	0,606355	—1,153600	+3,09225	+3,80864	+0,02422	—0,94422
—0,50000	0,250000	0,062500	0,015625	—1,750000	+2,78571	+2,84821	—0,07524	—0,42476
—0,18081	0,032692	0,001069	0,000035	—1,967308	+2,54046	+2,54153	—0,18081	0,00000
—0,17000	0,028900	0,000835	0,000024	—1,971100	+2,53581	+2,53664	—0,18299	+0,01299
0,00000	0,000000	0,000000	0,000000	—2,000000	+2,50000	+2,50000	—0,20000	+0,20000
+0,50000	0,250000	0,062500	0,015625	—1,750000	+2,78571	+2,84821	—0,07524	+0,57524
+1,00000	1,000000	1,000000	1,000000	—1,000000	+3,00000	+4,00000	0,00000	+1,00000
+1,3076605	—	—	5,000000	—	—	±0,00000	∓∞	±∞
+1,37690	1,895854	3,594261	6,814193	—0,104146	—21,0139	—17,4196	+1,37855	—0,00165
+1,37699	1,896101	3,595201	6,816865	—0,103899	—21,0821	—17,4869	+1,37715	—0,00016
+1,37700	1,896129	3,595305	6,817162	—0,103871	—21,0897	—17,4944	+1,37699	+0,00001
+1,50000	2,250000	5,062500	11,390625	+0,250000	+20,5000	+25,5625	+0,68460	+0,81540
+2,00000	4,000000	16,000000	64,000000	+2,000000	+13,5000	+29,5000	+0,35593	+1,64407

Для того чтобы проверить метод вариации параметров, решим еще систему (VII.57) методом исключения. С этой целью из второго и третьего уравнений (VII.57) находим

$$f_2 + f_3 = x^4 + xz - z \dotplus 3 = 0$$

и тогда

$$z = \frac{3 \dotplus x^4}{1 - x}; \quad y = 3 + xz = \frac{3 \dotplus x^5}{1 - x}. \tag{VII.62}$$

Подставив эти результаты в первое уравнение системы (VII.57), получаем

$$\frac{x^2 (3 + x^5)}{1 - x} - \frac{2 (3 + x^4)}{1 - x} + 5 = 0$$

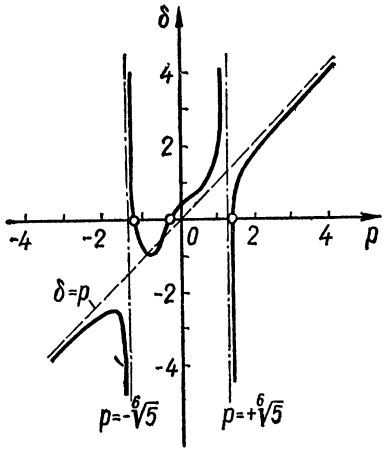


Рис. 221.

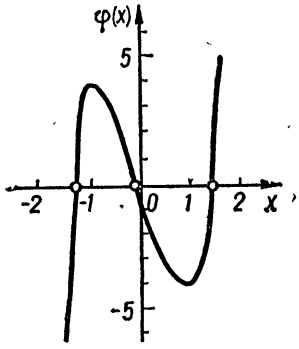


Рис. 222.

или, умножив на $(1 - x)$, приведя подобные члены и обозначив полученный полином через $\varphi(x)$,

$$\varphi(x) = x^7 - 2x^4 \dotplus 3x^2 - 5x - 1 = 0; \tag{VII.63}$$

$$\varphi'(x) = 7x^6 - 8x^3 + 6x - 5; \quad \varphi''(x) = 6(7x^5 - 4x^2 \dotplus 1).$$

График функции $\varphi(x)$ представлен на рис. 222. Согласно этому графику, уравнение (VII.63) имеет три корня:

$$x^{(0)} \approx -1{,}3; \quad x^{(0)} \approx -0{,}2; \quad x^{(0)} \approx \dotplus 1{,}4.$$

Уточнив эти корни по формуле Ньютона (VII.14), что читателю также полезно выполнить в виде упражнения, и вычислив затем по формулам (VII.62) $y = y^{(0)}$ и $z = z^{(0)}$, находим окончательно

$$x^{(0)} = -1{,}25936; \quad y^{(0)} = -0{,}074244; \quad z^{(0)} = +2{,}44112;$$

которые после подстановки в исходную систему (VII.57) дают $f_1(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = \dotplus 0{,}00001$; $f_2(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = -0{,}000007$; $f_3(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = -0{,}000005$.

Аналогичным путем определяем и контролируем второе решение:

$$x^{(0)} = -0{,}18081; \quad y^{(0)} = +2{,}54047; \quad z^{(0)} = \dotplus 2{,}54153;$$

$$f_1 = -0{,}000006; \quad f_2 = \dotplus 0{,}000009; \quad f_3 = -0{,}000004,$$

и, соответственно, третье решение:

$$x^{(0)} = +1{,}37700; \quad y^{(0)} = -21{,}0895; \quad z^{(0)} = -17{,}4942;$$
$$f_1 = -0{,}00001; \quad f_2 = +0{,}000005; \quad f_3 = -0{,}00001.$$

Сравнив найденные результаты с результатами, приведенными в табл. 69, убеждаемся, что они совпадают в пределах точности вычислений.

Пример 2. Определить с шестью десятичными знаками действительные корни системы

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^y + y^2 + z^3 - \frac{1}{2}z = 0, \\ f_2(x, y, z) &= x \operatorname{th}\frac{y-x}{z} + yz + 1{,}25 = 0, \\ f_3(x, y, z) &= \sin(x + y^2 + z) + xyz + 0{,}80 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.64)}$$

Решение. Взяв в качестве первого параметра

$$x = p,$$

получаем первое разрешающее уравнение

$$\delta_1(p) = p - x^{(0)}(p) = 0, \qquad \text{(VII.65)}$$

где $x^{(0)}$ есть корень уравнения

$$f_3(x; y^{(0)}, z^{(0)}) = \sin(x + \alpha) + kx + 0{,}80 = 0;$$
$$\alpha = y^{(0)^2} + z^{(0)}; \quad k = y^{(0)}z^{(0)}, \qquad \text{(VII.66)}$$

а $y^{(0)}$ и $z^{(0)}$ — корни вспомогательной системы

$$\left.\begin{aligned} f_1(y, z; p) &= p^y + y^2 + z^3 - \frac{1}{2}z = 0; \\ f_2(y, z; p) &= p \operatorname{th}\frac{y-p}{z} + yz + 1{,}25 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.67)}$$

Для решения системы (VII.67) вводим второй параметр

$$y = q$$

и более удобную при исследовании систем с двумя неизвестными невязку $\delta_2^* = z_{\mathrm{I}}^{(0)} - z_{\mathrm{II}}^{(0)}$, так что вспомогательным разрешающим уравнением будет

$$\delta_2^*(p, q) = z_{\mathrm{I}}^{(0)}(p, q) - z_{\mathrm{II}}^{(0)}(p, q) = 0, \qquad \text{(VII.68)}$$

где $z_{\mathrm{I}}^{(0)}$ и $z_{\mathrm{II}}^{(0)}$ есть соответственно корни первого и второго уравнений системы (VII.67), в которой необходимо положить $y = q$:

$$f_1(z; p, q) = z^3 - \frac{1}{2}z + \beta = 0; \quad \beta = p^q + q^2; \quad p \geqslant 0; \qquad \text{(VII.69)}$$

$$f_2(z; p, q) = qz + 1{,}25 + p \operatorname{th}\frac{q-p}{z} = 0. \qquad \text{(VII.70)}$$

Придав параметру $x = p$ ряд значений и выполнив соответствующие вычисления, получаем результаты, приведенные в табл. 70. При этом корни разрешающих уравнений (VII.65) и (VII.68) находим по методу линейной аппроксимации, а каждое из вспомогательных уравнений с одним неизвестным, к которым мы пришли, в данном примере целесообразно решать по методу Ньютона.

Таблица 70

p	$\delta_1(p)$	$x^{(0)}$	$y^{(0)} = (0)$	$z^{(0)} = z_{\mathrm{I}}^{(0)}$	β	$\delta_2^*(p, q)$
0,0	—1,415375	1,415375	1,048342	—1,192359	1,099021	0,000000
0,5	—1,008863	1,508863	0,882368	—1,248308	1,321050	0,000000
1,0	—0,008089	1,008089	0,942642	—1,370433	1,888574	0,000000
2,0	+1,405130	0,594870	1,244235	—1,681933	3,917050	0,000000
5,0	+4,7179	0,2821	1,8289	—2,8750	22,3269	—0,0001

Воспользовавшись формулой (VII.17) и выполнив еще два приближения (что читателю полезно осуществить в виде упражнения), находим корни системы (VII.64):

$$p = x^{(0)} = +1{,}004018; \qquad q = y^{(0)} = +0{,}943613: \quad z_{\mathrm{I}}^{(0)} = z_{\mathrm{II}}^{(0)} = -1{,}371527.$$

Подставив эти корни в исходную систему, имеем

$$x^y = 1{,}003791; \qquad \frac{y-x}{z} = 0{,}044042; \quad \operatorname{th}\frac{y-x}{z} = 0{,}044014;$$

$$x + y^2 + z = 0{,}522896; \quad \sin(x + y^2 + z) = 0{,}499391$$

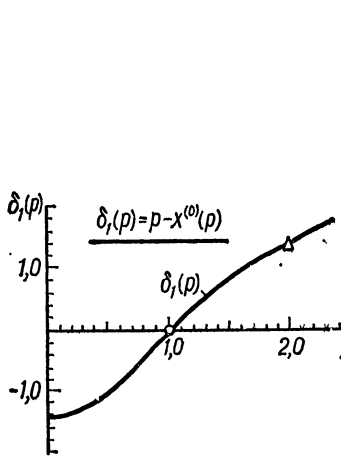


Рис. 223.

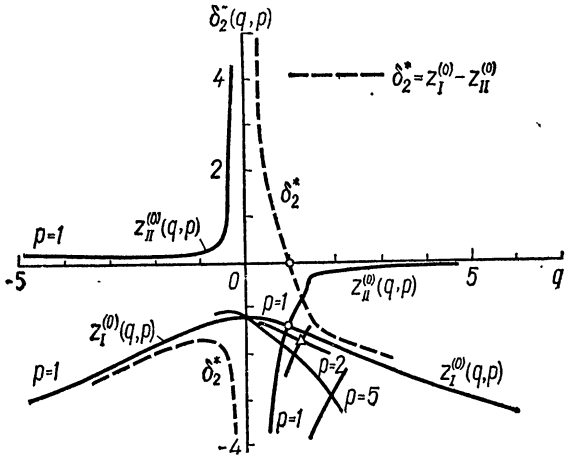


Рис. 224.

и тогда

$$f_1(x, y, z) = -0{,}0000002; \qquad f_2(x, y, z) = f_3(x, y, z) = 0{,}000000,$$

так что заданная в условии примера точность достигнута.

Других действительных решений система (VII.64) не имеет, что вполне ясно из рис. 223 и 224, на которых построены графики функций $\delta_1(p)$; $z_{\mathrm{I}}^{(0)}(q, p)$; $z_{\mathrm{II}}^{(0)}(q, p)$; $\delta_2^*(q, p) = z_{\mathrm{I}}^{(0)} - z_{\mathrm{II}}^{(0)}$ для $p = 1$ (а также частично для $p = 2$ и $p = 5$).

При этом надо учесть, что при $p \to \infty$ из (VII.66) и (VII.67) имеем:

$$k = y^{(0)} z^{(0)} \to \infty; \quad x^{(0)} \to 0,$$

следовательно,

$$\lim_{p \to +\infty} \delta_1(p) = p - x^{(0)} = +\infty.$$

При $p < 0$ система (VII.64) действительных корней не имеет, так как в действительной области функция p^y определена только при $p \geqslant 0$. Более подробно пример 2 рассмотрен в [148, гл. 3, § 23].

Полученные результаты легко обобщить на случай системы n нелинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0,\\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0,\\ &f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.71)}$$

Для того чтобы решить систему (VII.71), введем параметр

$$x_n = p$$

и рассмотрим систему $n - 1$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; p) = 0,\\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; p) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; p) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.72)}$$

Определив ее корни $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$ при каком-либо фиксированном значении p и подставив их в последнее уравнение системы (VII.71), приходим к уравнению с одним неизвестным x_n:

$$f_n(x_n;\ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) = 0, \qquad \text{(VII.73)}$$

корень которого будет являться функцией только параметра p:

$$x_n^{(0)} = x_n^{(0)}(p),$$

так как все $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$ суть фиксированные числа, определяемые в конечном итоге только величиной параметра p.

Введя невязку

$$\delta_n(p) = p - x_n^{(0)}(p)$$

и приравняв ее нулю:

$$\delta_n(p) = p - x_n^{(0)}(p) = 0, \qquad \text{(VII.74)}$$

получаем *разрешающее уравнение для системы (VII.71)*. Таким образом, систему уравнений (VII.71) всегда можно свести к системе $n - 1$ уравнений (VII.72) и двум уравнениям (VII.73), (VII.74) с одним неизвестным. Продолжив этот процесс, придем к совокупности $2n - 1$ уравнений, каждое с одним неизвестным.

Аналогичным путем, вводя $n - m$ параметров (где $m < n$):

$$x_{m+1} = p_1,\ x_{m+2} = p_2, \ldots,\ x_n = p_{n-m}, \qquad \text{(VII.75)}$$

систему n нелинейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = 0,\\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.71')}$$

можно свести к системе m уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \dots, x_m;\ p_1, p_2, \dots, p_{n-m}) = 0,\\ &f_2(x_1, x_2, \dots, x_m;\ p_1, p_2, \dots, p_{n-m}) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f_m(x_1, x_2, \dots, x_m;\ p_1, p_2, \dots, p_{n-m}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.76)}$$

и к вспомогательной системе $n-m$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_{m+1}(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n;\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) = 0,\\ &f_{m+2}(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n;\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f_n(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n;\ x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.77)}$$

в которой $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}$ суть корни системы (VII.76), найденные при фиксированных значениях параметров $p_1, p_2, \dots, p_{n-m}$.

Для того чтобы системы (VII.76) и (VII.77) были эквивалентны исходной системе (VII.71), параметры p_j надо подобрать так, чтобы все невязки

$$\delta_j = p_j - x_j^{(0)}(p_1, p_2, \dots, p_{n-m});\quad j = 1, 2, \dots, n-m \qquad \text{(VII.78)}$$

обращались в нуль, в результате чего приходим еще к одной вспомогательной системе уравнений с $n-m$ неизвестными.

Пример 3. Определить одно из решений системы с четырьмя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x, y, z, w) = e^{x+y} + \operatorname{sh}\frac{z+w}{x} - 1{,}0 = 0;\\ &f_2(x, y, z, w) = e^{x-y} + \operatorname{sh}\frac{z-w}{2y} - 2{,}5 = 0;\\ &f_3(x, y, z, w) = xy^2 - \operatorname{ch}\frac{x+y+z}{w} + 1{,}0 = 0;\\ &f_4(x, y, z, w) = 3x^2 + w^3 - \operatorname{th}\frac{y-xw}{z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.79)}$$

Решение. Взяв в качестве параметров

$$z = p,\quad w = q,$$

из первых двух уравнений системы (VII.79) имеем

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x, y; p, q) = e^x e^y + \operatorname{sh}\frac{\alpha}{x} - 1{,}0 = 0;\\ &f_2(x, y; p, q) = e^x e^{-y} + \operatorname{sh}\frac{\beta}{y} - 2{,}5 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.80)}$$

где $\alpha = p + q$; $\beta = \frac{1}{2}(p - q)$.

Полученную систему с двумя неизвестными x и y решаем, вводя параметр τ (который в отличие от параметров p и q будем считать вспомогательным):

$$x = \tau,$$

в результате чего приходим к следующим расчетным формулам:

$$e^{y^{(0)}} = e^{-\tau}\left(1 - \operatorname{sh}\frac{\alpha}{\tau}\right); \quad e^{x^{(0)}} = e^{y^{(0)}}\left(2{,}5 - \operatorname{sh}\frac{\beta}{y^{(0)}}\right); \tag{VII.81}$$

$$\delta(\tau) = \tau - x^{(0)}(\tau) = 0. \tag{VII.82}$$

Определив корни $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ системы (VII.80), из исходного третьего уравнения (VII.79) находим

$$z^{(0)} = w \operatorname{Arch}\gamma - \alpha_1, \tag{VII.83}$$

где $\alpha_1 = x^{(0)} + y^{(0)}$; $\gamma = 1 + x^{(0)}\,y^{(0)2}$, и тогда четвертое исходное уравнение переходит в уравнение с одним неизвестным w:

$$f_4(w;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)}) = w^3 - \operatorname{th}\frac{y^{(0)} - wx^{(0)}}{z^{(0)}} + 3x^{(0)2} = 0. \tag{VII.84}$$

Определив $z^{(0)}$ и $w^{(0)}$, вычисляем невязки $\delta_1(p, q)$ и $\delta_2(p, q)$, каждую из которых надо обратить в нуль:

$$\left.\begin{aligned}\delta_1(p, q) &= p - z^{(0)}(p, q) = 0,\\ \delta_2(p, q) &= q - w^{(0)}(p, q) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{VII.85}$$

Корни p и q разрешающей системы (VII.85) находим при помощи метода вариации параметра, вводя еще один вспомогательный параметр $p = \sigma$ или $q = \sigma$. Можно также применять метод линейной аппроксимации [148, гл. 3, § 22].

Таблица 71

j	$p = z$	$q = w$	$x^{(0)}$	$y^{(0)}$	$z^{(0)}$	$w^{(0)}$	$\delta_1(p, q)$	$\delta_2(p, q)$
1	0,000000	−1,000000	1,089133	−0,369970	0,018691	−1,367737	−0,018691	+0,367737
2	0,000000	−1,500000	1,298500	−0,410695	0,149512	−1,595077	−0,149512	+0,095077
3	0,500000	−1,500000	1,196652	−0,535832	0,542378	−1,491171	−0,042378	−0,008829
4	0,622000	−1,438000	1,140890	−0,565521	0,617287	−1,436583	+0,004713	−0,001417
5	0,605814	−1,441684	1,146528	−0,561319	0,606062	−1,441712	−0,000248	+0,000028
6	0,606558	−1,441442	1,146238	−0,561509	0,606557	−1,441442	+0,000001	0,000000

Основные результаты приведены в табл. 71, а все промежуточные вычисления читателю полезно выполнить в виде упражнения, причем для Arch γ в данном случае надо брать отрицательное значение. Таким образом, искомым решением системы (VII.79) будет:

$$x^{(0)} = +1{,}146238; \quad y^{(0)} = -0{,}561509;$$

$$p^{(0)} = z^{(0)} = 0{,}606558;$$

$$q^{(0)} = w^{(0)} = -1{,}441442.$$

Подставив эти значения в исходные уравнения, получаем:

$$f_1(x, y, z, w) = 0{,}000003;$$
$$f_2(x, y, z, w) = 0{,}000001;$$
$$f_3(x, y, z, w) = 0{,}000000;$$
$$f_4(x, y, z, w) = 0{,}000000,$$

так что в найденном решении все цифры значащие.

Дальнейшая разработка изложенных выше вопросов, в частности, оценка погрешности предлагаемого метода, исследование быстроты его сходимости и выработка методики, требующей наименьшего объема вычислений, представляет большой теоретический и практический интерес.

Метод вариации параметров можно применять также для решения линейных алгебраических систем n уравнений. При этом если система (VII.71) является линейной, то и все невязки будут линейными функциями соответствующих параметров, что существенно упрощает процесс решения таких систем. Действительно, линейная функция двух переменных полностью определяется двумя точками, и поэтому корень разрешающего уравнения (VII.74), которое сводит систему n уравнений к системе $n-1$ уравнений, однозначно определяется двумя, произвольно выбранными, пробами.

Пример 4. Решить линейную систему с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 3x - 5y + 2z + 1 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= 2x + 7y - 3z - 13 = 0, \\ f_3(x, y, z) &= x + 2y + 4z - 24 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.86)}$$

Решение. Возьмем в качестве параметра $z = p$ и вычислим две пробы, например, при $p = 0$ и $p = 1$.

Подставив значение параметра $p = z = 0$ в первые два уравнения исходной системы, приходим к системе с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y; p) &= 3x - 5y + 1 = 0, \\ f_2(x, y; p) &= 2x + 7y - 13 = 0, \end{aligned}\right\}$$

корни которой

$$x^{(0)}(p) = \frac{58}{31}; \quad y^{(0)}(p) = \frac{41}{31}.$$

Внося эти корни в третье уравнение системы (VII.86), имеем:

$$\frac{58}{31} + 2 \cdot \frac{41}{31} + 4z = 24; \quad z^{(0)}(p) = \frac{604}{4 \cdot 31}$$

и, следовательно, при $p = 0$ невязка

$$\delta(p) = p - z^{(0)}(p) = -\frac{604}{4 \cdot 31}.$$

Повторив эти же вычисления, последовательно определяем, что при $p = 1$

$$x^{(0)}(p) = \frac{59}{31}; \quad y^{(0)}(p) = \frac{54}{31}; \quad z^{(0)}(p) = \frac{577}{4 \cdot 31}; \quad \delta(p) = -\frac{453}{4 \cdot 31}.$$

Воспользовавшись двумя пробами $\left[p_1 = 0; \ \delta(p_1) = -\frac{604}{4 \cdot 31}\right]$ и $\left[p_2 = 1; \ \delta(p_2) = -\frac{453}{4 \cdot 31}\right]$, согласно формуле (VII.17), находим, что

$$\delta(p) = 0 \quad \text{при} \quad p = p^{(0)} = 4,$$

и тогда

$$x^{(0)} = 2; \qquad y^{(0)} = 3; \qquad z^{(0)} = p = 4$$

есть искомые корни системы (VII.86).

Упражнение 1. Решить систему (VII.86), взяв в качестве исходных значений параметра $p = 2$ и $p = 5$.

Примеры, рассмотренные в § 88 и 89, показывают, что метод вариации параметров во многих случаях более эффективен, чем другие существующие методы. Дальнейшее сравнение читатель легко может провести самостоятельно, выполнив

упражнение 2, в котором приведены полученные ранее результаты и указаны источники заимствования. Этой подборкой исчерпываются почти все примеры систем нелинейных уравнений, решенных различными методами в цитированной литературе.

Упражнение 2. Исследовать при помощи метода вариации параметров приведенные ниже системы уравнений и сравнить результаты с результатами, полученными другими методами *.

$$1)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 4y^3 - 2x^3 - 20x^2 + 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= 3y^3 - 2x^2 + 10y - 5 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 0{,}265$; $y^{(0)} = 0{,}480$ [6, стр. 272; 83, стр. 105].

$$2)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 4x^2 + y^2 + 2xy - y - 2 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2x^2 + 3xy + y^2 - 3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 0{,}500000$; $y^{(0)} = 1{,}000000$ [7, т. II, стр. 160].

$$3)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= xy^3 - y - 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 1{,}2343$; $y^{(0)} = 1{,}6615$ [34, стр. 152].

$$4)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= 2x^2 + y^2 - 4z = 0, \\ f_3(x, y, z) &= 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 0{,}7852$; $y^{(0)} = 0{,}4966$; $z^{(0)} = 0{,}3699$ [34, стр. 453].

Указание. Данную систему легко свести к системе с двумя неизвестными, исключив из нее x^2.

$$5)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= x^3 - y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 0{,}8261$; $y^{(0)} = 0{,}5636$ [34, стр. 476].

$$6)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x + x^2 - 2yz - 0{,}1 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= y - y^2 + 3xz + 0{,}2 = 0, \\ f_3(x, y, z) &= z + z^2 + 2xy - 0{,}3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = +0{,}0327$; $y^{(0)} = -0{,}2007$; $z^{(0)} = +0{,}2453$ дают $f_1 = +0{,}032$; $f_2 = -0{,}017$; $f_3 = -0{,}007$ [34, стр. 489].

$$7)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= +x^3 + 2x^2 - 3xy^2 + 6xy - x - 2y^2 + y + 4 = 0, \\ f_2(x, y) &= -y^3 + 3y^2 + 3x^2y + 4xy - y - 3x^2 - x - 2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ **:

$$x_1^{(0)} = -0{,}008; \qquad y_1^{(0)} = +1{,}685;$$

$$x_2^{(0)} = +0{,}2477; \qquad y_2^{(0)} = -0{,}8210;$$

$$x_3^{(0)} = -2{,}2; \qquad y_2^{(0)} = +2{,}4 \text{ [40, стр. 188—195].}$$

$$8)\quad \left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2y^2 - 2x^3 - 5y^3 + 10 = 0, \\ f_2(x, y) &= x^4 - 8y + 1 = 0. \end{aligned}\right\}$$

---

* В ответах мы указываем только те решения, которые получены в цитированной литературе (и с той точностью, с какой они там определены), так что читателю следует проверить, не имеют ли эти системы большего числа решений.

** Данная система получена из уравнения с комплексными коэффициентами: $z^3 + (2 - 3i)z^2 - (1 - i)z + (4 + 2i) = 0$; $z = x + iy$. При разделении действительных и мнимых частей в [40] допущены неточности в знаках, и эта система должна иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= +x^3 + 2x^2 - 3xy^2 + 6xy - x - 2y^2 - y + 4 = 0, \\ f_2(x, y) &= -y^3 + 3y^2 + 3x^2y + 4xy - y - 3x^2 + x + 2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = -1{,}97342$; $y^{(0)} = +2{,}02121$ [18; 40, стр. 196].

$$\left.\begin{aligned} 9)\ f_1(x, y) &= e^{x+y} + y = 0, \\ f_2(x, y) &= e^{x-y} + x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = -0{,}7024$; $y^{(0)} = -0{,}3495$ [83, стр. 100 и 104].

$$\left.\begin{aligned} 10)\ f_1(x, y, z) &= x + y + z^2 - 0{,}2 = 0, \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 0{,}7 = 0, \\ f_3(x, y, z) &= x^2 + y + z - 1{,}0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x_1^{(0)} = -0{,}4199$; $y_1^{(0)} = +0{,}1081$; $z_1^{(0)} = +0{,}7155$;
$x_2^{(0)} = -0{,}4843$; $y_2^{(0)} = +0{,}6763$; $z_2^{(0)} = +0{,}0890$ [83, стр. 110].

Указание. Данную систему проще всего решить, исключив из нее y и сведя ее таким образом к системе с двумя неизвестными.

$$\left.\begin{aligned} 11)\ f_1(x, y) &= x - \sin x \operatorname{ch} y = 0, \\ f_2(x, y) &= y - \cos x \operatorname{sh} y = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 7{,}4977$; $y^{(0)} = 2{,}7687$ [85, стр. 41].

$$\left.\begin{aligned} 12)\ f_1(x, y) &= x^3 + y^3 - 4 = 0, \\ f_2(x, y) &= x^4 + y^2 - 3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = +0{,}96764$; $y^{(0)} = +1{,}45715$ [93, стр. 11 и 69].

$$\left.\begin{aligned} 13)\ f_1(x, y) &= 4 + x + y - x^2 + 2xy + 3y^2 = 0, \\ f_2(x, y) &= 1 + 2x - 3y + x^3 + xy - 2y^2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x_1^{(0)} = +3{,}33862$; $y_1^{(0)} = -2{,}98438$;

$x_2^{(0)} = -1{,}53344$; $y_2^{(0)} = +0{,}06112$ [128, стр. 408—413].

$$\left.\begin{aligned} 14)\ f_1(x, y) &= \sin x + 2 \sin y - 1{,}0 = 0, \\ f_2(x, y) &= 2 \sin 3x + 3 \sin 3y - 0{,}3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 2{,}070 \dfrac{\pi}{6} = 1{,}0838$; $y^{(0)} = 0{,}0581$ [180, стр. 288].

$$\left.\begin{aligned} 15)\ f_1(x, y) &= xy(2x^2 - y^2) + 16(x + y) - 48 = 0, \\ f_2(x, y) &= x^2 + y^2 - 16 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} \approx 1{,}84$; $y^{(0)} \approx 3{,}55$ [180, стр. 232].
Замечание. Найденные корни еще недостаточно точны, так как для них

$$f_1(x, y) = +7{,}6; \quad f_2(x, y) = -1{,}4.$$

$$\left.\begin{aligned} 16)\ f_1(x, y) &= 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y) &= xy^3 - y - 4 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $x^{(0)} = 1{,}2349$; $y^{(0)} = 1{,}6610$; $f_1(x, y) = +0{,}0075$; $f_2(x, y) = -0{,}0020$ [188, стр. 66].

§ 90. Решение нелинейных уравнений и их систем в комплексной области

Любую функцию $f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитическую или неаналитическую, всегда можно представить в виде *

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

где u и v — действительные функции действительных переменных x и y.

Поэтому задача решения системы n уравнений (VII.49) (или одного такого уравнения при $n = 1$) в комплексной области всегда может быть сведена к решению системы $2n$ действительных уравнений с $2n$ неизвестными.

Если исходная система в комплексной области линейна, то и в действительной области она сохраняет свою линейность, и ее решение при не слишком больших значениях n, как отмечалось в § 88, не представляет каких-либо трудностей. Нелинейная система (VII.49) приводится к системе $2n$ нелинейных уравнений, но и в этом случае мы не встречаем принципиальных трудностей, только резко увеличивается объем вычислений.

Пример 1. Определить в комплексной области корни уравнения Валлиса

$$f(z) = z^3 - 2z - 5 = 0, \qquad \text{(VII.87)}$$

которое при действительном $z = x$ уже было рассмотрено в § 86.

Решение. Так как

$$z = x + iy, \qquad \text{где } i = \sqrt{-1},$$

то

$$z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3),$$

поскольку по определению $i^2 = -1$, и тогда $i^3 = i \cdot i^2 = -i$.

Подставив эти значения в (VII.87), имеем

$$(x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) - 2(x + iy) - 5 = 0.$$

Разделив действительные и мнимые части и приравняв их нулю, получаем систему двух действительных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^3 - 3xy^2 - 2x - 5 = 0, \\ f_2(x, y) &= 3x^2y - y^3 - 2y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII.88)}$$

которая эквивалентна исходному уравнению (VII.87) с комплексным переменным $z = x + iy$.

Решаем эту систему по методу вариации параметра, причем в данном случае в качестве параметра удобнее ввести

$$x = p.$$

Из первого уравнения (VII.88), в котором надо предварительно заменить x на p, находим

$$y^2 = \frac{p^3 - 2p - 5}{3p}. \qquad \text{(VII.89)}$$

Из второго уравнения (VII.88), после сокращения на y, имеем:

$$x^2 = \frac{y^3 + 2y}{3y} = \frac{y^2 + 2}{3}; \quad y \neq 0. \qquad \text{(VII.90)}$$

* Мы предполагаем, что читатель знаком с комплексными числами в том объеме, в каком они изучаются в средней школе. В противном случае необходимо сначала прочесть § 119—123 гл. X.

Определив по известному $x^2 = x^2(p)$ корень $x = x^{(0)}(p)$, находим невязку $\delta = p - x^{(0)}$ и, приравняв ее нулю:

$$\delta(p) = p - x^{(0)}(p) = 0, \qquad \text{(VII.91)}$$

получаем разрешающее уравнение для системы (VII.88).

График функции $\delta(p)$ изображен на рис. 225, а все вычисления, необходимые для построения этого графика и для уточнения нулей функции $\delta(p)$, приведены в табл. 72. Легко также доказать (и это читателю полезно выполнить как упражнение), что $\delta \to \pm\infty$ при $p \to \pm\infty$.

В качестве дополнительных пояснений заметим, что в данном примере функция $\delta(p)$ имеет две ветви:

$$\delta_+ = p - x_+^{(0)}(p) \quad \text{и} \quad \delta_- = p - x_-^{(0)}(p),$$

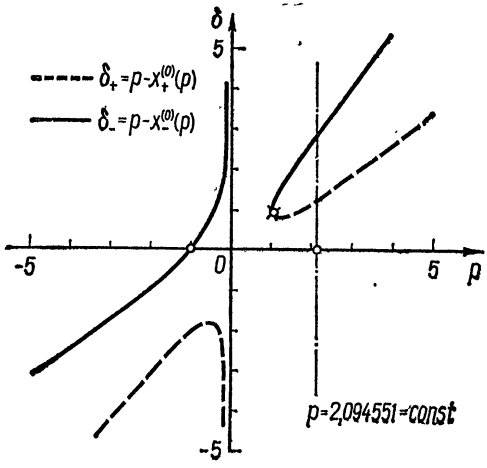


Рис. 225.

соответствующие положительному и отрицательному значению корней $x^{(0)} = \pm\sqrt{x^2(p)}$. Точка $(p = 1;\ \delta = 1)$, в которой $x^{(0)} = 0$, является точкой разветвления — в этой точке $\delta_+(p) = \delta_-(p)$ и, следовательно, обе ветви функции $\delta(p)$ совпадают. На интервале (0; 1) функция $\delta(p)$ не существует, так как при $0 < p < 1$ величина $x^2(p)$ принимает отрицательные значения, так что $x^{(0)}$ будет мнимым. Мы должны исключить интервал (0; 1) из рассмотрения, поскольку x и y всегда должны быть величинами действительными.

При $p = x^{(0)} = -1{,}047276$ невязка $\delta(p)$ обращается в нуль, и так как каждому значению p согласно (VII.89) соответствует два значения $y^{(0)} = \pm\sqrt{y^2(p)}$, в частности

$$y^{(0)}(-1{,}047276) = \pm\sqrt{1{,}290359} = \pm 1{,}135940,$$

то первыми двумя корнями уравнения (VII.87) будут

$$z_{1;2} = -1{,}047276 \pm 1{,}135940\,i.$$

При $p = x^{(0)} = +2{,}094551$ величина $y^2 = 0$, а следовательно, и $y = 0$, так что второе уравнение системы (VII.88) удовлетворяется тождественно при любом значении x. Поэтому точка пересечения прямой $p = 2{,}094551 = \text{const}$ (которая изображена на рис. 225 штрих-пунктирной линией) является вторым нулем функции $\delta(p)$.

Итак, уравнение Валлиса (VII.87) имеет два комплексно сопряженных корня

$$z_1 = -1{,}047276 + 1{,}135940\,i; \quad z_2 = -1{,}047276 - 1{,}135940\,i$$

и один действительный корень

$$z_3 = x = +2{,}094551; \qquad y = 0,$$

который был найден в § 86.

Других корней согласно рис. 225 уравнение (VII.87) не имеет, как и должно быть, поскольку из теоремы Гаусса следует, что кубическое уравнение должно иметь точно три корня (действительных или комплексных).

Таблица 72

$y^2 \equiv y^2(p) = \dfrac{p^3 - 2p - 5}{3p}$ $\quad x^2(p) = \dfrac{y^2 + 2}{3}$ $\quad \delta(p) = p - x^{(0)}(p)$.

p	p^3	$y^2(p)$	$x^2(p)$	$x^{(0)}(p)$	$\delta_+(p)$	$\delta_-(p)$
−3,000000	−27,000000	+2,888889	+1,629630	±1,276570	−4,276570	−1,723430
−2,000000	−8,000000	+1,500000	+1,166667	±1,080124	−3,080124	−0,919876
−1,047276	−1,148639	+1,290359	+1,096786	±1,047276	−2,094552	0,000000
−1,000000	−1,000000	+1,333333	+1,111111	±1,054093	−2,054093	+0,054093
−0,500000	−0,125000	+2,750000	+1,583333	±1,258306	−1,758306	+0,758306
−0,250000	−0,015625	+6,020833	+2,673611	±1,635118	−1,885118	+1,385118
∓0	∓0	±∞	±∞	±∞	−∞	+∞
+1,000000	+1,000000	−2,000000	0,000000	0,000000	+1,000000	+1,000000
+1,200000	+1,728000	−1,575556	+0,141481	±0,376140	+0,823860	+1,576140
+2,000000	+8,000000	−0,166667	+0,611111	±0,781736	+1,218264	+2,781736
+2,094551	+9,189097	+0,000001	+0,666667	±0,816497	+1,278054	+2,911048
+3,000000	+27,000000	+1,777778	+1,259259	±0,122167	+1,877833	+4,122167

Пример 2. Определить корни уравнения [34]

$$f(z) = e^z - 0{,}2z + 1 = 0; \quad z = x + iy \tag{VII.92}$$

в комплексной области.

Решение. Так как согласно формуле Эйлера (которую рассмотрим в § 132 гл. X).

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{VII.93}$$

то, разделив действительные и мнимые части в (VII.92), приходим к системе двух действительных уравнений

$$\left.\begin{aligned} e^x \cos y - 0{,}2x + 1 = 0, \\ e^x \sin y - 0{,}2\,y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII.94}$$

Для того чтобы решить эту систему, вводим параметр

$$x = p.$$

Тогда из первого уравнения (VII.94) получаем

$$\cos y = e^{-p}(0{,}2p - 1)$$

или

$$y^{(0)} = \pm \arccos \gamma + 2k\pi; \quad \gamma = e^{-p}(0{,}2p - 1); \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Подставив это значение во второе уравнение, имеем

$$e^{x^{(0)}} = \frac{0{,}2y^{(0)}}{\sin y^{(0)}},$$

причем разрешающим уравнением для системы (VII.94) является уравнение

$$\delta(p) = p - x^{(0)}(p) = 0.$$

При $k = 0$ получаем две пары наименьших по модулю корней системы (VII.94):

$$p = x^{(0)} = +0{,}106676; \qquad y^{(0)} = \pm 2{,}645904.$$

Все необходимые вычисления приведены в табл. 73. Выполнив еще один шаг (увеличив соответственно точность вычислений при $n \geqslant 3$), эти корни можно получить с 10—12 десятичными знаками.

Таблица 73

n	$x = p_n$	e^{-p}	$\cos y$	$y^{(0)}$	$\sin y^{(0)}$	$e^{x^{(0)}}$	$x^{(0)}$	$\delta\,(p)$
0	0	+1	—1	π	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
1	0,10	0,904837	—0,886740	2,661041	0,462269	1,151 295	0,140887	—0,040887
2	0,11	0,895834	—0,876126	2,638564	0,482081	1,094656	0,090440	+0,019560
3	0,10676	0,898742	—0,879552	2,645717	0,475802	1,112108	0,106257	+0,000503
4	0,106676	0,898817	—0,879611	2,645904	0,475638	1,112570	0,106673	+0,000003

Таблица 74

n	$z_n = z$	e^z	$f(z)$	$f'(z)$	$-\varepsilon_n(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}$
0	$3{,}142i$	—1,000	$-0{,}628i$	—1,200	$-0{,}524i$
1	$2{,}618i$	$-0{,}868+0{,}500i$	$+0{,}132-0{,}024i$	$-1{,}068+0{,}500i$	$+0{,}153+0{,}040i$
2	$0{,}153+2{,}658i$	$-1{,}030+0{,}541i$	$-0{,}061+0{,}009i$	$-1{,}230+0{,}541i$	$-0{,}044-0{,}012i$
3	$0{,}109+2{,}646i$	$-0{,}978+0{,}535i$	$0{,}000+0{,}006i$	$-1{,}178+0{,}535i$	$-0{,}002+0{,}004i$
4	$0{,}107+2{,}650i$	$-0{,}981+0{,}525i$	$-0{,}002-0{,}005i$	$-1{,}181+0{,}525i$	$-0{,}000-0{,}004i$
5	$0{,}107+2{,}646i$	$-0{,}977+0{,}534i$	$+0{,}002+0{,}004i$	$-1{,}177+0{,}534i$	

Упражнение 1. Определить с шестью десятичными знаками корни системы (VII.94) при $k = 1$.

Если $f(z)$ — аналитическая функция, то уравнение с одним неизвестным

$$f(z) = 0; \quad z = x + iy \tag{VII.95}$$

можно решать методом Ньютона. В этом случае, как и в § 85, отправляясь от какого-либо начального приближения z_0, шаг за шагом уточняем значение простого корня по формуле

$$z_{n+1} = z_n - \varepsilon_n(z); \quad \varepsilon_n(z) = \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}; \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{VII.96}$$

где все вычисления надо вести с комплексными числами.

В табл. 74, которую мы заимствовали из [34, стр. 156], приведены с тремя десятичными знаками основные результаты, полученные по методу Ньютона для примера 2. Значения $f(z_n)$ и $f'(z_n)$ в табл. 74 вычислены по формулам

$$f(z) = e^z - 0{,}2z + 1 = (e^x \cos y - 0{,}2x + 1) + i\,(e^x \sin y - 0{,}2y);$$

$$f'(z) = e^z - 0{,}2 = (e^x \cos y - 0{,}2) + ie^x \sin y; \quad z = z_n = x_n + iy_n.$$

Сравнив табл. 73 и 74, видим, что в данном примере, как и в примерах § 88, 89, метод вариации параметра при меньшем объеме вычислений дает более высокую точность.

Пример 3. Решим систему с двумя комплексными переменными $z = x + iy$, $w = u + iv$:

$$\left.\begin{aligned} z\cos w - (w + z + 1) &= 0, \\ w\cos z - \sin(w - z) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII.97}$$

Разделяя в (VII.97) действительные и мнимые части, получаем систему с четырьмя действительными переменными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, u, v) &= x\cos u\,\mathrm{ch}\,v + y\sin u\,\mathrm{sh}\,v - (u + x + 1) = 0,\\ f_2(x, y, u, v) &= x\sin u\,\mathrm{sh}\,v - y\cos u\,\mathrm{ch}\,v + (v + y) = 0,\\ f_3(x, y, u, v) &= u\cos x\,\mathrm{ch}\,y + v\sin x\,\mathrm{sh}\,y - \sin(u - x)\,\mathrm{ch}(v - y) = 0,\\ f_4(x, y, u, v) &= u\sin x\,\mathrm{sh}\,y - v\cos x\,\mathrm{ch}\,y + \cos(u - x)\,\mathrm{sh}(v - y) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{(VII.98)}$$

Первые два уравнения линейны относительно x и y, поэтому, переписав их в виде

$$x(\cos u\,\mathrm{ch}\,v - 1) + y\sin u\,\mathrm{sh}\,v = 1 + u,$$
$$x\sin u\,\mathrm{sh}\,v - y(\cos u\,\mathrm{ch}\,v - 1) = -v$$

и решив полученную систему, находим

$$x = \frac{(1 + u)(\cos u\,\mathrm{ch}\,v - 1) - v\sin u\,\mathrm{ch}\,v}{(\mathrm{ch}\,v - \cos u)^2},$$
$$y = \frac{(1 + u)\sin u\,\mathrm{ch}\,v + v(\cos u\,\mathrm{ch}\,v - 1)}{(\mathrm{ch}\,v - \cos u)^2},$$

поскольку

$$(\cos u\,\mathrm{ch}\,v - 1)^2 + (\sin u\,\mathrm{sh}\,v)^2 =$$
$$= \cos^2 u\,\mathrm{ch}^2 v - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v + 1 + \sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 v =$$
$$= (1 - \sin^2 u)(1 + \mathrm{sh}^2 v) + 1 + \sin^2 u\,\mathrm{sh}^2 v - 2\cos u\,\mathrm{ch}\,v =$$
$$= (\mathrm{ch}\,v - \cos u)^2.$$

Подставив эти значения в третье и четвертое уравнения (VII.98), приходим к системе с двумя неизвестными u, v. Для решения этой системы вводим параметр

$$u = p$$

и представляем четвертое уравнение (VII.98) в виде

$$f_4(v;\ p) = (v\beta_4 - \gamma_4) - \mathrm{sh}(v - y^{(0)}) = 0 \quad \text{(VII.99)}$$

при следующих обозначениях:

$$\beta_4 = \frac{\cos x^{(0)}\mathrm{ch}\,y^{(0)}}{\cos(p - x^{(0)})},\quad \gamma_4 = \frac{p\sin x^{(0)}\,\mathrm{sh}\,y^{(0)}}{\cos(p - x^{(0)})}, \quad \text{(VII.100)}$$

$$x^{(0)} = \frac{(1 + p)(\cos p\,\mathrm{ch}\,v - 1) - v\sin p\,\mathrm{sh}\,v}{(\mathrm{ch}\,v - \cos p)^2} = x^{(0)}(v;\ p), \quad \text{(VII.101)}$$

$$y^{(0)} = \frac{(1 + p)\sin p\,\mathrm{sh}\,v + v(\cos p\,\mathrm{ch}\,v - 1)}{(\mathrm{ch}\,v - \cos p)^2} = y^{(0)}(v;\ p). \quad \text{(VII.102)}$$

Найдя корень $v^{(0)} = v^{(0)}(p)$ уравнения (VII.99) и подставив его в третье уравнение системы (VII.98), приходим к уравнению с одним неизвестным u:

$$f_3[u;\ v^{(0)}(p)] = (u\beta_3 + \gamma_3) - \sin(u - x^{(0)}) = 0, \quad \text{(VII.103)}$$

где

$$\beta_3 = \frac{\cos x^{(0)}\,\mathrm{ch}\,v^{(0)}}{\mathrm{ch}(v^{(0)} - y^{(0)})};\quad \gamma_3 = \frac{v^{(0)}\sin x^{(0)}\,\mathrm{sh}\,y^{(0)}}{\mathrm{ch}(v^{(0)} - y^{(0)})}. \quad \text{(VII.104)}$$

Определив корень $u^{(0)} = u^{(0)}(p)$ уравнения (VII.103), вычисляем невязку $\delta(p)$. Решение системы (VII.98) будет определяться таким значением $p = p^{(0)}$, при котором $\delta(p) = 0$, т. е. уравнение с одним неизвестным p

$$\delta(p) = p - u^{(0)}(p) = 0 \quad \text{(VII.105)}$$

будет разрешающим для системы (VII.98).

n	$p = u$	v	sh v	ch v	cos p ch $v - 1$	$(\mathrm{ch}\, v - \cos p)^2$
I	$p = 1{,}0$	0	0	1	—0,45970	0,21132
	$\delta(p) = 2{,}59877$	0,20000	0,20134	1,02007	—0,44886	0,23018
	$\sin p = 0{,}84147$	0,300405	0,304944	1,045463	—0,435134	0,255188
	$\cos p = 0{,}54530$	0,40000	0,41075	1,08107	—0,41590	0,29243
	$(1 + p)\sin p =$	0,70000	0,75858	1,25517	—0,32183	0,51104
	$= 1{,}68294$	0,70220	0,76135	1,25684	—0,32093	0,51343
	$v^{(0)} = 0{,}70303$	0,70303	0,76239	1,25747	—0,32059	0,51433
II	$p = 0$	2,00000	—	3,7622	—	—
	$\delta(p) = -0{,}63372$	2,35000	—	5,2905	—	—
	$x^{(0)} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, v - 1}$	2,27500	—	4,9154	—	—
		2,28600	—	4,9686	—	—
	$y^{(0)} = vx^{(0)}$	2,28655	—	4,9713	—	—
III	$p = 0{,}196$	2,27500	4,8126	4,9154	+3,82127	15,4807
	$\delta(p) = -0{,}17655$	2,33000	5,0903	5,1876	+4,08826	17,6967
	$\sin p = 0{,}19475$	2,33253	5,1035	5,2005	+4,10091	17,8054
	$\cos p = 0{,}98085$	2,33246	5,1031	5,2001	+4,10052	17,8021
IV	$p = 0{,}25942$	2,34700	5,1793	5,2749	+4,09840	18,5620
	$\delta(p) = -0{,}01379$	2,35630	5,2285	5,3233	+4,14518	18,9814
	$\sin p = 0{,}25652$	2,35567	5,2252	5,3200	+4,14199	18,9526
V	$p = 0{,}264790$	2,357670	5,235832	5,330472	+4,144694	19,05605
	$\delta(p) = -0{,}000065$	2,357780	5,236418	5,331048	+4,145250	19,06108
	$\sin p = 0{,}261706$	2,357790	5,236472	5,331101	+4,145301	19,06155
VI	$p = 0{,}264812$	2,357798	5,236514	5,331143	+4,145305	19,06197
	$\delta(p) = 0{,}000000$	2,357799	5,236520	5,331148	+4,145310	19,06202
	$\sin p = 0{,}261732$					

Таблица 75

$x^{(0)}$	$y^{(0)}$	$\cos[p - x^{(0)}]$	$\operatorname{sh}[v - y^{(0)}]$	$\beta_4(v; p)$	$\gamma_4(v; p)$	$f_4(v; p)$
−4,3507	0	+0,59584	0	−0,5939	0	0
−4,0473	1,0821	+0,32869	−1,00103	−3,0882	+3,1264	−2,7430
−3,71237	—	±0	—	∓∞	±∞	∓∞
−3,3172	1,7950	−0,38498	−1,8936	+7,9101	−1,3282	+6,3858
−2,1339	2,0573	−0,99997	−1,8141	+2 1227	+3,2544	+0,0456
−2,12634	2,05666	−0,99988	−1,80827	+2,0961	+3,2679	+0,0123
−2,12353	2,05641	−0,99984	−1,80606	+2,0862	+3,2729	−0,0002
+0,36203	0,72406	—	+1,6516	+1,27379	0	+0,8960
+0,23307	0,54771	—	+2,9493	+1,15378	0	−0,2379
+0,25540	0,58104	—	+2,6287	+1,17361	0	+0,0413
+0,25198	0,57602	—	+2,67399	+1,17054	0	+0,00186
+0,25181	0,57577	—	+2,67628	+1,17039	0	−0,00012
+0,1575	0,6340	+0,99926	+2,4833	+1,1937	+0,02084	+0,2115
+0,14578	0,60527	+0,99874	+2,71639	+1,17771	+0,01833	+0,0093
+0,14526	0,60399	+0,99871	+2,72744	+1,17702	+0,01822	−0,00023
+0,14527	0,60402	+0,99871	+2,72715	+1,17704	+0,01822	+0,00003
+0,11008	0,60835	+0,98887	+2,75695	+1,19694	+0,01863	+0,03364
+0,10854	0,60356	+0,98864	+2,79855	+1,19432	+0,01822	−0,00259
+0,10864	0,60389	+0,98865	+2,79570	+1,19450	+0,01825	−0,00010
+0,105561	0,603740	+0,987350	+2,802085	+1,196378	+0,018115	+0,000465
+0,105543	0,603683	+0,987347	+2,802582	+1,196345	+0,018110	+0,000026
+0,105541	0,603678	+0,987346	+2,802626	+1,196346	+0,018110	−0,000003
+0,105526	0,603679	+0,987340	+2,802647	+1,196354	+0,018109	+0,000005
+0,105526	0,603678	+0,987340	+2,802653	+1,196353	+0,018109	−0,000002

Уравнение (VII.105) решаем методом линейной аппроксимации, исходя из двух проб, взятых, например, при $p = 1$ и $p = 0$, для которых $\delta(1) = +2{,}59877$ и $\delta(0) = -0{,}63372$. В таком случае, подставив эти значения в формулу линейной аппроксимации (VII.17), определяем p для шага $n = \text{III}$:

$$p = 0{,}196.$$

Для четвертого шага параметр p находим как среднее арифметическое значений p, определенных согласно формуле (VII.17) по результатам, полученным при $n = \text{I}$, $n = \text{III}$ и, соответственно, при $n = \text{II}$, $n = \text{III}$:

$$p(\text{I};\ \text{III}) = 0{,}24715; \quad p(\text{II};\ \text{III}) = 0{,}27169;$$

$$p = \frac{p(\text{I};\ \text{III}) + p(\text{II};\ \text{III})}{2} = 0{,}25942.$$

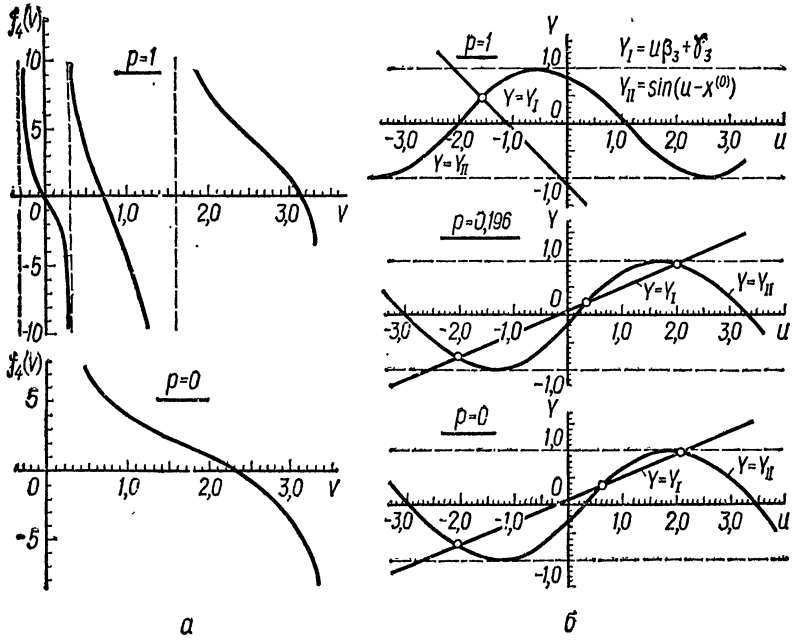


Рис. 226.

В табл. 75 и 76 выполнены все вычисления по формулам (VII.99) — (VII.105), необходимые для определения одного из решений системы (VII.98). При этом шесть шагов (включая и две начальные пробы) обеспечили шесть верных десятичных знаков, так как, подставив окончательные значения

$$x^{(0)} = 0{,}105526; \quad y^{(0)} = 0{,}603678; \quad p^{(0)} = u^{(0)} = 0{,}264817; \quad v^{(0)} = 2{,}357799$$

в исходную систему (VII.98), имеем

$$f_1 = +0{,}000001; \quad f_2 = f_3 = -0{,}000003; \quad f_4 = +0{,}000002.$$

Исследуем более подробно систему (VII.98), которая имеет бесчисленное множество решений.

На рис. 226, *а* построены графики для функции $f_4(v;\ p)$ при $p = 1$ и $p = 0$, а на рис. 226, *б* найдены графическим путем корни уравнения (VII.103) при $p = 1$, $p = 0$ и $p = 0{,}196$.

Таблица 76

	$p=u;\ \delta(p)=p-u^{(0)}(p)$		$u=u^{(0)}$	$u-x^{(0)}$	$\sin(u-x^{(0)})$	$f_3(u;\ v^{(0)})$
I	$p=+1{,}0$	$\delta(p)=+2{,}59877$	0	+2,12353	+0,85109	−1,96549
	$x^{(0)}=-2{,}12353;$	$\operatorname{ch}(v^{(0)}-y^{(0)})=2{,}06443$	−1,52353	+0,60000	+0,56464	−0,13967
	$\beta_3=-1{,}0104;$	$\gamma_3=-1{,}1144$	−1,59853	+0,52500	+0,50121	−0,00046
	$\sin x^{(0)}=-0{,}85109;$	$\cos x^{(0)}=-0{,}52502$	−1,59953	+0,52400	+0,50035	+0,00142
	$\operatorname{sh} y^{(0)}=+3{,}8449;$	$\operatorname{ch} y^{(0)}=+3{,}9729$	−1,59877	+0,52476	+0,50100	0,00000
II	$p=0;$	$\delta(p)=-0{,}63372$	0	−0,25181	−0,24916	+0,37043
	$x^{(0)}=+0{,}25181;$	$\operatorname{ch}(v^{(0)}-y^{(0)})=2{,}85700$	+0,25181	0	0	+0,22117
	$\beta_3=+0{,}39674;$	$\gamma_3=+0{,}12127$	+0,62181	+0,37000	+0,36162	+0,00635
	$\sin x^{(0)}=+0{,}24916;$	$\cos x^{(0)}=+0{,}96846$	+0,63281	+0,38100	+0,37185	+0,00048
	$\operatorname{sh} y^{(0)}=+0{,}60812;$	$\operatorname{ch} y^{(0)}=+1{,}17039$	+0,63372	+0,38191	+0,37270	+0,00001
III	$p=+0{,}196;$	$\delta(p)=-0{,}17655$	0	−0,14527	−0,14476	−0,07020
	$x^{(0)}=+0{,}14527;$	$\operatorname{ch}(v^{(0)}-y^{(0)})=2{,}90471$	+0,37227	+0,22700	+0,22506	+0,00015
	$\beta_3=+0{,}40469;$	$\gamma_3=+0{,}07456$	+0,37327	+0,22800	+0,22603	−0,00041
			+0,37225	+0,22728	+0,22533	0,00000
IV	$p=+0{,}25942;$	$\delta(p)=-0{,}01379$	+0,27264	+0,16400	+0,16327	+0,00034
	$x^{(0)}=+0{,}10864;$	$\operatorname{ch}(v^{(0)}-y^{(0)})=2{,}96916$	+0,27364	+0,16500	+0,16425	−0,00024
	$\beta_3=+0{,}39774;$	$\gamma_3=+0{,}05517$	+0,27321	+0,16457	+0,16386	+0,00001
V	$p=+0{,}264790;$	$\delta(p)=-0{,}000065$	+0,264841	+0,159300	+0,158627	+0,000008
	$\beta_3=+5{,}396952;$	$\gamma_3=+0{,}053506$	+0,264855	+0,159314	+0,158641	0,000000
VI	$p=+0{,}264817;$	$\delta(p)=0{,}000000$	+0,264817	+0,159291	+0,158618	−0,000001
	$\beta_3=+0{,}396949;$	$\gamma_3=+0{,}053498$				

Функция $f_4(v;\ p)$ является нечетной, поскольку при $v<0$ согласно (VII.102) и $y^{(0)}<0$, а тогда из (VII.99) получаем

$$f_4(-v;\ p)=-f_4(+v;\ p). \qquad \text{(VII.106)}$$

Поэтому достаточно исследовать ее поведение только на положительной полуоси v.

Полюсами функции $f_4(v;\ p)$ будут те значения v, при которых

$$p-x^{(0)}(v;\ p)=\pm k\frac{\pi}{2};\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \qquad \text{(VII.107)}$$

При $p=0$, $\sin p=0$, $\cos p=1$ и из (VII.99) — (VII.102) имеем

$$\beta_4(v;\ 0)=\operatorname{ch} y^{(0)};\quad \gamma_4(v;\ 0)=0;\quad y^{(0)}(v;\ 0)=\frac{v}{\operatorname{ch} v-1}; \qquad \text{(VII.108)}$$

$$f_4(v;\ 0)=v\operatorname{ch} y^{(0)}-\operatorname{sh}(v-y^{(0)}).$$

Тогда при $v\to+0$, воспользовавшись для раскрытия неопределенности правилом Лопиталя—Бернулли, находим

$$\lim_{v\to+0} y^{(0)}(v;\ 0)=\lim_{v\to+0}\frac{v}{\operatorname{ch} v-1}=\lim_{v\to+0}\frac{1}{\operatorname{sh} v}=+\infty;$$

$$\lim_{v\to+0} f_4(v;\ 0)=\lim_{v\to+0} v\operatorname{ch} y^{(0)}-\operatorname{sh}(v-y^{(0)})=+\infty;$$

а при $v\to+\infty$

$$\lim_{v\to+\infty} y^{(0)}=\lim_{v\to+\infty}\frac{v}{\operatorname{ch} v-1}=0;\quad \lim_{v\to+\infty}\operatorname{ch} y^{(0)}=+1$$

и, следовательно,

$$\lim_{v\to+\infty} f_4(v;\ 0)=\lim_{v\to+\infty} v-\operatorname{sh}(v-1)=-\infty.$$

Таким образом, при $p=0$ функция $f_4(v;\ p)$ имеет на всей положительной полуоси два полюса $v=0$, $v=\infty$ и один нуль $v\approx 2{,}286$, как показано на рис. 226, *а*.

При $p\neq 0$ функция $f_4(v;\ p)$ может иметь несколько полюсов и нулей, три из которых при $p=1$ показаны на рис. 226, *а*. При этом на полусегменте $0<p\leqslant 1$ с ростом p расстояние между двумя соседними нулями (или полюсами) будет уменьшаться.

Уравнение (VII.103) согласно рис. 226, *б* при $p=1$ имеет только один действительный корень, а при $p=0$ и $p=0{,}196$ таких корней будет по три. В табл. 75 и 76 мы определили решение системы (VII.98), соответствующее наименьшему отличному от нуля положительному корню $v^{(0)}=2{,}357799$ уравнения (VII.99) и наименьшему положительному корню $u^{(0)}=0{,}264817$ уравнения (VII.103). Воспользовавшись в качестве начальных проб результатами, представленными на рис. 226, *а*, 226, *б* и в табл. 75, 76, можно найти еще ряд корней разрешающего уравнения (VII.105), а следовательно, и системы (VII.98).

Упражнение 2. При $p=0$ второй положительный корень уравнения (VII.103) будет $u^{(0)}=2{,}11088$, так что второе возможное значение невязки $\delta(p)$ при $p=0$ будет $\delta(0)=-2{,}11088$. Определить с пятью десятичными знаками решение системы (VII.98), взяв в качестве исходных проб $\delta(0)=-2{,}11088$ и прежнее значение $\delta(p)=+2{,}59877$ при $p=1$. Для выполнения этих вычислений можно воспользоваться таблицами [121].

Кроме комплексных корней система (VII.97) имеет также действительные корни, так как при $v=0$ (если $u=p\neq 0$) согласно (VII.102)

$$y^{(0)}=0;$$

тогда второе и четвертое уравнения системы (VII.98) удовлетворяются тождественно, а из (VII.101) — (VII.104), учтя, что $p = u$, получаем уравнение с одним неизвестным u:

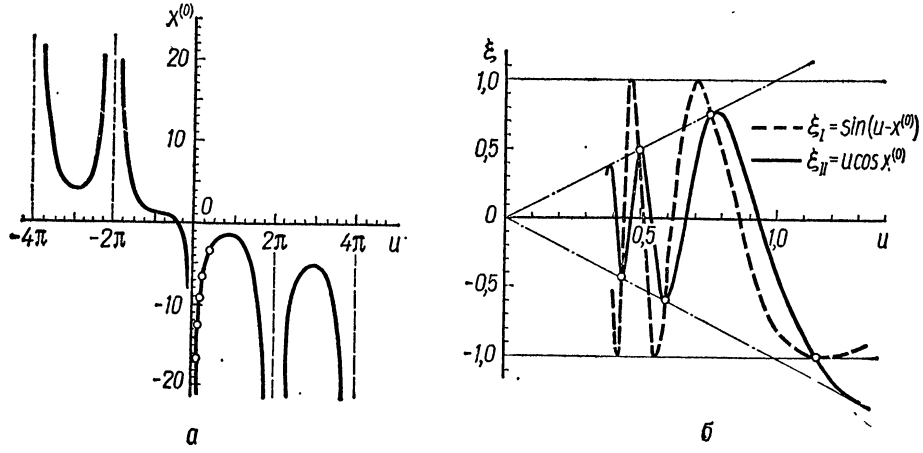
$$f_3(u;\ 0) = u\cos x^{(0)} - \sin(u - x^{(0)}) = 0, \qquad \text{(VII.109)}$$

где

$$x^{(0)} = -\frac{1+u}{1-\cos u}. \qquad \text{(VII.110)}$$

Этот же результат можно получить и непосредственно из исходной системы (VII.97), положив в ней

$$y = v = 0;\quad z = x;\quad w = u.$$



а *б*

Рис. 227.

На рис. 227, *а* представлен график функции $x^{(0)} = x^{(0)}(u)$ на интервале $-4\pi < u < +4\pi$, а на рис. 227, *б* изображены графики кривых

$$\xi_I = \sin(u - x^{(0)}),\quad \xi_{II} = u\cos x^{(0)},$$

точки пересечения которых определяют собой корни уравнения (VII.109). Отметим, что все максимумы и минимумы кривой $\xi_I = \sin(u - x^{(0)})$ расположены на прямых $\xi = \pm 1$, а максимумы и минимумы кривой $\xi_{II} = u\cos x^{(0)}$ — на биссектрисах координатных осей $\xi = \pm u$.

Уравнение (VII.109) имеет бесконечное количество корней. Точки

$$u = \pm 2k\pi;\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

которые есть простые полюсы функции $x^{(0)}(u)$, одновременно являются точками сгущения этих корней.

На рис. 227, *а* и *б* кружками отмечены пять положительных корней уравнения (VII.109) и соответствующие им значения $x^{(0)}$. Два этих корня вычислены с пятью десятичными знаками в табл. 77, а более точное их значение равно:

$$u_I = 0{,}4297726;\quad u_{II} = 0{,}4917707.$$

Таблица 77

u	$1-\cos u$	$x^{(0)}$	$u-x^{(0)}$	$\sin(u-x^{(0)})$	$\cos x^{(0)}$	$f_3(u;\ 0)$
0,42	0,08691	−16,339	+16,759	−0,8679	−0,8074	+0,5288
0,43	0,09103	−15,709	+16,139	−0,4178	−1,0000	−0,0122
0,42978	0,090942	−15,72189	+16,15167	−0,429293	−0,999903	−0,00045
0,42977	0,090938	−15,72247	+16,15224	−0,429808	−0,099895	+0,00008
0,49	0,11767	−12,6625	+13,1525	+0,5531	+0,9954	−0,0654
0,50	0,12242	−12,2529	+12,7529	+0,1854	+0,9513	+0,2902
0,49184	0,118534	−12,58576	+13,07760	+0,489251	+0,999812	+0,00250
0,49177	0,118501	−12,58867	+13,08044	+0,491725	+0,999751	−0,00008

Отметим, что на каждом интервале $u_1 < u < u_2$, на котором $x^{(0)}$, монотонно изменяясь, получает приращение $\Delta x^{(0)} = 2\pi$, уравнение (VII.109) будет иметь два корня.

В формулах (VII.109), (VII.110) может происходить большая потеря точности из-за разности близких величин. Поэтому для того чтобы определить корень $u = u_{\text{I}}$ с шестью верными знаками, $\cos u$ необходимо найти с десятью знаками или, воспользовавшись рядом*

$$1-\cos u = \frac{u^2}{2!} - \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} - \frac{u^8}{8!} + \cdots, \qquad \text{(VII.111)}$$

непосредственно вычислить (по образцу табл. 84 § 98) с требуемой точностью величину $1-\cos u$.

Потеря точности происходит также при определении тригонометрических функций для больших значений аргумента, так как точность тригонометрических функций зависит от числа десятичных знаков аргумента, а не от числа его значащих цифр.

Повторив вычисления, выполненные в табл. 77 при определении корня $u = u_{\text{I}}$, находим (воспользовавшись шестизначными таблицами тригонометрических функций [156], [176] и взяв $5\pi = 15{,}7079633$) для $u = 0{,}42977$:

$$1-\cos u = 0{,}0909383941;\quad x^{(0)} = -15{,}7224021 = -(5\pi + 0{,}0144388);$$

$$u - x^{(0)} = +16{,}1521721 = 5\pi + 0{,}4442088;\quad f_3(u;\ 0) = +0{,}000019$$

и, соответственно, для $u = 0{,}42978$:

$$1-\cos u = 0{,}0909425607;\quad x^{(0)} = -15{,}7217917;\quad f_3(u;\ 0) = -0{,}000054.$$

Для повышения точности вычислений по формуле (VII.110) при $u \to 2k\pi$ можно также воспользоваться тождеством

$$1-\cos u = \frac{1}{2}\sin^2\frac{u}{2}. \qquad \text{(VII.112)}$$

Упражнения

3. Определить с шестью десятичными знаками $f_3(u;\ 0)$ для $u = 0{,}49184$; $u = 0{,}49177$ и по найденным результатам уточнить корень $u = u_{\text{II}}$.

4. Найти с пятью десятичными знаками остальные три корня из отмеченных на рис. 227, *б*.

---

* О рядах подробнее сказано в следующей главе.

5. Найти с той же точностью два-три корня на интервале $\pi < u < 2\pi$.

Заканчивая исследование системы (VII.98), докажем, что на оси $u = 0$ она не имеет ни одного корня, отличного от $v = 0$.

Действительно, положив в (VII.98) $u = 0$, $\sin u = 0$, $\cos u = 1$, после очевидных упрощений получаем

$$y \operatorname{ch} v - (v + y) = 0,$$
$$v \operatorname{sh} y = -\operatorname{ch}(v - y),$$
$$v \operatorname{ch} y = +\operatorname{sh}(v - y),$$

или

$$\operatorname{th} y \operatorname{th}(v - y) = -1; \quad y = \frac{v}{\operatorname{ch} v - 1}. \tag{VII.113}$$

Так как при любом конечном значении аргумента гиперболический тангенс по модулю всегда меньше единицы, то единственным корнем уравнения (VII.113) будет $v = 0$ (при котором $y = \infty$), что и требовалось доказать.

§ 91. Заключительные замечания

Еще на заре нашей цивилизации возникла необходимость в решении различных математических задач. Развитие земледелия требовало решения задач на обмер и вычисление площадей, что, в свою очередь, способствовало развитию геометрии. Расширение торговли обусловливало развитие арифметики и алгебры. Мореплавание, без которого немыслима торговля, нуждалось в развитии астрономии, тригонометрии (плоской и сферической) и картографии. Решались также задачи методического характера или задачи, требовавшие остроумия.

Некоторые из этих задач дожили до наших дней и вошли в учебники и книги по занимательной математике. Так, например, среди первых дошедших до нас документов, папирусов древнего Египта, найденных при раскопках, уже встречаются задачи на составление уравнений. Вот одна из них, составленная около 4000 лет тому назад.

«К числу прибавь две трети его, от всего отними 6, получишь 4. Скажи мне, что за число?»

Другим примером может служить следующая задача, которая была найдена в одном из древнегреческих манускриптов.

«Вот Полифема циклопа статуя из меди отлита.
Руку, уста и единое око ваятель сделал на диво,
Скрывши в них трубы; водой великан истекает как будто.
И в настоящее время влагу уста изливают.
Хитрое в трубах устройство: ведущая в руку
Способна весь водоем до краев через три дня переполнить.
Оку достаточно дня, а устам и всего лишь две пятых.
Вместе все три водоем скоро ли могут наполнить?»

Если отказаться от поэтической формы, то суть задачи в следующем: в бассейн проведено три трубы. Первая наполняет его за 3 дня, вторая — за день и третья — за $\frac{2}{5}$ дня. Спрашивается, за какое время наполнят бассейн все три трубы, работая вместе?

Таким образом, «задачи на бассейны» существуют уже не одну тысячу лет.

Квадратные уравнения были известны еще древнегреческим математикам, и Евклид (Εὐκλεέδης, IV—III век до н. э.) решал их геометрическим путем.

В IX веке были уже разработаны общие методы решения уравнений 1-й и 2-й степени. При этом большую роль в формировании и становлении алгебры как самостоятельной научной дисциплины сыграли работы выдающегося хорезмийского математика, астронома, географа и историка Абу Абдаллы Мухаммеда ибн-Мусы ал-Хорезми (780—847). Благодаря его «Книге счета индийскими цифрами», которая стала известна в XII веке в латинском переводе, в Европе узнали индийскую десятеричную систему счисления и индийские (арабские) цифры.

В своем сочинении «Ал-джебр-ал-мукабала» ал-Хорезми дал правила действий над алгебраическими величинами, разработал теорию решения уравнений. Само слово «алгебра» происходит от введенной им операции «ал-джебр», что означает восстановление члена уравнения в другой части, но с противоположным знаком. «Ал-мукабала» означает приведение подобных членов.

В последние годы VIII века ал-Хорезми из Средней Азии переселился в Багдад, который был в то время развитым культурным и научным центром. В Багдаде по образцу знаменитого Александрийского музея был построен Бейтал-Хикма (Дом мудрости), представлявший собой сочетание академии с обсерваторией и библиотекой.

С 815 г. во главе Дома мудрости стал ал-Хорезми. Здесь им, а отчасти под его руководством, были выполнены работы по астрономии, географии и математике. В частности, примерно в 820 г. были составлены астрономические таблицы «Зидж», в основу которых положены известные таблицы Птолемея. До нас они не дошли и известны лишь в латинской рукописи 1126 г. К тому же времени относится измерение дуги меридиана, произведенное между Тадмором и ар-Раккой, причем полученная величина дуги в 1° (между 35 и 36° с. ш.) составила $56\frac{2}{3}$ арабской мили, или 111 815 *м*, т. е. была лишь на 877 *м* больше истинной величины [45, т. 1, стр. 391].

Из математических работ ал-Хорезми до нас дошли в более или менее полном объеме два трактата — арифметический и алгебраический, сыгравшие существенную роль в развитии науки, так как это были первые в мировой литературе руководства по обучению счету и по алгебре. Известным является также его сочинение «Изображение Земли».

В XVI веке итальянским ученым удалось найти общие приемы решения алгебраических уравнений 3-й степени (Сципион дель Ферро [Scipione del Ferro, 1465—1526], Николо Тарталья [Niccolò Tartaglia, прибл. 1499—1557], Джеронимо Кардано [Geronimo Cardano, 1501—1576]) и 4-й степени (Луиджи либо Лодовико Феррари [Luigi ò Ludovico Ferrari, 1522—1565]).

Общее кубическое уравнение

$$a\zeta^3 + b\zeta^2 + c\zeta + d = 0, \quad a \neq 0 \tag{VII.114}$$

при помощи подстановки

$$\zeta = z - \frac{b}{3a} \tag{VII.115}$$

всегда можно привести к более простому виду

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{VII.116}$$

где

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}; \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Корни уравнения (VII.116) определяются по формулам

$$z_1 = u + v; \quad z_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v; \quad z_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_2 v, \tag{VII.117}$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

а ε_1 и ε_2 суть корни квадратного уравнения $x^2 + x + 1 = 0$, т. е.

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Формулы (VII.117) были опубликованы (несколько в ином виде) в книге Кардано «Ars magna de rebus algebraicis» («Великое искусство алгебраических правил») в 1545 г. и носят его имя, хотя аналогичные результаты получили значительно раньше Ферро (1515 г.) и несколько позже Тарталья. Более того, Кардано, который уже в ранних своих работах занимался этой проблемой, узнав, что Тарталья владеет более значительными результатами, стал настойчиво стремиться к тому, чтобы узнать их. Своей настойчивостью он добился, наконец, в 1539 г. от Тартальи краткого сообщения относительно этих решений, дав ему клятву не разглашать их. Поэтому после выхода в свет «Ars magna» Тарталья был глубоко обижен, что первенство в опубликовании осталось не за ним. В связи с этим необходимо отметить, что в своем труде Кардано воздал должное сообщениям Тартальи, но, тем не менее, посчитал себя более не связанным данным ранее словом, поскольку, посетив в Болонье зятя Сципиона дель Ферро, он узнал решение Ферро, совпадающее с найденным Тартальей. В этой же книге Кардано опубликовал и результат своего ученика Феррари, относящийся к решению уравнения 4-й степени [157, стр. 20—22].

В формулах (VII.117) из трех возможных значений кубических корней для u и v необходимо брать такие, произведение которых равно $-\frac{p}{3}$. Если коэффициенты уравнения (VII.115) есть действительные величины, то число его действительных корней определяется знаком дискриминанта

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3. \qquad \text{(VII.118)}$$

При $D > 0$ уравнение имеет один действительный корень и два комплексно сопряженных. При $D = 0$ все корни действительные, притом два из них одинаковые. При $D < 0$ все три корня действительные и разные.

Уравнение 4-й степени решается еще сложнее, причем для этого надо предварительно найти все три корня вспомогательного уравнения, получившего название *кубической резольвенты*. Более подробные сведения по этому вопросу можно найти в книгах [12, стр. 138—140] и [181, стр. 108—113].

Решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах явилось для того времени крупным событием в математике, так как эту проблему не удавалось разрешить на протяжении многих столетий. С этим открытием оказалось связанным и новое важное расширение области чисел: впервые были введены в рассмотрение комплексные числа, и в данном вопросе приоритет полностью принадлежит Кардано. Свои исследования Кардано распространил и на механику. В частности, он изучал вопрос о передаче движения, разрабатывал теорию рычагов и ряд других вопросов. С именем Кардано связывают карданную передачу, карданов подвес.

XVI век ознаменовался еще одним успехом в математике — впервые было создано буквенное исчисление. Главная заслуга в этом принадлежит Франсуа Виету, которого по праву считают творцом математической формулы.

Для того чтобы оценить значение этого факта, читателю достаточно попытаться придать формулам Кардано (VII.117) их первоначальную словесную форму или пересказать словами какое-либо простейшее тождество, например

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Формула позволяет компактнее записать результат и легче его обозреть. Но не это главное. С буквами и формулами мы можем оперировать по правилам исчисления, т. е. складывать их, умножать, делить, заменять отдельные буквенные выражения новыми переменными и т. д. Со словами так поступать нельзя, над ними мы не можем производить никаких действий. Поэтому хотя каждую отдельную формулу можно высказать, но исчисление с помощью одних слов построить нельзя. Ф. Виета, который в своих работах начал систематически при-

Франсуа Виета.

менять буквенные обозначения и формулы, тем самым открыл перед математикой неисчерпаемые новые возможности.

Дальнейшее существенное влияние на развитие алгебры и всей математики в целом оказали работы К. Ф. Гаусса, Н. И. Лобачевского, Э. Галуа и многих других ученых, о чем более подробно сказано в цитированных на стр. 249 книгах, в которых приведена и более подробная библиография.

Франсуа Виета (François Viète, 1540 — 1603), выдающийся французский математик. Родился в городе Фонтеней (в бывшей провинции Пуату). По образованию юрист. Разрабатывал методы решения алгебраических уравнений, установил зависимость между коэффициентами и корнями алгебраических уравнений. Виета первым (в 1593 г.) разложил $\frac{2}{\pi}$ в бесконечное произведение, выведя из геометрических соображений формулу [157, стр. 134]

$$\frac{2}{\pi}=\cos\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{4}\cdot\cos\frac{90^\circ}{8}\cdot\cos\frac{90^\circ}{16}\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right]}\ldots. \qquad \text{(VII.119)}$$

Ему же принадлежит решение задачи об определении всех элементов плоского или сферического треугольника по трем данным. В 1579 г. он издал в Париже работу под заглавием «Canon mathematicus» («Математические таблицы»), в которой были частично изложены и его исследования по тригонометрии. В трудах Ф. Виета элементарная алгебра приняла почти законченный современный вид (за исключением логарифмов, комбинаторики и бинома Ньютона, введенных в курс элементарной алгебры позже).

Карл Фридрих Гаусс (Carl Friedrich Gauß, 1777—1855), великий немецкий математик. Родился в г. Брауншвейге в семье водопроводчика. С 1807 г.— профессор и директор астрономической обсерватории университета в Геттингене, член Геттингенского общества наук. В 1802 г. Гаусс был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1824 г.— ее почетным иностранным членом. Гаусс внес фундаментальный вклад в ряд разделов математики, астрономии, геодезии и физики. Ему принадлежит первое строгое доказательство основной теоремы алгебры, а также разработка теории уравнений деления окружности и построения правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки. Занимаясь этой проблемой, Гаусс построил теорию решения в радикалах специального класса уравнений и развил методы, которые впоследствии легли в основу теории Галуа. Гауссу же (и независимо от него К. Весселю и Ж. Аргану) принадлежит геометрическая интерпретация комплексных чисел. В его труде «Арифметические исследования» заложен фундамент современной теории чисел.

Гаусс разработал метод вычисления эллиптических орбит планет по трем наблюдениям, математические основы высшей геодезии, а также (одновременно с А. М. Лежандром) метод наименьших квадратов для обработки результатов

экспериментальных данных. Изучение формы земной поверхности потребовало от Гаусса предварительной разработки теории поверхностей и привело к важным результатам в этой области знаний. Ему принадлежат некоторые идеи неевклидовой геометрии, что стало известно только после его смерти. Гаусс предложил теорию земного магнетизма и вместе с физиком В. Э. Вебером составил абсолютную систему электромагнитных единиц и сконструировал первый в Германии электромагнитный телеграф. Ему принадлежат также основополагающие труды по математическому анализу, теории вероятностей, геометрической оптике, математической физике, теории эллиптических функций. Начиная с 1908 г. издано (на немецком языке) 12 томов «Werke», причем работа продолжается и в настоящее время.

Николай Иванович Лобачевский (1792—1852), великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Родился в Нижнем Новгороде (теперь г. Горький) в семье мелкого чиновника. Почти всю жизнь провел в Казани, где в 1811 г. окончил университет и был оставлен для дальнейшей научной работы. С 1816 г. — экстраординарный и с 1822 г. — ординарный профессор Казанского университета. Был деканом физико-математического факультета (1820—1821, 1823—1825) и ректором этого же университета (1827—1846).

Исторической заслугой Н. И. Лобачевского является открытие новой геометрической системы, отличной от евклидовой, которая получила в дальнейшем название *геометрии Лобачевского*. В 1829—1830 гг. в журнале «Казанский вестник» он опубликовал классическую работу «О началах геометрии». Но ни этой, ни более поздних работ Лобачевского («Геометрические исследования по теории параллельных линий», «Пангеометрия» и др.) в математических кругах того времени почти никто не признавал и эти работы подвергались острой критике. Полное признание и распространение геометрия Лобачевского получила только после его смерти.

Большинство работ Лобачевского опубликовано в «Ученых записках Казанского университета», основанных при его непосредственном участии в 1834 г. Некоторые свои работы по неевклидовой геометрии Лобачевский напечатал за границей, где они привлекли внимание

Карл Фридрих Гаусс.

Николай Иванович Лобачевский.

Эварист Галуа.

Гаусса. Гаусс еще в юности интересовался идеями неевклидовой геометрии, но, боясь быть непонятым, публично не выступил по этим вопросам. По предложению Гаусса, Лобачевский, как один «из превосходнейших математиков русского государства», был избран в 1842 г. членом-корреспондентом Геттингенского общества наук. Это, пожалуй, единственное официальное признание при жизни Лобачевского его заслуг по созданию неевклидовой геометрии. Непризнанным остался и венгерский математик Янош Бойаи (János Bólyai, 1802—1860), также самостоятельно пришедший к открытию неевклидовой геометрии, но опубликовавший свою работу в 1832 г., уже после появления в печати первой работы Лобачевского.

Лобачевскому принадлежат также фундаментальные работы по алгебре и математическому анализу. Он первым установил разницу между непрерывностью и дифференцируемостью функций, доказал несколько теорем о тригонометрических рядах, создал один из наиболее эффективных методов приближенного решения алгебраических уравнений. Лобачевский видел неразрывную связь между классической механикой и евклидовой геометрией, в связи с чем пришел к выводу о необходимости изменений в классической механике. Это его предвидение блестяще подтвердилось впоследствии теорией относительности, которая и внесла все необходимые изменения. Лобачевский положил начало новому, более широкому этапу в развитии геометрии, которую до него считали завершенной наукой. Классическая геометрия Евклида является только основным камнем в фундаменте неевклидовой геометрии, без которой нельзя построить ни теории атомного ядра, ни теории дальних космических полетов, когда скорости космического корабля становятся соизмеримыми со скоростью света.

Идеи Лобачевского нашли широкое применение в математике и в различных отраслях природоведения, а его имя занимает одно из первых мест в ряду имен отечественных ученых и ученых мира.

Полное собрание сочинений Н. И. Лобачевского (в пяти томах) было издано Гостехиздатом в 1946—1951 гг.

Эварист Галуа (Évariste Galois, 1811—1832), выдающийся французский математик, творец основ современной алгебры, основоположник теории групп. Родился в Бур-ля-Рен (Bourg la Reine) в семье чиновника, который во время «ста дней» был мэром этого городка. Галуа независимо от П. Руффини (1799 г.) и Н. Г. Абеля (1824 г.) доказал что алгебраические уравнения степени выше 4-й в общем виде не решаются в радикалах*. Он нашел необходимое и достаточное условие разрешимости алгебраических уравнений высших степеней в радикалах. Галуа дважды представлял свои работы в Парижскую академию наук. Однако даже такие крупнейшие математики, как Ж. Б. Фурье и О. Л. Коши, не оценили идей Э. Галуа. Полное признание и широкое распространение работы Галуа получили лишь в 70-х годах XIX века, после того как они были опубликованы Ж. Лиувиллем в 1846 г. в XI томе его журнала.

* Подчеркнем, что факт неразрешимости уравнения в радикалах совсем не означает неразрешимости вообще, и все корни алгебраического уравнения любой степени (с действительными или комплексными коэффициентами) могут быть найдены одним из приближенных методов с любой наперед заданной точностью.

Идеи Галуа оказали огромное влияние не только на развитие алгебры, но и всей математики. Теория групп нашла применение в современной квантовой механике, в кристаллографии и естествознании. За последнее столетие нет такой области математики, развитие которой не было бы в той или иной степени связано с идеями Галуа.

Галуа принимал активное участие в политической борьбе против королевского режима Франции, за что дважды подвергался тюремному заключению, и в возрасте 21 года был убит на дуэли, по-видимому, спровоцированной его политическими противниками.

Сочинения Э. Галуа переведены на русский язык и были изданы в виде однотомника Гостехиздатом в 1936 г.

Контрольные упражнения

1. Решить методом вариации параметров и методом исключения такие системы трех линейных уравнений:

$$\text{а)}\ \begin{aligned} 2{,}10x - 4{,}50y - 2{,}00z &= 19{,}07;\\ 3{,}00x + 2{,}50y + 4{,}30z &= 3{,}21;\\ 6{,}00x - 3{,}50y - 2{,}50z &= 18{,}25; \end{aligned}$$

$$\text{б)}\ \begin{aligned} 21{,}547x - 95{,}510y - 96{,}121z &= -49{,}930;\\ 10{,}223x - 91{,}065y - 7{,}343z &= -12{,}465;\\ 51{,}218x + 12{,}269y + 86{,}457z &= +60{,}812. \end{aligned}$$

2. Вычислить с точностью до 0,001 все действительные корни уравнений:

$$\text{а)}\ x - 2\sin x = 0;\quad \text{б)}\ x^5 - x - 0{,}2 = 0;\quad \text{в)}\ x - \cos x = 0.$$

3. Вычислить с четырьмя значащими цифрами наименьшие корни уравнений:

$$\text{а)}\ x^2 = \sin \pi x;\quad \text{б)}\ x^4 + x - 1 = 0;\quad \text{в)}\ x + \lg x = \frac{1}{2};$$

$$\text{г)}\ \operatorname{tg} x = -x;\quad \text{д)}\ x \operatorname{tg} x = 1;\quad \text{е)}\ 2\sqrt{x} + \ln x = 0;\quad \text{ж)}\ e^x = (1+x)^2.$$

4. Вычислить с пятью значащими цифрами корни следующих систем уравнений:

$$\text{а)}\ \left.\begin{aligned} x \operatorname{sh}(x+y) - y^2 &= 1{,}4;\\ y \operatorname{ch}(x^2 - y^2) + 3x^3 y &= 2{,}6; \end{aligned}\right\}$$

$$\text{б)}\ \left.\begin{aligned} e^{x+y} - e^{z-x} &= 4{,}5;\\ \operatorname{ch}(x - y + z^2) - xyz &= 1{,}8;\\ \operatorname{sh}(x + y + z) + x^2 - z^2 &= 6{,}0. \end{aligned}\right\}$$

5. Определить с тремя десятичными знаками комплексные корни уравнения, рассмотренного в упражнении 2б:

$$z^5 - z - 0{,}2 = 0.$$

6. Решить систему с двумя комплексными переменными $z = x + iy$, $w = u + iv$:

$$\left.\begin{aligned} z\cos w - (w + z + 1) &= 0,\\ w\cos z + (z^2 - w^2) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

7. Вычислить абсолютную и относительную погрешность измерений дуги меридиана, выполненных ал-Хорезми, результаты которых приведены в § 91.

8. Найти все корни кубического уравнения

$$5\zeta^3 - 11\zeta^2 - 2\zeta + 8 = 0$$

по формулам (VII.114)—(VII.117), а также по методу Ньютона.

9. Решить при помощи формул Кардано (VII.117) уравнение Валлиса

$$z^3 - 2z - 5 = 0.$$

Полученные результаты сравнить с результатами решения примера 1 § 90.

10. Найти все корни квадратного уравнения

$$az^2 + bz + c = 0$$

в комплексной области при помощи метода вариации параметра.

11. Вычислить по формуле (VII.119) приближенное значение π, ограничиваясь в ней, соответственно, тремя, четырьмя и пятью членами бесконечного произведения.

12. Сколько надо взять членов в формуле Виета (VII.119), для того чтобы вычислить π с шестью значащими цифрами?

13. Найти все действительные корни уравнения

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0.$$

Построить график функции $y = f(x)$.

14. Найти все корни (действительные и комплексные) уравнения

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4{,}1 = 0.$$

Глава VIII

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды широко применяются в математике, особенно при решении различных технических задач, связанных с приближенным вычислением значений функций, интегралов и т. д.

В гл. IX мы более подробно ознакомимся с применением степенных рядов к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (линейных и нелинейных), а в данной главе после краткого ознакомления с основными понятиями сосредоточим внимание на выполнении алгебраических действий над степенными рядами. К такому порядку изложения нас вынуждает то обстоятельство, что технике умножения и деления степенных рядов в литературе уделено значительно меньше внимания, чем другим вопросам. Более подробные сведения о рядах можно найти в книгах [4, 5, 41, 63, т. I; 78, 82. т. I, гл. II; 94, 102, т. 2; 117, 125, т. I; 138, 149, т. I, гл. VI, § 2; 162, ч. 1; 171, 177, 181, 183, 186].

Подчеркнем также, что для ряда, найденного в результате выполнения того или другого действия над заданными степенными рядами, в каждом конкретном примере надо исследовать его сходимость, что часто, например при обращении степенного ряда, довольно трудно выполнить. Однако эти вопросы выходят за рамки данной работы, и мы их рассматривать не будем.

§ 92. Краткая историческая справка. Основные понятия

Суммирование бесконечных геометрических прогрессий со знаменателем меньшим единицы производилось уже в древности (Архимед). Расходимость гармонического ряда была установлена итальянским ученым Менголи в 1650 г., а затем, более строго, братьями Я. и И. Бернулли. Степенные ряды появились у Ньютона (1665 г.), который полагал, что с их помощью можно представить любую функцию. Дальнейшей разработке теории рядов много сил отдали Лейбниц, Эйлер, Даламбер, Лагранж, Гаусс, Больцано, Коши, Вейерштрасс, Риман и многие другие выдающиеся математики. К числу этих ученых, без сомнения, должен быть отнесен и ученик Ньютона Б. Тейлор, который опубликовал в 1715 г. свой основной труд «Метóда приращений, прямая и обратная». В этой книге изложены теория конечных разностей, теория колебаний струны и ряд других вопросов, дальнейшее развитие которых привело к созданию математической физики. В этой же книге Тейлор впервые дает и вывод разложения в ряд произвольной аналитической функции, который он получил еще в 1712 г.

Благодаря этому степенной ряд стал тем «мостом», который позволил из области рациональных функций перейти к изучению функций трансцендентных. Однако фундаментальное значение этого вклада в математику было осознано не сразу. Правда, уже в 1717 г. Николь поместил в «Мемуарах академии наук» разъяснения, имеющие целью облегчить чтение «Метóды приращений» Тейлора. В 1742 г. вышел знаменитый «Трактат о флюксиях» Колина Маклорена (Colin MacLourin, 1698 — 1746). В нем Маклорен вывел новым способом (при помощи неопределенных коэффициентов) ряд, носящий его имя, и указал, что этот ряд имеется в «Метóде приращений» Тейлора. Поскольку Маклорен показал на большом числе функций, что применение его ряда неизмеримо упрощает задачу разложения функции, этот ряд, а значит и ряд Тейлора, стал пользоваться большой известностью. В 1748 и 1755 гг. вышли «Введение» и «Дифференциальное исчисление» Эйлера. В этих двух сочинениях рядам отведено важное место. Книги, ставшие классическими с момента их появления, укрепили сознание важности *ряда Тейлора*. Еще больше выросло значение ряда Тейлора, когда в 1772 г. Лагранж положил его в основу всего дифференциального исчисления. Желая построить дифференциальное исчисление на чисто алгебраической основе, Лагранж в «Теории аналитических функций» (1797 г.) кладет в основание дифференциального исчисления ряд Тейлора. Он счи-

Брук Тейлор.

тает, что теория разложения функций в ряды содержит истинные принципы дифференциального исчисления, освобожденные от бесконечно малых и от пределов. «И я доказываю теорему Тейлора*, которую можно рассматривать как фундаментальный принцип этого исчисления»,— таковы подлинные слова Лагранжа. После выхода «Теории аналитических функций» значение ряда Тейлора было оценено достаточно. Однако самый ряд понимался еще чисто формально. Только в 1797 г. Лагранж дал выражение для остаточного члена ряда. Разложение же в ряд считалось возможным для всякой функции à priori. Полную ясность в рассматриваемый вопрос внесли работы Гаусса (1812), Больцано (1817), Коши (1821) и Абеля (1826), в которых было дано современное определение суммы сходящегося ряда и установлены основные теоремы. В 1823 г. Коши рассмотрел сходимость ряда к данной функции (в этой же работе дан и остаточный член в форме Коши), а в 1829 г. («Лекции по дифференциальному исчислению») установил различие между сходимостью ряда вообще и сходимостью его к данной функции. Таким образом, полная разработка теории ряда Тейлора заняла более ста лет [151, стр. 198—200]. Дальнейший существенный вклад в теорию функциональных рядов внес Фурье, который начал широко применять для решения различных задач математической физики тригонометрические ряды.

Брук Тейлор (Brook Taylor, 1685—1731), известный английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1712 г.). Родился в деревне Эдмонтон в графстве Миддлсекс, в восьми милях от Лондона. Его дед пользовался вниманием со стороны Кромвеля, отец был штальмейстером. Мальчик получил прекрасное воспитание, общее, включая математику, а также художественное и музыкальное. В 1701 г. поступил в Кембриджский университет, в колледж Сент-Джон. Как раз в это время Ньютон окончательно расстался с Кембриджем, но, конечно, оставался кумиром молодых математиков. К ним присоединился и Тейлор.

В 1708—1712 гг. Тейлор опубликовал ряд статей, которые были признаны настолько ценными, что его избрали членом Королевского общества. Если вспомнить, что в эти годы председателем Общества был Ньютон, то следует заключить, что двадцатисемилетний Тейлор уже пользовался репутацией серьезного ученого. Помимо теории рядов Тейлор внес вклад в разработку теории колебаний струны и теории конечных разностей. Его работы относятся также к вопросам перспективы, капиллярности, магнетизма и некоторым другим.

Жан Батист Жозеф Фурье (Jean Baptist Joseph de Fourier, 1768—1830), знаменитый французский математик, член Парижской академии наук (с 1817 г.). Родился в г. Осере департамента Йонна. Там же закончил военную школу. В 1796—1798 гг. преподавал в Политехнической школе (Париж), в 1802—1815 гг. был префектом департамента Изер, в 1817 г. вернулся в Париж.

Основные научные труды Фурье посвящены математической физике. В «Аналитической теории тепла» (1822) вывел дифференциальное уравнение теплопроводности, разработав для его решения метод разделения переменных, с использованием три-

* Термин «теорема Тейлора» ввел Кондорсе в 1784 г., а в 1786 г. Люилье впервые употребил выражение «ряд Тейлора».

гонометрических рядов. Метод Фурье нашел затем широкое применение при решении других задач математической физики, а тригонометрические ряды впоследствии назвали *рядами Фурье*. Ряд работ Фурье относится к алгебре и к численным методам решения уравнений.

Нильс Генрик Абель (Niels Henrik Abel, 1802—1829), выдающийся норвежский математик, основоположник современной алгебры и теории алгебраических функций. Родился близ г. Ставангера в семье пастора. Окончил университет в Кристиании (Осло). Еще будучи студентом, Абель занялся решением уравнений 5-й степени в радикалах. Сначала ему показалось, что он нашел такое решение, но вскоре он сам обнаружил ошибку и в 1824 г. доказал, что общее буквенное уравнение степени выше четвертой в радикалах не решается. Этот же результат, независимо от Абеля, был получен Паоло Руффини (Paolo Ruffini, 1765—1822) и Э. Галуа.

Работая дальше над теорией алгебраических уравнений, Абель определил важный класс уравнений любой степени, которые разрешимы в радикалах. Эти уравнения в настоящее время называются *абелевыми*. Он нашел функции, которые не интегрируются с помощью элементарных функций. Это привело Абеля к открытию так называемых эллиптических и гиперэллиптических функций. Исследовал интегралы, названные также в его честь *абелевыми*.

Абелю наряду с Коши и Гауссом принадлежит первое строгое построение теории степенных рядов и изучение их сходимости в действительной и комплексной областях. Его работы оказали решающее влияние на всю математику XIX века и послужили отправным пунктом для исследований Якоби, Вейерштрасса, Римана, Пуанкаре и многих других.

Абель находился все время в большой нужде и умер от туберкулеза в расцвете творческих сил, не дожив четырех месяцев до своего двадцатисемилетия. Настоящее признание его идеи получили только в конце XIX века, после того как было опубликовано полное собрание его сочинений:

Oeuvres complètes, t. 1—2, Kristiania, 1881.

Переходим к основным понятиям, которые мы краткости ради сразу же излагаем для комплексной переменной. Поэтому при первом чтении § 92 и 93

Жан Батист Жозеф Фурье.

Нильс Генрик Абель.

можно пропустить и вернуться к ним после того, как будет накоплен достаточный фактический материал.

Выражение вида

$$c_1 + c_2 \dotplus c_3 \dotplus \cdots \dotplus c_n \dotplus \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \qquad \text{(VIII.1)}$$

члены которого $c_1, c_2, \ldots, c_n$ суть числа или функции, называют соответственно *числовым* или *функциональным рядом*. Если c_n — комплексные величины, то ряд определен в комплексной области.

Суммы $s_1 = c_1$, $s_2 = c_1 \dotplus c_2$, $\ldots$, $s_n = c_1 \dotplus c_2 + c_3 \dotplus \cdots \dotplus c_n$ называются *частичными суммами ряда*, а член c_n — *общим членом ряда*.

Пример 1. Пусть дан ряд

$$1 - \frac{1}{2} \dotplus \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \dotplus \frac{(-1)^{n-1}}{n} \dotplus \cdots .$$

Здесь $c_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Желая определить, например, семнадцатый член ряда, полагаем $n = 17$ и находим: $c_{17} = \dfrac{(-1)^{16}}{17} = \dotplus \dfrac{1}{17}$. Аналогичным путем получаем $c_{50} = -\dfrac{1}{50}$, $c_{273} = +\dfrac{1}{273}$ и т. д.

После того как установлен закон для общего члена ряда, легко найти его любую частичную сумму. Так, например, $s_4 = 1 - \dfrac{1}{2} \dotplus \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$; $s_7 = s_4 \dotplus + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{319}{420}$ и т. д.

Для обозначения ряда употребляют специальный символ суммирования *, состоящий из большой греческой буквы сигма $\sum$ и индекса суммирования n, который пробегает все целые значения подряд от $n = 1$ до $n = \infty$, как обозначено в правой части равенства (VIII.1).

Иногда говорят «бесконечный ряд», но слово «бесконечный» здесь излишне, так как по самому определению ряд обязательно должен состоять из бесконечного числа членов. Конечный ряд называют обычно *конечной суммой*, а в случае степенных рядов — *полиномом*, или *многочленом*.

Определение 1. *Если сумма n первых членов бесконечной последовательности комплексных чисел*

$$c_1 = a_1 \dotplus ib_1, \quad c_2 = a_2 \dotplus ib_2, \quad \ldots, \quad c_n = a_n \dotplus ib_n$$

при неограниченном возрастании n стремится к определенному конечному предельному значению

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} [(a_1 \dotplus ib_1) + (a_2 \dotplus ib_2) \dotplus \cdots \dotplus (a_n \dotplus ib_n)] = A \dotplus iB,$$

то числовой ряд

$$S = (a_1 \dotplus ib_1) \dotplus (a_2 \dotplus ib_2) \dotplus \cdots \dotplus (a_n \dotplus ib_n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \dotplus ib_n) \qquad \text{(VIII.2)}$$

называется сходящимся, а число $S = A + iB$ называется его суммой

* Этим символом мы пользовались в гл. V.

Если же при неограниченном возрастании n величина s_n не стремится ни к какому пределу, то ряд (VIII.2) называется расходящимся.

Примерами расходящихся рядов могут служить следующие:

$$S = i + 2i + 3i + 4i + \cdots + ni + \cdots,$$

$$S = z + 2z - z - 2z + z + 2z - z - 2z + \cdots, \text{ где } z = x + iy.$$

В первом примере при неограниченном увеличении числа членов $S \to \infty$. Во втором примере при неограниченном возрастании числа членов сумма S не растет безгранично, а принимает только одно из следующих значений: z, $3z$, $2z$, 0; однако S не стремится ни к какому определенному пределу при $n \to \infty$. Такие ряды иногда называют *колеблющимися*.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \tag{VIII.3}$$

составленный из членов геометрической прогрессии. Число q (действительное или комплексное) называется *знаменателем прогрессии*. Если $|q| < 1$, то члены прогрессии при возрастании n убывают по абсолютной величине, а поэтому такую прогрессию называют *бесконечно убывающей*.

Сумма n первых членов ряда (VIII.3) как сумма первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по известной формуле

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}. \tag{VIII.3'}$$

Рассмотрим случай $|q| > 1$. При этом условии $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = \infty$, а поэтому и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \infty,$$

так что при $|q| > 1$ ряд (VIII.3) расходится.

Если $q = 1$, то частичная сумма s_n прогрессии (VIII.3) равна na и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (na) = \infty$, т. е. ряд расходится.

Наконец, если $q = -1$, то ряд (VIII.3) принимает вид

$$a - a + a - a + \cdots,$$

т. е. является колеблющимся.

Таким образом, *геометрическая прогрессия (VIII.3) сходится тогда и только тогда, когда ее знаменатель по модулю меньше единицы, т. е. когда прогрессия является бесконечно убывающей*. Сумма такой прогрессии определяется формулой (VIII.3').

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

Общий член этого ряда $c_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Заметив, что

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

члены данного ряда можно представить в виде разностей:

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \ldots,$$

а его частичную сумму s_n записать так:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Выполнив приведение подобных членов, получим

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Таким образом, данный ряд сходится и его сумма равна единице.

Из определения 1 непосредственно вытекает, что ряд (VIII.2) сходится тогда и только тогда, когда в отдельности сходятся два ряда с действительными членами, образованные из действительных и мнимых частей членов ряда (VIII.2),

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \\ b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \end{aligned} \tag{VIII.4}$$

Известное из анализа необходимое и достаточное условие Коши для сходимости ряда с действительными членами сохраняет силу и для рядов в комплексной области. Таким образом, для сходимости ряда (VIII.2) необходимо и достаточно, чтобы произвольно заданному положительному числу ε можно было поставить в соответствие такое целое положительное число N, что при $n \geqslant N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k + ib_k) \right| < \varepsilon, \tag{VIII.4'}$$

где p — произвольное целое положительное число.

Другими словами, достаточное условие Коши сходимости бесконечного ряда заключается в требовании, чтобы модуль суммы произвольного числа членов ряда после n-го члена был меньшим, чем ε.

Что касается первых n членов ряда, то они могут быть любыми ограниченными величинами, и их значение на сходимости ряда не отражается, а изменяет лишь на конечную величину значение суммы ряда.

В частности, из условия Коши при $p = 1$ вытекает, что необходимым (но недостаточным) условием сходимости ряда (VIII.2) является стремление его общего члена к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + ib_n) = 0. \tag{VIII.5}$$

Если условие (VIII.5) не выполняется, то ряд не может быть сходящимся. Однако есть ряды, например *гармонический ряд* *

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

для которых условие (VIII.5) выполняется, но ряд является расходящимся.

Доказать расходимость гармонического ряда можно следующим путем. Сравним гармонический ряд (выделив в нем для наглядности группы из 2, 4, 8, ... членов) с другим рядом, расходимость которого легко доказать.

$$1+\frac{1}{2}+\overbrace{\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]}^{\text{2 члена}}+\overbrace{\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]}^{\text{4 члена}}+\overbrace{\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right]}^{\text{8 членов}}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right]+\cdots$$

Во втором ряду каждая группа, заключенная в квадратные скобки, равна $\frac{1}{2}$. Так как рассматриваемый ряд содержит бесконечное множество таких групп, то его сумма — величина бесконечно большая, следовательно, ряд расходящийся.

С другой стороны, каждый член гармонического ряда больше или равен соответствующему члену второго ряда, поэтому гармонический ряд и подавно расходится.

В силу указанных обстоятельств выполнение условия (VIII.5) еще не гарантирует сходимости ряда, т. е. это условие является только необходимым, но недостаточным.

Для рядов с комплексными членами остаются справедливыми также следующие простейшие свойства сходящихся рядов с действительными членами, которые мы приводим здесь без доказательств.

1. Свойство сходимости или расходимости ряда не изменится, если все его члены умножить на одно и то же число, отличное от нуля.

2. Если ряды

$$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n,$$
$$S_2=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \qquad \text{(VIII.6)}$$

сходятся и имеют суммы, соответственно равные S_1 и S_2, то сходятся также и ряды:

$$S_1\pm S_2=(\alpha_1\pm\beta_1)+(\alpha_2\pm\beta_2)+\cdots+(\alpha_n\pm\beta_n)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\pm\beta_n), \qquad \text{(VIII.7)}$$

и суммы их соответственно равны S_1+S_2 и S_1-S_2.

3. Свойство сходимости или расходимости ряда не изменится, если к ряду прибавить или от него отбросить произвольное конечное число каких угодно (ограниченных) членов.

---

* Число c называется *средним гармоническим* чисел a и b, если

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

Легко видеть, что, начиная со второго, каждый член рассматриваемого ряда есть среднее гармоническое двух соседних членов ряда. Отсюда и происходит наименование этого ряда.

Если ряд, образованный из модулей членов ряда (VIII.2),

$$|a_1+ib_1|+|a_2+ib_2|+\cdots+|a_n+ib_n|+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+ib_n|, \quad \text{(VIII.8)}$$

или в другой форме записи

$$+\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\cdots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\right),$$

сходится, то в силу очевидных неравенств

$$+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant|a_n|; \quad +\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant|b_n|$$

ряды (VIII.4) будут сходиться. Следовательно, будет сходиться и ряд (VIII.2) В этом случае он называется *абсолютно сходящимся.* Дадим точную формулировку этому важному понятию.

Определение 2. *Ряд с комплексными величинами называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из модулей его членов.*

Признаки сходимости и свойства абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами вполне аналогичны признакам и свойствам абсолютно сходящихся рядов с действительными членами. Все эти признаки и свойства можно получить из рядов с действительными членами, заменяя термин «абсолютное значение» на термин «модуль».

Приведем основные из них. Доказательства этих теорем можно найти, например, у И. И. Привалова [111].

1. Теорема сравнения. *Если*

$$|\alpha_n|\leqslant q|\beta_n|, \quad \text{(VIII.9)}$$

где q — положительное постоянное число, не зависящее от n, а β_n — общий член абсолютно сходящегося ряда, то и ряд (VIII.2)

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n; \quad \alpha_n=a_n+ib_n$$

абсолютно сходящийся.

2. Признак Даламбера (J. L. D'Alembert, 1717—1783). *Если, начиная с некоторого значения n,*

$$\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|\leqslant q<1, \quad \text{(VIII.10)}$$

где q — положительное постоянное число, не зависящее от n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходится.

3. Признак Коши (A. L. Cauchy, 1789—1857). *Если, начиная с некоторого значения n,*

$$\sqrt[n]{|\alpha_n|}\leqslant q<1, \quad \text{(VIII.11)}$$

где q — положительное постоянное число, не зависящее от n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ абсолютно сходится.

4. Теорема Коши. *Если два ряда*

$$S_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

и

$$S_2=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_n+\cdots$$

абсолютно сходятся и имеют суммы S_1 и S_2, то и ряд

$$\alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1) + \ldots, \qquad \text{(VIII.12)}$$

образованный из произведений их членов, записанных в произвольном порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна произведению S_1S_2.

5. *Сумма абсолютно сходящегося ряда не изменяется от произвольной перестановки его членов.*

Последнее свойство может показаться очевидным, однако это не так, и сумма ряда, сходящегося не абсолютно (такие ряды называются *условно сходящимися*), при перестановке членов ряда может измениться. Более того, Бернгард Риман (Bernhard Riemann, 1826—1866) доказал следующую замечательную теорему. *Если ряд сходится условно, то можно так переставить его члены, чтобы вновь полученный ряд имел любую наперед заданную сумму; можно также добиться того, чтобы новый ряд оказался расходящимся.* Доказательство см., например, у Нины Карловны Бари [4, стр. 44].

Первым обратил на это внимание Петер Густав Лежен Дирихле (Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805—1859) и привел такой пример.

Ряды

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

и

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

состоящие из одних и тех же членов с одними и теми же знаками, стремятся к различным пределам. Действительно, представляя эти ряды в общем виде, имеем

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right),$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right),$$

откуда

$$S_2 - S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}S_1$$

и, следовательно, $S_2 = \frac{3}{2}S_1$.

Сумма первого ряда (как показано в § 96) равна

$$S_1 = \ln 2 = 0{,}693147 \ldots,$$

так что

$$S_2 = 1{,}03972 \ldots.$$

Из-за того, что сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка его членов, *теорема Коши об умножении рядов не применима к условно сходящимся рядам.*

Таким образом, только в случае абсолютно сходящихся рядов все основные операции, включая перестановку членов и умножение, выполняются по тем же законам, что и в случае конечных сумм. Этим и объясняется то важное значение, которое имеют абсолютно сходящиеся ряды.

§ 93. Функциональные ряды. Равномерная сходимость

Рассмотрим бесконечный ряд

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, \quad \text{(VIII.13)}$$

члены которого суть функции комплексной переменной, определенные в некоторой области D (или на линии Γ). Такие ряды называются *функциональными* в отличие от числовых рядов, рассмотренных в § 92.

Если ряд (VIII.13) сходится при всяком значении z, которое принадлежит области D (или линии Γ), то он называется *сходящимся в области D (или на линии Γ)*.

Сумма ряда $s(z)$ будет некоторой функцией от z; разность между суммой ряда $s(z)$ и суммой его первых n членов $s_n(z)$ называется n-м остатком ряда

$$R_n(z) = s(z) - s_n(z). \quad \text{(VIII.14)}$$

Существенно отметить, что сумма ряда (VIII.13) может быть разрывной функцией и в том случае, когда каждый из членов ряда является функцией непрерывной.

Рассмотрим для иллюстрации следующий пример ряда:

$$s(z) = z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + \cdots + \frac{z^2}{(1+z^2)^{n-1}} + \cdots. \quad \text{(VIII.15)}$$

Данный ряд сходится при всех действительных значениях z, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+z^2} < 1$ при $z \neq 0$.

Для рассматриваемого ряда имеем

$$s_n(z) = 1 + z^2 - \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}},$$

и, следовательно, при $z \neq 0$

$$s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = 1 + z^2.$$

Отсюда предельное значение суммы $s(z)$ при $z \to 0$ будет $\lim\limits_{z\to 0} s(z) = 1$, в то время как при $z = 0$ непосредственно из (VIII.15) следует, что частичное значение $s_n(0) \equiv 0$ (при любом n) и, следовательно, $s(0) = 0$.

Таким образом, при $z = 0$ сумма ряда (VIII.15) имеет точку разрыва первого рода, хотя все его члены — непрерывные функции.

В 1841—1848 гг. Вейерштрассом (K. Weierstraß, 1815—1897), Зейделем (L. F. Seidel, 1821—1896) и Стоксом (J. G. Stokes, 1819—1903) было установлено, что разрывность суммы бесконечного ряда непрерывных функций связана с особенным характером сходимости ряда, а именно, с так называемой *неравномерной сходимостью ряда*.

Определение. *Бесконечный ряд непрерывных функций* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *называется равномерно сходящимся в области D (или на линии Γ), если произвольно заданному положительному числу ε можно привести в соответствие такое*

целое положительное число N, не зависящее от z, что при $n \geqslant N$ будет (оба приводимых условия эквивалентны)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon, \text{ или } |R_n(z)| < \varepsilon, \qquad \text{(VIII.16)}$$

где p — произвольное целое положительное число.

Если такого числа N, одного и того же для всех значений z в рассматриваемой области, нельзя найти для всякого ε, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ называется *неравномерно сходящимся*.

Равномерная сходимость представляет собой наиболее сильный тип сходимости, которая только и обеспечивает для равномерно сходящихся рядов некоторые очень важные свойства, в том числе возможность их почленного интегрирования и дифференцирования.

Простая, т. е. не обязательно равномерная, сходимость представляет собой более сложный тип сходимости, который в данной работе рассматриваться не будет.

Определение простой сходимости отличается от определения равномерной сходимости отсутствием требования, чтобы число N зависело только от ε; допускается, чтобы N зависело также от значения z, принадлежащего, конечно, области D (или кривой Γ).

Равномерная сходимость, как уже подчеркивалось, зависит от всей совокупности значений z в данной области, и один и тот же ряд в одной области (или вдоль определенной кривой) может сходиться равномерно, а в более широкой области сходимость может быть уже неравномерной. Так, например, ряд

$$\frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{z^2+n} + \cdots$$

сходится равномерно (но не абсолютно, так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z^2+k|}$ расходящийся) на всей действительной оси.

В самом деле, при действительных значениях z рассматриваемый ряд будет знакочередующимся рядом, члены которого монотонно убывают по абсолютной величине. Благодаря этому $n-1$ остаток ряда по абсолютному значению будет меньшим, чем абсолютное значение n-го члена ряда [4; 125, т. I]

$$|R_{n-1}| < \frac{1}{z^2+n},$$

и для справедливости неравенства $|R_{n-1}| < \varepsilon$ достаточно, если $\frac{1}{z^2+n} \leqslant \varepsilon < 1$, т. е. если $z^2 + n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Следовательно, достаточно взять $N \geqslant 1 + \frac{1}{\varepsilon}$, чтобы при всяком действительном z выполнялось условие (VIII.16), если только $n \geqslant N$.

Если же z будет принимать, например, чисто мнимые значения, то члены рассматриваемого ряда для любого n при $z \to i\sqrt{n}$ будут расти беспредельно.

Рассмотренный в начале этого параграфа ряд (VIII.15) хотя и сходится абсолютно при действительных значениях z, но его сходимость в окрестности точки $z = 0$ неравномерная. Действительно, для равномерной сходимости необходимо, чтобы при произвольно выбранном $\varepsilon < 1$

$$R_n = \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}} < \varepsilon,$$

начиная с некоторого n, т. е. чтобы соблюдалось неравенство

$$(1+z^2)^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$$

или

$$(n-1)\lg(1+z^2) > \lg\frac{1}{\varepsilon},$$

откуда

$$n > \frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg(1+z^2)} + 1.$$

Правая часть полученного неравенства не ограничена сверху на любом отрезке действительной оси, включающем точку $z=0$. Поэтому и не существует такого независимого от z числа N, чтобы выполнялось условие (VIII.16) при $n \geqslant N$. Тем не менее для любого фиксированного n можно подобрать соответствующее N (но оно будет зависеть от z), которое обеспечит выполнение условия (VIII.16) при $n \geqslant N$, т. е. ряд (VIII.15) обладает простой, а не равномерной сходимостью, чем и объясняется тот факт, что сумма этого ряда при $z=0$ имеет точку разрыва.

В § 92 показано, что абсолютно сходящиеся ряды (а под рядом всегда понимают бесконечную сумму членов) подобны конечным суммам в том смысле, что их можно перемножать и переставлять в них члены в произвольном порядке, не изменяя суммы ряда.

Сходство равномерно сходящихся рядов с конечными суммами идет еще дальше, и для рядов справедливы следующие теоремы, которые приводим без доказательств (доказательства см., например, у Ю. Д. Соколова [130, гл. III, § 2 и гл. VI, § 1] или у В. Л. Гончарова [28, гл. VI, § 36]).

Теорема 1. *Если бесконечный ряд* $\sum f_k(z)$ *непрерывных функций от* z *сходится равномерно в некоторой замкнутой области* D *(или на линии* Γ*), то его сумма есть также непрерывная функция от* z *в этой области* D *(или на линии* Γ*).*

Теорема 2. *При тех же условиях, что и в теореме 1, если, кроме того, все функции* $f_k(z)$ *— интегрируемые в* D *(или на* Γ*), то в этой области* D *(или на* Γ*) ряд можно интегрировать почленно и интеграл от суммы ряда будет равен сумме интегралов от каждого члена ряда.*

Теорема 3. *При тех же условиях, если, кроме того, в* D *(или на* Γ*), все функции* $f_k(z)$ *имеют непрерывные производные* $f_k'(z)$ *и если ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно, то в области* D *(или на* Γ*) возможно почленное дифференцирование*

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\right\}' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z).$$

В заключение приведем простой достаточный **признак Вейерштрасса** равномерной и абсолютной сходимости ряда функций от z: *для равномерной и абсолютной сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *в некоторой области* D *достаточно, чтобы члены ряда в области* D *по модулю не превышали членов сходящегося знакоположительного ряда*

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots, \qquad \text{(VIII.17)}$$

т. е. чтобы соблюдалось неравенство

$$|f_k(z)| \leqslant M_k.$$

Действительно, благодаря сходимости ряда (VIII.17) можно найти такое положительное целое число N, не зависящее от z, что n-й ($n \geqslant N$) остаток ряда (VIII.17), а следовательно и $|R_n(z)|$, будет меньше любого наперед заданного положительного числа ε.

§ 94. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots, \qquad \text{(VIII.18)}$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ — действительные положительные числа.

Для таких рядов Лейбниц доказал теорему, которая позволяет дать исчерпывающий ответ на вопрос: какое число членов ряда (VIII.18) следует взять для того, чтобы вычислить его сумму с наперед заданной точностью. В случае других (незнакочередующихся) рядов ответить на этот, весьма важный для практики, вопрос, к сожалению, бывает иногда очень трудно.

Теорема Лейбница. *Если в знакочередующемся ряде*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n + \cdots$$

члены монотонно убывают и с ростом n стремятся к нулю:

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots; \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \qquad \text{(VIII.19)}$$

то ряд (VIII.18) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена. Остаток такого ряда по абсолютной величине не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Доказательство. Рассмотрим сначала сумму $n = 2m$ первых четных членов ряда (VIII.18)

$$s_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Согласно условию (VIII.19) выражение в каждой из рассматриваемых скобок положительно. Следовательно, сумма s_{2m} также положительна

$$s_{2m} > 0$$

и возрастает по мере увеличения m.

Представим эту же сумму в таком виде:

$$s_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

По условию (VIII.19) каждая из скобок положительна. Поэтому, выполнив указанные выше действия, мы получим число, меньшее чем u_1, т. е.

$$s_{2m} < u_1.$$

Таким образом, мы установили, что s_{2m} с ростом m возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что s_{2m} стремится к конечному пределу, который обозначим через s:

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = s,$$

причем

$$0 < s < u_1.$$

Покажем, что и при нечетном $n = 2m + 1$ частичная сумма $s_n = s_{2m+1}$ стремится к тому же пределу s.

Действительно,

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1},$$

а в таком случае

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} + \lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = s,$$

поскольку по второму из условий (VIII.19) $\lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$.

Тем самым мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

как при четном $n = 2m$, так и при нечетном $n = 2m + 1$. Следовательно, ряд (VIII.18) сходится.

Остается оценить остаток ряда R_n. Имеем:

$$R_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm \cdots,$$

причем одновременно надо брать либо верхние знаки, либо нижние. В таком случае

$$R_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \cdots). \qquad \text{(VIII.20)}$$

Но выражение, стоящее в скобках, в свою очередь представляет собой знакочередующийся ряд, сумма которого, как только что было доказано, по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда, т. е. меньше, чем u_{n+1}. Значит, ошибка, совершаемая при замене $s = s_n + R_n$ на s_n, не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов, что и требовалось доказать.

Больше того, применив теорему Лейбница к ряду (VIII.20), видим, что в скобках стоит положительная величина. Следовательно, знак R_n совпадает со знаком $\pm u_{n+1}$, т. е. *при указанных в теореме условиях знак остатка ряда (VIII.18) совпадает со знаком первого из отброшенных членов.*

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots.$$

Решение. Данный ряд является знакочередующимся. Так как

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} \text{ и } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то все условия теоремы Лейбница выполнены, и поэтому данный ряд сходится.

Сумма n первых членов этого ряда

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

отличается от суммы ряда s на величину, меньшую чем $\frac{1}{n+1}$. В § 96 мы покажем, кроме того, что его сумма s равна $\ln 2$.

§ 95. Степенные ряды. Радиус сходимости

Как мы видели, наиболее простыми будут ряды, сходящиеся не только абсолютно, но и равномерно. К таким рядам относятся и степенные ряды, чем обусловлено то особо важное значение, которое они имеют в самых различных областях математики и ее приложениях.

Определение. *Степенным рядом (точнее, целым степенным) называется бесконечный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + c_3 (z - z_0)^3 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots, \qquad \text{(VIII.21)}$$

где c_k и z_0 — заданные комплексные (или действительные) числа, не зависящие от z. Число z_0 для краткости называют центром ряда. В частности, может быть $z_0 = 0$.

Выясним прежде всего область сходимости степенного ряда, для чего докажем следующую теорему.

Первая теорема Абеля (1826). *Если степенной ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *сходится в некоторой точке* $z=z_1$, *то он сходится, и притом абсолютно и равномерно, во всяком круге с центром* z_0 *и радиусом* $\rho < |z_1 - z_0|$, *т. е. радиусом, меньшим чем расстояние от* z_1 *до* z_0 (рис. 228).

Переходя к доказательству теоремы, предположим, что z — произвольная точка круга $|z-z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$, и представим n-й член ряда (VIII.21) в виде

$$c_n (z-z_0)^n = c_n (z_1 - z_0)^n \left(\frac{z-z_0}{z_1 - z_0}\right)^n.$$

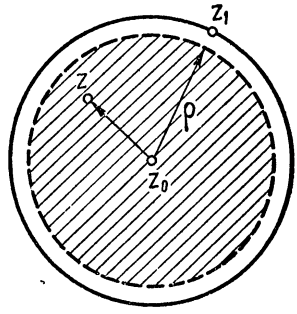


Рис. 228.

Из сходимости ряда в точке z_1, которая имеет место по условию теоремы, вытекает, что

$$|c_n (z_1 - z_0)^n| \leqslant M$$

для всех n, где M — некоторое положительное число

Кроме того, в силу нашего предположения,

$$\left|\frac{z-z_0}{z_1 - z_0}\right| \leqslant q, \text{ где } 0 \leqslant q < 1.$$

Следовательно, для всех

$$|c_n (z-z_0)^n| \leqslant M q^n, \quad 0 \leqslant q < 1,$$

откуда и вытекает по признаку Вейерштрасса абсолютная и равномерная сходимость ряда внутри круга $|z-z_0| \leqslant \rho < |z_1 - z_0|$, так как члены рассматриваемого ряда по модулю меньше членов убывающей геометрической прогрессии, составленной из положительных чисел.

В частности, ряд сходится абсолютно (но, вообще говоря, не равномерно) во всех точках круга $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$. Отсюда вытекает, что если степенной ряд расходится при некотором значении $z=z_1$, то он расходится и при всяком значении z, для которого

$$|z-z_0| > |z_1 - z_0|.$$

Теорема, сформулированная Нильсом Генриком Абелем, играет в теории степенных рядов исключительно важную роль, и, в частности, из этой теоремы следует, что степенной ряд сходится в некотором круге, радиус которого будем обозначать через R, причем ряд сходится абсолютно при

$$|z-z_0| < R,$$

расходится при

$$|z-z_0| > R$$

и равномерно сходится в любом круге

$$|z-z_0| \leqslant \rho < R.$$

На самом же круге $|z-z_0| = R$ ряд может быть сходящимся или расходящимся, и установление этого факта требует дополнительных исследований, иногда очень сложных.

Радиус круга R называется *радиусом сходимости степенного ряда*, а сам

круг — *кругом его сходимости*. Для определения радиуса сходимости R служит формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{VIII.22}$$

где $\overline{\lim}$ обозначает верхний предел [111, гл. II, § 3].

Эта формула была получена Огюстом Луи Коши в 1821 г. и со всей строгостью доказана в 1893 г. Жаком Соломоном Адамаром (Jacques Solomon Hadamard, 1865—1963). Она называется *формулой Коши—Адамара*.

Радиус сходимости можно также определять по формуле, вытекающей из признака сходимости рядов Даламбера:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|, \tag{VIII.23}$$

если только указанный предел существует.

В частности, R может равняться нулю (тогда сумма ряда сходится к его первому члену c_0) или бесконечности (тогда ряд сходится во всей комплексной плоскости z).

На основании теорем § 93 и доказанной равномерной сходимости степенного ряда внутри его круга сходимости вытекают весьма важные свойства степенных рядов, которые сформулируем в виде следующих теорем.

Теорема 1. *Сумма степенного ряда есть непрерывная функция от z внутри круга сходимости ряда.*

Этот результат дополняется **второй теоремой Абеля** (1826): *если степенной ряд сходится в точке z_1 окружности $|z - z_0| = R$, то его сумма $s(z)$ есть функция, непрерывная в точке z_1 самой окружности вдоль радиуса, идущего из центра z_0 в точку z_1.*

А. Прингсхейм доказал, что при условиях этой теоремы $s(z)$ непрерывна в точке z_1 вдоль любой линии, которая не касается окружности в точке z_1.

Теорема 2. *Степенной ряд внутри круга его сходимости можно почленно интегрировать, и сумма полученного ряда будет представлять собой интеграл от суммы данного ряда:*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} + C. \tag{VIII.24}$$

Теорема 3. *Степенной ряд внутри круга его сходимости можно почленно дифференцировать, и его сумма будет представлять собой производную от суммы, данного степенного ряда:*

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right\}' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}. \tag{VIII.25}$$

Для того чтобы последнее свойство имело место, надо доказать, что ряд полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R (в силу чего он также будет равномерно сходящимся рядом, как этого требует условие теоремы 3 § 93).

Пусть z — некоторая точка внутри круга сходимости и R_1 — число, удовлетворяющее неравенству $|z - z_0| < R_1 < R$. Так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R_1^n$ сходится абсолютно, то существует такое положительное число M, что

$$|c_n R_1^n| < M, \text{ или } |c_n| < \frac{M}{R_1^n}$$

при всех значениях n.

Тогда для модуля общего члена ряда, полученного дифференцированием, имеем

$$n|c_n||(z-z_0)^{n-1}|<\frac{M}{R_1}\cdot\frac{n|(z-z_0)^{n-1}|}{R_1^{n-1}},$$

т. е. модули членов ряда (VIII.25) меньше соответствующих членов сходящегося по признаку Даламбера ряда. Следовательно, ряд (VIII.25) сходится абсолютно во всех точках внутри круга сходимости исходного степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Если $|z-z_0|>R$, то $c_n(z-z_0)^n$, а благодаря этому и $nc_n(z-z_0)^{n-1}$ не стремятся к нулю и ряд расходится.

Таким образом, ряд (VIII.25) и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ имеют один и тот же круг сходимости.

Следствие 1. *Ряд* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, *полученный почленным интегрированием степенного ряда* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, *имеет тот же радиус сходимости* R, *что и исходный ряд.*

Действительно, если бы это было не так, то, дифференцируя почленно ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$, мы получили бы исходный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ с радиусом сходимости $R_1\neq R$, что противоречит теореме 3.

Следует, однако, отметить, что из факта равенства радиусов сходимости данного степенного ряда и рядов, полученных почленным дифференцированием или интегрированием, нельзя сделать никаких выводов относительно характера сходимости этих рядов и на самой границе области сходимости, т. е. на самой окружности $|z-z_0|=R$. Так, например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится во всех точках границы $|z|=1$, тогда как после интегрирования получается ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}$, сходящийся при $z=-1$. Действительно, при $z=-1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=-\ln 2.$$

Аналогично ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$, радиус сходимости которого $R=1$ (докажите это, воспользовавшись формулой (VIII.23)), абсолютно сходится во всех точках границы области сходимости $|z|=1$, так как при $|z|=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right|_{z=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots, \quad \text{(VIII.26)}$$

а ряд, стоящий в правой части равенства (VIII.26), сходящийся.

Для того чтобы это доказать, достаточно доказать, что сходится ряд

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots. \qquad \text{(VIII.27)}$$

Сравним ряд (VIII.27) с рядом

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

который, как известно (см. § 92, пример 3), сходится. Так как

$$\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n(n+1)},$$

то, положив в формуле (VIII.9) $q=1$ и воспользовавшись теоремой сравнения, заключаем, что ряд (VIII.27) сходится. Следовательно, сходится и ряд (VIII.26).

Продифференцировав ряд

$$s(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2},$$

получим ряд $s'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$, который на окружности $|z|=1$ является расходящимся, по крайней мере в точке $z=1$, как гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$.

Приведенные примеры также хорошо иллюстрируют сказанное ранее о поведении ряда на самой границе области сходимости. А именно, на контуре сходимости ряд может быть всюду сходящимся (но отнюдь не обязательно абсолютно или равномерно сходящимся) или всюду расходящимся либо может сходиться только в отдельных точках и расходиться в других точках.

Следствие 2. *Степенной ряд* $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ *в круге его сходимости* $|z-z_0|<R$ *можно дифференцировать (и интегрировать) произвольное число раз. В результате получим новые степенные ряды, которые будут иметь тот же радиус сходимости* R *и суммы которых будут равны последовательным производным (или интегралам) от суммы ряда* $s(z)$.

В заключение докажем важную для дальнейшего теорему.

Теорема 4. *Сумма любого степенного ряда*

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

есть регулярная (голоморфная) функция внутри круга сходимости.

Чтобы доказать, что в области D функция регулярна, надо доказать, что она во всех точках области D (без какого-либо исключения) имеет производную (см. § 127 гл. X).

Для простоты выкладок, не ограничивая общности рассуждений, положим $z_0=0$, что равносильно замене

$$z^*=z-z_0.$$

В таком случае будем иметь

$$\frac{s(z+\Delta z)-s(z)}{\Delta z}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}\right].$$

Пусть ρ — такое число, что

$$|z|\leqslant\rho<R;\quad |z+\Delta z|\leqslant\rho<R,$$

тогда

$$|c_n\{(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}\}|\leqslant n\,|c_n\rho^{n-1}|.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n\rho^{n-1}|$ сходится, следовательно, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}$ при фиксированном значении z сходится равномерно относительно Δz. Благодаря этому $\frac{s(z+\Delta z)-s(z)}{\Delta z}$ есть непрерывная функция от Δz и

$$s'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{s(z+\Delta z)-s(z)}{\Delta z}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(z^{n-1}+z^{n-1}+\cdots+z^{n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_nz^{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Эту теорему можно получить также, как следствие рассмотренных выше теорем, которые мы привели без доказательств.

§ 96. Разложение в степенные ряды функций $\ln(1+z)$ и $\operatorname{arctg} z$

Рассмотрим степенной ряд

$$1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^nz^n+\cdots. \tag{VIII.28}$$

Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-z$ и, значит, сходится при $|-z|=|z|<1$, т. е. в круге $|z|<1$. Сумма рассматриваемой прогрессии согласно формуле (VIII.3′), в которой надо положить $a=1$, $q=-z$, равна $\frac{1}{1+z}$. Следовательно, можно написать

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^{n-1}z^{n-1}+(-1)^nz^n+\cdots. \tag{VIII.29}$$

Функция $w=\frac{1}{1+z}$ равенством (VIII.29) представлена в виде суммы ряда, или, как говорят, *разложена в степенной ряд* *.

---

* Ряд (VIII.29) можно также получить, разделив непосредственно единицу на двучлен $(1+z)$:

$$\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l}1\\(1+z)\end{array} & 1+z \\ \hline -z & 1-z+z^2-\cdots \\ +(z+z^2) & \\ \hline \quad z^2 & \\ \quad\cdots\cdots & \end{array}$$

Так как степенной ряд внутри его круга сходимости можно почленно интегрировать, то, проинтегрировав равенство (VIII.29) в пределах от 0 до z, получаем

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \int_0^z [1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^{n-1} z^{n-1} + \cdots]\, dz$$

или согласно формулам (V.8) и (V.9) § 54, которые остаются справедливыми и в комплексной области,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots. \qquad \text{(VIII.30)}$$

Таким образом, мы получили разложение функции $\ln(1+z)$ в степенной ряд. Разложение (VIII.30) имеет место при $|z| < 1$. В точке $z = 1$, лежащей на окружности сходимости ряда (VIII.30), имеем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots = 0{,}693147\ldots, \qquad \text{(VIII.31)}$$

причем ряд в правой части равенства (VIII.31) есть знакочередующийся и согласно теореме Лейбница сходится.

Пример 1. Вычислить при помощи рядов с пятью десятичными знаками функции $\frac{1}{1+z}$ и $\ln(1+z)$ для $z = 0{,}25$.

Решение. Вычислив согласно формулам (VIII.29) и (VIII.30) необходимое число членов ряда (с одним запасным знаком) и просуммировав результаты, получаем

$$\frac{1}{1+z} = 0{,}799999 \approx 0{,}80000; \quad \ln(1+z) = 0{,}223142 \approx 0{,}22314.$$

Все эти вычисления приведены во второй и третьей колонках табл. 78.

Таблица 78

Ряд (VIII.29)		Ряд (VIII.30)		Ряд (VIII.33)		
n	$z = 0{,}25$	$z = 0{,}25$	$z = 1$	$\frac{1+z}{1-z} = 2;\ z = \frac{1}{3}$	$\frac{1+z}{1-z} = \sqrt{10}$	$2n+1$
	$(-1)^n z^n$	$(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$	$(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$	$\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	$\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	
0	+1,000000	—	—	0,333333333	0,519493853	1
1	−0,250000	+0,250000	+1,000000	0,012345679	0,046732604	3
2	+0,062500	−0,031250	−0,500000	0,000823045	0,007567145	5
3	−0,015625	+0,005208	+0,333333	0,000065321	0,001458696	7
4	+0,003906	−0,000977	−0,250000	0,000005645	0,000306183	9
5	−0,000977	+0,000195	+0,200000	0,000000513	0,000067607	11
6	+0,000244	−0,000041	−0,166667	0,000000048	0,000015438	13
7	−0,000061	+0,000009	+0,142857	0,000000005	0,000003611	15
8	+0,000015	−0,000002	−0,125000	0,000000000	0,000000860	17
9	−0,000004	0,000000	+0,111111		0,000000208	19
10	+0,000001		−0,100000		0,000000051	21
11			+0,090909		0,000000012	23
12			−0,083333		0,000000003	25
13			+0,076923		0,000000001	27
$\sum_n =$	+0,799999	+0,223142	+0,730133	0,346573589	0,575646272	$= \sum_n$
$M = 0{,}434294482;\ \log_{10}\frac{1+z}{1-z} = 2M\sum_n =$				0,301029994	0,500000000	$= \log N$

Непосредственная проверка в случае прогрессии дает

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1{,}25}=\frac{4}{5}=0{,}8,$$

а из шестизначных таблиц натуральных логарифмов находим $\ln 1{,}25 = 0{,}223144$, так что в пределах заданной точности все вычисленные знаки верные.

Упражнение 1. Продублировать решение примера 1, а затем найти с той же точностью $\frac{1}{1+z}$ и $\ln(1+z)$ при $z=0{,}2$.

При $|z|\to 1$ ряд (VIII.30) сходится очень медленно, поэтому на практике им пользуются редко. Однако сходимость ряда (VIII.30) легко улучшить. Для этого заменим в нем предварительно z на $-z$, что приведет нас к следующей формуле:

$$\ln(1-z)=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots\right),\quad |z|<1. \qquad \text{(VIII.32)}$$

После вычитания из ряда (VIII.30) ряда (VIII.32) получаем новый ряд:

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=2\left[z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots+\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right],\quad |z|<1, \qquad \text{(VIII.33)}$$

который сходится значительно быстрее исходных рядов.

Значение z, необходимое для того чтобы вычислить логарифм заданного числа

$$N=\frac{1+z}{1-z}, \qquad \text{(VIII.34)}$$

получим, решив это уравнение относительно z:

$$z=\frac{N-1}{N+1}. \qquad \text{(VIII.35)}$$

При этом если $0\leqslant|z|<1$, то модуль величины N изменяется в пределах $1\leqslant|N|<\infty$, так что при помощи ряда (VIII.33) можно вычислять логарифм любого числа $|N|\geqslant 1$, в то время как ряд (VIII.30) позволяет находить логарифм только для чисел $1\leqslant|1+z|<2$ и $\ln 2$.

Пример 2. Вычислить с семью верными десятичными знаками $\ln 2$ и $\ln 10$.

Решение. Положив в формуле (VIII.35) $N=2$, находим $z=\frac{N-1}{N+1}=\frac{1}{3}$. Вычислив (с двумя запасными знаками) каждый член ряда (VIII.33), просуммировав их и умножив результат на два, получаем

$$\ln 2 = 2\cdot 0{,}346573589 = 0{,}693147178,$$

причем первые семь знаков верные. Все эти вычисления приведены в пятой колонке табл. 78. Если же воспользоваться рядом (VIII.30) при $z=1$, то для $n=13$ получим $\ln 2\approx\sum_{13}\approx 0{,}73$, т. е. результат, содержащий лишь одну значащую цифру. Действительно, согласно теореме Лейбница погрешность знакочередующегося ряда (VIII.31) при $n=13$ равна первому отброшенному члену, т. е.

$$\varepsilon=\frac{1}{14}\approx 0{,}07,$$

а для того чтобы получить результат с семью верными знаками, остаток ряда R_n должен быть меньше чем 0,00000005. Следовательно, в этом случае нужно взять 20000000 членов ряда (VIII.31):

$$|R_n|<\frac{1}{n+1}\leqslant 0{,}00000005;\quad n\geqslant 20000000.$$

Переходим ко второй части примера, и для того чтобы сократить объем вычислений, найдем $\ln\sqrt{10}=\frac{1}{2}\ln 10$.

Положив в формуле (VIII. 35) $N=\sqrt{10}=3{,}162277660$, имеем $z=0{,}519493853$, и тогда $\sum_{13}=\sum_{n=1}^{13}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=0{,}575646272$. Отсюда согласно формуле (VIII.33) $\ln\sqrt{10}=2\sum_{13}$ и, следовательно, $\ln 10=2\ln\sqrt{10}=4\sum_{13}=2{,}302585088\approx 2{,}3025851$.

Зная $\ln 10$, легко перейти от натуральных логарифмов к десятичным, поскольку в соответствии с результатами § 37 гл. III

$$\log_{10} z = M\ln z, \tag{VIII.36}$$

где модуль перехода M определяется равенством

$$M=\log_{10} e=\frac{1}{\ln 10}=0{,}43429448. \tag{VIII.37}$$

Более точное значение рассматриваемых величин есть

$$\frac{1}{M}=\ln 10=2{,}302585092994046;\quad M=\log e=0{,}434294481903252,$$

так что вычисления, выполненные в табл. 78, дали результат с одним более точным знаком, чем требовалось в условии.

Заканчивая пример 2, вычислим еще $\log 2$:

$$\log 2=M\ln 2=0{,}434294482\cdot 0{,}693147178\approx 0{,}301029995\approx 0{,}3010300.$$

На методике вычисления таблиц логарифмов мы остановимся более подробно в следующем параграфе.

Переходим к разложению в степенной ряд функции $\operatorname{arctg} z$. Заменяя в формуле (VIII. 29) z на z^2, имеем

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots,\ |z^2|<1. \tag{VIII.38}$$

Интегрируя это равенство почленно в пределах от 0 до z, находим

$$\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^z[1-z^2+z^4-z^6+\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots]dz \tag{VIII.39}$$

или, в соответствии с табл. 25,

$$\operatorname{arctg} z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\frac{z^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ |z|<1. \tag{VIII.40}$$

Можно показать, что это разложение остается справедливым и для $z=\pm 1$. Если взять $z=1$, то $\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4}$, и мы получаем ряд

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots. \tag{VIII.41}$$

Однако этот ряд невыгодно применять для вычисления числа π, так как для того, чтобы достичь высокой точности, требуется брать очень большое число членов. В § 134 гл. X мы дадим более эффективный метод вычисления числа π.

Пример 3. Вычислить с шестью значащими цифрами $\operatorname{arctg} 0{,}5$ и $\operatorname{arctg} 0{,}546302$.

Решение. По заданному z находим прежде всего z^2, а затем вычисляем все нечетные степени z, входящие в ряд (VIII.40), умножив предыдущую степень

z^{2n+1} на z^2, поскольку $z^{2n+3} = z^2 \cdot z^{2n+1}$. Разделив каждое из z^{2n+1} на показатель степени $2n+1$ и просуммировав (алгебраически) результаты, решаем поставленную задачу. Все необходимые вычисления приведены в табл. 79.

Таблица 79

Ряд (VIII. 40)		$z = 0{,}5$;	$z^2 = 0{,}25$	$z = 0{,}546302$;	$z^2 = 0{,}298446$
n	$2n+1$	z^{2n+1}	$(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	z^{2n+1}	$(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$
0	1	0,500000	+ 0,500000	0,546302	+ 0,546302
1	3	0,125000	— 0,041667	0,163042	— 0,054347
2	5	0,031250	+ 0,006250	0,048659	+ 0,009732
3	7	0,007813	— 0,001116	0,014522	— 0,002075
4	9	0,001953	+ 0,000217	0,004334	+ 0,000482
5	11	0,000488	— 0,000044	0,001293	— 0,000118
6	13	0,000122	+ 0,000009	0,000386	+ 0,000030
7	15	0,000031	— 0,000002	0,000115	— 0,000008
8	17	0,000008	0,000000	0,000034	+ 0,000002
9	19			0,000010	— 0,000001
$\operatorname{arctg} z = \sum_n =$			+ 0,463647	$\sum_n =$	+ 0,499999

Сравнив полученные результаты с результатами табл. I приложения, согласно которой

$$\operatorname{arctg} 0{,}5 = 0{,}463648 \text{ и } \operatorname{tg} 0{,}5 = 0{,}546302,$$

видим, что требуемая точность достигнута.

Полученную точность можно также оценить, применив теорему Лейбница, так как ряд (VIII.40) при действительных значениях z является знакочередующимся и погрешность результата не превышает первого из отброшенных членов ряда. Расхождение же результатов в последнем знаке обусловлено неустранимыми ошибками округления.

Упражнение 2. Вычислить по образцу табл. 79 $\operatorname{arctg} 0{,}2$ и результат проверить по табл. I приложения *.

При $|z| \to 1$ сходимость ряда (VIII. 40) резко ухудшается.

В области действительных чисел этот факт невозможно объяснить, так как для функции $\frac{1}{1+z^2}$ точки $z = \pm 1$ являются обыкновенными (не особыми) точками. Однако как только мы перейдем в комплексную область, то увидим, что при $z = \pm i$ знаменатель $1 + z^2$ в подынтегральном выражении обращается в нуль и, следовательно, сам интеграл (VIII. 39) при $z = \pm i$ не существует. Поэтому точки $z = \pm i$ для функции $\operatorname{arctg} z$ являются особыми, а радиус сходимости

* Вычисленные при $z = 0{,}2$ абсолютные значения членов ряда (VIII. 40) можно также проверить по данным, приведенным в следующем параграфе, в табл. 80.

степенного ряда (как будет дальше показано) и определяется расстоянием от его центра до ближайшей особой точки рассматриваемой аналитической функции.

Так как точки $z = \pm i$ есть точки пересечения мнимой оси с единичной окружностью $|z| = 1$, центр которой $z = 0$ совпадает с центром ряда (VIII. 40), то радиус сходимости этого ряда $R = 1$.

Аналогично в случае ряда (VIII. 29) точка $z = -1$ есть особая точка функции $\frac{1}{1+z}$, следовательно, для этого ряда также $R = 1$. Поэтому попытка вычислить значение функции $\frac{1}{1+z}$ при помощи ряда (VIII. 29) за пределами его круга сходимости, например для $z = 2$, приводит к следующему результату:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots,$$

который не имеет никакого числового смысла.

§ 97. Вычисление таблиц логарифмов

В предыдущем параграфе мы видели, насколько проста техника вычисления логарифмов при помощи рядов. Однако для выполнения таких массовых вычислений, как составление таблиц, более эффективным будет сочетание метода рядов с процессом субтабулирования, рассмотренным в § 80 гл. VI.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Вычислить с пятью верными знаками таблицу десятичных логарифмов $w = \log_{10} z$ на сегменте $[1; 10]$ с шагом $h = 0{,}01$.

Решение. Для обеспечения заданной точности все вычисления будем вести с одной запасной цифрой. В табл. 80 определены для трех опорных точек $N = 1{,}25$; $N = 1{,}50$; $N = 1{,}75$ значения десятичных логарифмов при помощи формулы

$$\log_{10} N = 2M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = 2M \sum\nolimits_n, \text{ где } 2M = 0{,}8685890, \qquad \text{(VIII.42)}$$

которую непосредственно получаем из формул (VIII.33), (VIII.34), (VIII.36). Присоединяя сюда найденное ранее значение $\log 2 = 0{,}301030$ и пользуясь формулами

$$\log 2N = \log 2 + \log N; \ \log N^2 = 2 \log N, \qquad \text{(VIII.43)}$$

вычисляем для сегмента $[1{,}50; 3{,}00]$ таблицу заданной функции $w = \log z$ с шагом $h_1 = 0{,}25$. Эти значения записываем в колонках z_k и $w_k = \log z_k$ табл. 81 и при помощи интерполяционной формулы (VI. 25) § 80 при $n = 2\nu = 6$ уплотняем исходную таблицу, переходя к шагу $h_2 = 0{,}05$. Методика вычислений полностью совпадает с методикой решения примера 2 § 80. Действительно, умножив при $u = 0{,}2$ и $u = 0{,}4$ весовые коэффициенты $c_k^{(6)}(t)$, которые мы взяли непосредственно из табл. III приложения, на стоящие в тех же строках значения функции w_k и просуммировав (алгебраически) результаты, получаем

$\log 2{,}05 = 0{,}008064 \cdot 0{,}176092 - 0{,}073920 \cdot 0{,}243038 + \ldots + 0{,}006336 \cdot 0{,}439333 = 0{,}311755;$

$\log 2{,}10 = 0{,}011648 \cdot 0{,}176092 - 0{,}099840 \cdot 0{,}243038 + \ldots + 0{,}010752 \cdot 0{,}439333 = 0{,}322220.$

Повторив эти же вычисления «на встречных курсах» для $u = 0{,}6$ и $u = 0{,}8$, находим

$\log 2{,}15 = 0{,}010752 \cdot 0{,}176092 - 0{,}087360 \cdot 0{,}243038 + \ldots + 0{,}011648 \cdot 0{,}439333 = 0{,}332438;$

$\log 2{,}20 = 0{,}006336 \cdot 0{,}176092 - 0{,}049280 \cdot 0{,}243038 + \ldots + 0{,}008064 \cdot 0{,}439333 = 0{,}342423$

Таблица 80

Ряд (VIII. 33)		$z = 0{,}111111$; $\frac{1+z}{1-z} = 1{,}25$; $z^2 = 0{,}012346$		$z = 0{,}200000$; $\frac{1+z}{1-z} = 1{,}50$; $z^2 = 0{,}040000$		$z = 0{,}272727$; $\frac{1+z}{1-z} = 1{,}75$; $z^2 = 0{,}074380$	
n	$2n+1$	z^{2n+1}	$\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	z^{2n+1}	$\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$	z^{2n+1}	$\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$
0	1	0,111111	0,111111	0,200000	0,200000	0,272727	0,272727
1	3	0,001372	0,000457	0,008000	0,002667	0,020285	0,006762
2	5	0,000017	0,000003	0,000320	0,000064	0,001509	0,000302
3	7			0,000013	0,000002	0,000112	0,000016
4	9					0,000008	0,000001
5	11					0,000001	0,000000
$2M = 0{,}8685890$; $\sum_n =$		0,111571		$\sum_n =$	0,202733	$\sum_n =$	0,279808
$\log N = 2M\sum_n$; $\log 1{,}25 =$		0,096909		$\log 1{,}50 =$	0,176092	$\log 1{,}75 =$	0,243038

Положив $z_{-1} = 2{,}25$; $z_{+1} = 2{,}50$, т. е. опустившись на одну строку вниз в колонке z_k, совершенно аналогично вычисляем $\log 2{,}30 = 0{,}361729$; $\log 2{,}35$; $\log 2{,}40$; $\log 2{,}45$. Продолжая процесс, легко построить всю таблицу значений функции $w = \log z$ с шагом $h_2 = 0{,}05$, а затем при помощи повторного уплотнения полученной таблицы перейти к заданному шагу $h = h_3 = 0{,}01$ и тем самым уменьшить первоначальный шаг h_1 в 25 раз.

Однако уплотнение таблицы с шагом $h_2 = 0{,}05$, как показывают разности, вычисленные в той же табл. 81, можно вести уже при $n = 2\nu = 4$, что значительно сокращает объем дальнейших вычислений.

Отметим, что расширять дальше сегмент [1; 10] нет необходимости, так как вне этого сегмента десятичные логарифмы изменяют только свою характеристику, но не мантиссу. Поэтому выполненные в данном примере вычисления носят вполне общий характер.

Упражнения

1. Вычислить по образцу табл. 80 с шестью значащими цифрами $\log 1{,}375$, а затем по формуле (VIII. 43) найти $\log 2{,}75$, значение которого было использовано в табл. 81.

2. По данным, полученным в табл. 81, уплотнить таблицу функции $w = \log z$ на сегменте [2,35; 2,45], уменьшив в пять раз ее шаг $h_2 = 0{,}05$, т. е. перейти от шага $h_2 = 0{,}05$ к шагу $h_3 = 0{,}01$.

Указание. Субтабулирование надо выполнить по интерполяционной формуле (VI. 25) при $n = 2\nu = 4$ (необходимые для этого весовые коэффициенты $c_k^{(4)}(t)$ приведены в табл. III приложения).

Остановимся на вопросе контроля точности результатов.

Для того чтобы в интерполяционной формуле (VI.25) выбрать такое n, при котором сохранялась бы точность исходных данных, надо исследовать ход разнос-

Таблица 81

k	$c_k^{(6)}(t)$	$u=0,2$	$u=0,4$	z_k	$w_k=\log z_k$	z	$w=\log z$	Δw	$\Delta^2 w$	$\Delta^3 w$	$\Delta^4 w$
						2,00	0,301030				
				1,50	0,176092						
						2,05	0,311755				
−3	$v_3^{(6)}$	+0,008064	+0,011648					−9545			
				1,75	0,243038				+206		
−2	$v_2^{(6)}$	−0,073920	−0,099840			2,10	0,322220			−11	
				2,00	0,301030			−9339	+195		+6
−1	$v_1^{(6)}$	+0,287040	+0,698880			2,15	0,332438			−5	
				2,25	0,352184			−9144	+190		−4
+1	$u_1^{(6)}$	+0,221760	+0,465920			2,20	0,342423			−9	
				2,50	0,397939			−8954	+181		
+2	$u_2^{(6)}$	−0,049280	−0,087360			2,25	0,352184				
				2,75	0,439333			−8773			
+3	$u_3^{(6)}$	+0,006336	+0,010752			2,50	0,397939				
	$c_k^{(6)}(1-t)$	$u=0,8$	$u=0,6$	3,00	0,477122						

тей заданной функции. Проанализировав табл. 82, видим, что для функции $w = \log_{10} z$ при шаге $h_1 = 0{,}25$, начиная со значения $z > 1{,}50$, практически равными нулю можно считать шестые разности $\Delta^6 w$, для которых граничная погрешность округления равна $2^5 = 32$ единицы последнего разряда (см. § 82 и 83 гл. VI). Поэтому при интерполировании по формуле (VI.25) мы сохраним точность исходных данных, если для $h_1 = 0{,}25$ и $z_k \geqslant 1{,}50$ возьмем $n = 6$, как это показано в табл. 82 косой чертой*.

Если возникнет необходимость повысить точность субтабулирования (при фиксированном n), то для этого достаточно перейти к более мелкому шагу, и, например, если шаг таблицы уменьшить в два раза, то каждая из разностей $\Delta^k w$ уменьшится приблизительно в 2^k раз. В частности, при шаге $h = 0{,}01$ для пятизначной таблицы логарифмов на сегменте [1; 10] всюду применима линейная интерполяция. Поэтому в рассматриваемом случае переход к более мелкому шагу нецелесообразен.

Заканчивая решение данного примера, сравним еще вычисленные в табл. 80 и 81 значения логарифмов со значениями, приведенными в таблице [14]. В результате убеждаемся, что все вычисленные цифры значащие и наибольшее отклонение не превышает одной единицы шестого знака. Округлив найденные значения до пяти десятичных знаков, мы и решаем поставленную задачу.

§ 98. Ряд Тейлора

Предположим, что функция $f(z)$ может быть разложена в степенной ряд (VIII.21) с центром $z_0 = a$:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots, \quad \text{(VIII.44)}$$

который сходится в круге радиуса R.

---

* Строго говоря, надо брать $z_k \geqslant 1{,}75$, так как при $z = 1{,}50$ модуль $|\Delta^6 w| = 124 \cdot 10^{-6} > 32 \cdot 10^{-6}$. Однако поскольку первое w_k в формуле (VI.25) умножается на весовой коэффициент $v_3^{(6)}(t) \leqslant 0{,}01182\ldots$, то небольшим превышением модуля шестой разности над его допустимым значением можно пренебречь.

Таблица 82

z	$w=\log_{10}z$	Δw	$\Delta^2 w$	$\Delta^3 w$	$\Delta^4 w$	$\Delta^5 w$	$\Delta^6 w$
0,25	—0,602060						
		+301030					
0,50	—0.301030		—124939				
		+176091		+73787			
0,75	—0,124939		—51152		—50664		
		+124939		+23123		+37841	
1,00	0,000000		—28029		—12823		—29823
		+96910		+10300		+8018	
1,25	+0,096910		—17729		—4805		—5429
		+79181		+5495		+2589	
1,50	+0,176091		—12234		—2216		—1536
		+66947		+3279		+1053	
1,75	+0,243038		—8955		—1163		—563
		+57992		+2116		+490	
2,00	+0,301030		—6839		—673		—228
		+51153		+1443		+262	
2,25	+0,352183		—5396		—411		—124
		+45757		+1032		+138	
2,50	+0,397940		—4364		—273		—45
		+41393		+759		+93	
2,75	+0,439333		—3605		—180		—43
		+37788		+579		+50	
3,00	+0,477121		—3026		—130		—14
		+34762		+449		+36	
3,25	+0,511883		—2577		—94		—9
		+32185		+355		+27	
3,50	+0,544068		—2222		—67		—14
		+29963		+288		+13	
3,75	+0,574031		—1934		—54		+2
		+28029		+234		+15	
4,00	+0,602060		—1700		—39		—9
		+26329		+195		+6	
4,25	+0,628389		—1505		—33		+3
		+24824		+162		+9	
4,50	+0,653213		—1343		—24		
		+23481		+138			
4,75	+0,676694		—1205				
		+22276					
5,00	+0,698970						

В § 95 было показано, что степенной ряд можно почленно дифференцировать внутри круга его сходимости, так что

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z-a) + 3c_3(z-a)^2 + \cdots + nc_n(z-a)^{n-1} + \cdots. \quad \text{(VIII.45)}$$

Ряд (VIII.45) есть степенной ряд, имеющий тот же радиус сходимости, что и ряд (VIII.44). Значит, его, в свою очередь, можно почленно дифференцировать и вторая производная $f''(z)$ опять представится как сумма степенного ряда, сходящегося при $|z-a|<R$ и т. д. В результате приходим к следующим разенствам:

$$f''(z) = 1\cdot 2c_2 + 2\cdot 3c_3(z-a) + 3\cdot 4c_4(z-a)^2 + \cdots + (n-1)nc_n(z-a)^{n-2} + \cdots,$$

$$f'''(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4 (z-a) + \cdots + (n-2)(n-1)nc_n (z-a)^{n-3} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{(VIII.46)}$$
$$f^{(n)}(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots nc_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n \cdot (n+1) c_{n+1} (z-a) + \cdots.$$

Положив в равенствах (VIII. 44), (VIII.45), (VIII.46) $z = a$, найдем, что

$$c_0 = f(a);\ c_1 = f'(a);\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!};$$
$$c_3 = \frac{f'''(a)}{3!};\ \ldots;\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad \text{(VIII.47)}$$

где для обозначения произведения натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ применено удобное обозначение $n!$ (которое, как уже отмечалось, читается эн-факториал; от латинского фактор — сомножитель). Например,

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;\ 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Заменив в равенстве (VIII.44) неопределенные коэффициенты c_0, c_1, c_2, $\ldots$ $\ldots$ c_n, $\ldots$ найденными значениями (VIII.47), получаем формулу

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots. \quad \text{(VIII.48)}$$

Ряд (VIII.48), стоящий в правой части этой формулы, называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Если в ряде Тейлора положить $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора, который называют *рядом Маклорена:*

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots. \quad \text{(VIII.49)}$$

Таким образом, приходим к заключению, что *если функция $f(z)$ может быть разложена в круге $|z-a| < R$ в степенной ряд (VIII.21), то этот ряд будет обязательно рядом Тейлора данной функции, причем это разложение будет единственным*

Из сказанного следует, что ряды (VIII.30) и (VIII.40) § 96 представляют собой соответственно ряды Маклорена функций $\ln(1+z)$ и $\operatorname{arctg} z$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вычислить коэффициенты указанных рядов по формулам (VIII.47), что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Пример 1. Найти ряд Маклорена для функции $f(z) = e^z$.

Решение. Для любого z имеем

$$f'(z) = e^z;\ f''(z) = e^z;\ f'''(z) = e^z;\ \ldots;\ f^n(z) = e^z.$$

Полагая $z = a = 0$, получаем

$$f(0) = e^0 = 1;\ f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1.$$

Внося эти значения в формулу (VIII.47), находим коэффициенты искомого ряда:

$$c_0 = f(0) = 1;\ c_1 = f'(0) = 1;\ \ldots;\ c_n = \frac{f^n(0)}{n!} = \frac{1}{n!}, \quad \text{(VIII.50)}$$

и тогда согласно (VIII.49)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Полученное разложение в степенной ряд функции e^z для вычислительных целей удобнее представить в следующем виде:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z), \qquad \text{(VIII.51)}$$

где

$$C_{n+1}(z) = \frac{(z+1)^n}{(n+1)!} = \frac{z \cdot z^n}{(n+1)\,n!} = \frac{zC_n(z)}{n+1}; \; C_0(z) \equiv 1,$$

есть общий член рассматриваемого ряда.

Согласно признаку Даламбера (VIII.23) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = n+1 = \infty,$$

так что радиус сходимости ряда (VIII. 51) бесконечно большой, т. е. ряд для функции e^z сходится во всей комплексной плоскости, и если $|z|$ не слишком большая величина, то сходится довольно быстро.

В табл. 83 выполнены все вычисления (с одиннадцатью значащими цифрами), необходимые для определения e^z при $z = \frac{1}{2}$; $z = \ln 2 = 0{,}69314718056$; $z = 1$. Техника этих вычислений очень простая. Определив очередное $C_n(z)$, например $C_2(0{,}5) = 0{,}12500000000$, умножаем его на заданное $z = 0{,}5$ и результат делим на следующее значение: $n + 1 = 3$, так что

$$C_3(0{,}5) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}125}{3} = \frac{0{,}0625}{3} = 0{,}02083333333.$$

Найденное $C_3(z)$ переносим в установочный счетчик арифмометра и весь цикл повторяем, умножая все время очередной $C_n(z)$ на один и тот же множитель $z = \text{const}$.

Вычислив необходимое количество членов $C_n(z)$ и просуммировав их, находим соответствующее значение искомой функции:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z) = \sum_n,$$

которое и записываем в предпоследней строке табл. 83.

Контроль, выполненный в данном случае на основании тождеств

$$\{e^{0,5}\}^2 = e^{0,5+0,5} = e; \; e^{\ln 2} = 2,$$

показывает, что все вычисленные цифры значащие.

Остановимся несколько подробнее на случае $z = 1$, в котором из формулы (VIII.51) получаем для числа e представление в виде суммы быстросходящегося ряда

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = 2{,}71828182845904 \cdots. \qquad \text{(VIII.52)}$$

Для полной строгости надо еще показать, что остаток ряда (VIII.51)

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots \qquad \text{(VIII.53)}$$

при $n \to \infty$ стремится к нулю, несмотря на то, что он содержит бесконечно большое число членов.

Таблица 83

Ряд (VIII.51)	$z=0{,}5$	$z=\ln 2$	$z=1$
n	$C_n(z)$	$C_n(z)=\frac{z}{n}C_{n-1}(z)$	$C_n(z)$
0	1,00000000000	1,00000000000	1,00000000000
1	0,50000000000	0,69314718056	1,00000000000
2	0,12500000000	0,24022650696	0,50000000000
3	0,02083333333	0,05550410867	0,16666666667
4	0,00260416667	0,00961812910	0,04166666667
5	0,00026041667	0,00133335581	0,00833333333
6	0,00002170139	0,00015403530	0,00138888889
7	0,00000155010	0,00001525273	0,00019841270
8	0,00000009688	0,00000132155	0,00002480159
9	0,00000000538	0,00000010178	0,00000275573
10	0,00000000027	0,00000000706	0,00000027557
11	0,00000000001	0,00000000044	0,00000002505
12		0,00000000003	0,00000000209
13			0,00000000016
14			0,00000000001
$\sum_n =$	1,64872127070	2,00000000000	2,71828182846
Контроль:		$\{e^{0,5}\}^2 = \{1,64872127070\}^2 = 2,71828182846$	

Положив для конкретности в формуле (VIII.53) $n=14$ и $z=1$, имеем

$$R_{14}(1)=\frac{1}{15!}+\frac{1}{16!}+\frac{1}{17!}+\cdots=\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16\cdot 17}+\frac{1}{16\cdot 17\cdot 18}+\cdots\right).$$

Если в знаменателях дробей стоящего в скобках ряда все множители, большие чем 15, заменим самим числом 15, то этим мы лишь увеличим каждую из дробей, так что

$$R_{14}(1)<\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{15}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{15^3}+\cdots\right).$$

Теперь в скобках находится бесконечно убывающая прогрессия со знаменателем $q=1/15$ и $a=1$, сумма которой согласно формуле (VIII.3′)

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{1-q}=\frac{15}{14}.$$

Следовательно,

$$R_{14}(z=1)<\frac{1}{15!}\cdot\frac{15}{14}=\frac{1}{14\cdot 14!}=0{,}000000000000819\cdots\approx 0{,}08\cdot 10^{-11}.$$

Другими словами, бесконечная сумма отброшенных членов ряда (VIII 51) — остаток $R_{14}(1)$ есть величина, меньшая ошибок округления, допущенных при вычислении табл. 83, и им можно пренебречь. Однако этот факт не дает нам права утверждать, что все вычисленные знаки верные. Действительно, в табл. 83 при $z=1$ только первые три члена точные; в каждом из остальных ошибка округления не превосходит 1/2 последнего знака. Таким образом, погрешность суммы остальных 12 членов не превосходит шести единиц последнего знака. Следова-

тельно, общая абсолютная погрешность вычисления числа e в табл. 83 равна

$$\varepsilon = \pm \{R_{14}(1) + 6 \cdot 10^{-11}\} = (0{,}08 + 6) \cdot 10^{-11} \approx 1 \cdot 10^{-10},$$

так что мы можем поручиться только за девять десятичных знаков результата.

В данном конкретном примере благодаря взаимной компенсации ошибок округления все вычисленные знаки оказались точными, но это лишь благоприятная случайность и на нее в общем случае рассчитывать нельзя.

Упражнения

1. Доказать, что в общем случае для остатка ряда (VIII.51) справедлива следующая оценка:

$$R_n(z) < \frac{z^{n+1}}{(n+1-z) \cdot n!}. \qquad \text{(VIII.54)}$$

2. Продублировать табл. 83 с пятью и шестью десятичными знаками, а затем выполнить общую оценку погрешности результатов.

Пример 2. Построить степенные разложения для функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.

Решение. Пусть $f(z) = \sin z$. Тогда

$$\begin{aligned} &f'(z) = +\cos z; && f''(z) = -\sin z; \\ &f'''(z) = -\cos z; && f^{IV}(z) = +\sin z; \\ &f^{V}(z) = +\cos z; && f^{VI}(z) = -\sin z; \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \end{aligned}$$

Отсюда, взяв в качестве центра искомого ряда $a = 0$, имеем $f(0) = 0$; $f'(0) = +1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $f^{IV}(0) = 0, \ldots, c_0 = 0$; $c_1 = +1$; $c_2 = 0$; $c_3 = -\frac{1}{3!}$; $c_4 = 0$; $c_5 = +\frac{1}{5!}$; $\ldots$.

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (VIII.49), мы и получаем ряд Маклорена для функции $\sin z$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots. \qquad \text{(VIII.55)}$$

Аналогичным путем находим степенные разложения (с центром в точке $z_0 = a = 0$) для остальных заданных функций:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \qquad \text{(VIII.56)}$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \qquad \text{(VIII.57)}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots. \qquad \text{(VIII.58)}$$

Ряды (VIII.56), (VIII.57), (VIII.58) читателю полезно вывести самостоятельно, воспользовавшись соответствующими формулами дифференцирования для тригонометрических и гиперболических функций, которые были приведены в табл. 8 гл. III.

Воспользовавшись признаком Даламбера (VIII.23), убеждаемся, что каждый из рассматриваемых рядов сходится во всей комплексной плоскости, т. е. радиус

сходимости каждого из них $R = \infty$. При этом ряды (VIII.55) и (VIII.56) являются знакочередующимися, так что остаток каждого из них не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов. Остаток для рядов (VIII.57) и (VIII.58) легко найти тем же путем, каким была получена формула (VIII.54) для ряда (VIII.51).

Далее, сравнив между собой ряд для экспоненциальной функции e^z с рядами для тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$ и для гиперболических функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, видим, что все члены четных функций $\cos z$ и $\operatorname{ch} z$ по абсолютной величине совпадают с четными членами ряда (VIII.51), а с его нечетными членами совпадают все члены нечетных функций $\sin z$ и $\operatorname{sh} z$. Данным обстоятельством удобно пользоваться при вычислении значений экспоненциальной, тригонометрических и гиперболических функций. В табл. 84, например, выполнены все вычисления (с шестью десятичными знаками), необходимые для определения e^z, $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$ в точке $z = 0{,}6$. При этом мы вычисляем по рекуррентной формуле (VIII.51) только члены $C_n(z)$ ряда для e^z, а затем для остальных рассматриваемых функций переписываем согласно формулам (VIII.55) — (VIII.58) значения соответствующих членов $C_n(z)$ и суммируем уже готовые результаты. В предпоследней строке табл. 84 находим также квадраты тригонометрических и гиперболических функций

$$f^2(z) = \left\{\sum\nolimits_n\right\}^2 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z)\right\}^2,$$

Таблица 84

Экспоненциальная функция		Тригонометрические функции		Гиперболические функции	
$z=0{,}6$	$f(z)=e^z$	$f(z)=\cos z$	$f(z)=\sin z$	$f(z)=\operatorname{ch} z$	$f(z)=\operatorname{sh} z$
n	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$
0	1,000000	+1,000000	0	1,000000	0
1	0,600000	0	+0,600000	0	0,600000
2	0,180000	—0,180000	0	0,180000	0
3	0,036000	0	—0,036000	0	0,036000
4	0,005400	+0,005400	0	0,005400	0
5	0,000648	0	+0,000648	0	0,000648
6	0,000065	—0,000065	0	0,000065	0
7	0,000006	0	—0,000006	0	0,000006
8	0,000000	0,000000	0	0,000000	0
$f(z)=\sum_n=$	1,822119	+0,825335	+0,564642	1,185465	0,636654
Контроль: $\left\{\sum_n\right\}^2=$		0,681178	0,318821	1,405327	0,405328
		$\cos^2 z+\sin^2 z=$	0,999999	$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=$	0,999999

а затем осуществляем контроль выполненных вычислений, воспользовавшись тождествами

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Заметим также, что в табл. 84 число 0 означает точный нуль; в числе же 0,000000 после отмеченных нулей могут следовать любые цифры, не дающие при округлении единицы, например

$$C_8(z) = \frac{0{,}6C_7(z)}{8} = 0{,}00000041657 \ldots .$$

Упражнение 3. По образцу табл. 84 вычислить e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ для значений $z = 0{,}2$ и $z = 0{,}4$, а затем проверить результаты по табл. II приложения.

Если функция имеет в точке $z = a$ производные всевозможных порядков, то для нее по (VIII.47) может быть построен ряд Тейлора. Однако в каждом конкретном случае надо еще исследовать остаток ряда $R_n(z)$ и установить, является ли полученный ряд сходящимся и если да, то сходится ли он именно к заданной функции. На эти вопросы исчерпывающий ответ дал Коши, который доказал, что

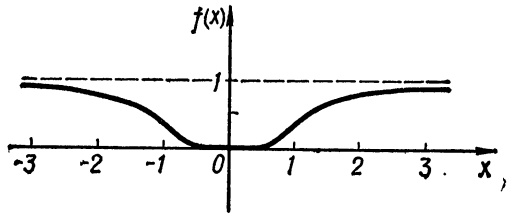


Рис. 229.

если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, *то функция* $f(z)$ *разложима в ряд Тейлора, в противном случае — не разложима.* Коши дал также первый пример функции (действительного переменного $z = x$)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases} \qquad \text{(VIII.59)}$$

которая хотя и обладает в точке $x = 0$ всеми производными, но в этой точке не разлагается в ряд Тейлора. Однако $f(x)$ нигде, кроме точки $x = 0$, не обращается в нуль (рис. 229). Более подробно этот вопрос освещен в книге Л. Д. Кудрявцева [63, т. I, стр. 547—552].

В заключение выведем правило Лопиталя — Бернулли, разлагая функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$. В результате, учтя, что по условию $f'(a) \neq 0$, $\varphi'(a) \neq 0$, но $f(a) = \varphi(a) = 0$ и эти значения можно отбросить, имеем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots}{\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left[f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots\right]}{(x-a)\left[\varphi'(a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a) + \cdots\right]}.$$

Сокращая в полученном выражении числитель и знаменатель на $(x - a)$, мы приходим к формуле (IV.31)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a) + \cdots}{\varphi'(a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a) + \cdots} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{\varphi'(a)},$$

которая в гл. IV не была доказана.

§ 99. Алгебраические действия над степенными рядами. Рекуррентные формулы

Остановимся на выводе необходимых в дальнейшем формул для выполнения алгебраических действий над степенными рядами.

Пусть даны два степенных ряда:

$$s_a(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + \cdots, \qquad \text{(VIII.60)}$$

$$s_b(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n + \cdots, \qquad \text{(VIII.61)}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ — не зависящие от z заданные комплексные числа.

Мы ограничимся рассмотрением рядов, центры которых находятся в нулевой точке. Чтобы перейти к общему случаю, необходимо только заменить z величиной $(z - z_0)$. Эта замена не затрагивает коэффициенты ряда, поэтому выводимые дальше формулы имеют вполне общий характер. Отметим попутно, что выражение «задать», «определить» бесконечный степенной ряд означает *определить все его коэффициенты*. Другими словами, задать степенной ряд — это значит указать формулу для определения общего коэффициента ряда c_n по данному значению n и другим известным величинам.

Если известны все коэффициенты степенного ряда, то вычисление суммы ряда и определение его радиуса сходимости не представляют принципиальных затруднений, хотя не всегда эти операции легко выполнимы.

Суммой и разностью (VIII.60) и (VIII.61) будут служить ряды

$$s_a(z) + s_b(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) z + (a_2 + b_2) z^2 + \cdots + (a_n + b_n) z^n + \cdots, \qquad \text{(VIII.62)}$$

$$s_a(z) - s_b(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) z + (a_2 - b_2) z^2 + \cdots + (a_n - b_n) z^n + \cdots. \qquad \text{(VIII.63)}$$

Степенной ряд, как было доказано, абсолютно сходится внутри круга его сходимости. Поэтому согласно теореме Коши (см. § 92) степенные ряды можно перемножать по правилам умножения многочленов.

Перемножив ряды (VIII.60) и (VIII.61), получим новый степенной ряд

$$s_c(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \equiv s_a(z)\, s_b(z), \qquad \text{(VIII.64)}$$

коэффициенты которого согласно формуле (VIII.12) определяются из равенства

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0. \qquad \text{(VIII.65)}$$

Этот же результат получим непосредственно из формулы (VIII.64)

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n + \cdots) \times (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n + \cdots) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

если перемножим в правой ее части ряды $s_a(z)$, $s_b(z)$ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z.

При этом мы пользуемся почти очевидной теоремой: *если два степенных ряда равны между собой:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n z^n,$$

то равны между собой все коэффициенты этих рядов:

$$A_n = B_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство теоремы приведено в конце § 100.

Пример 1. Функции e^z и $\sin z$, как показано в предыдущем параграфе, можно представить следующими рядами:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots.$$

Определить ряд для функции $w = e^z \sin z$.

Решение. В данном случае

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6},\ \ldots,$$

$$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6},\ \ldots.$$

Значение первых десяти коэффициентов c_n, найденных с шестью десятичными знаками по формуле (VIII.65), приведено в табл. 85. Эти вычисления легко выполняются на любой счетной машине, включая обычный арифмометр, без промежуточных записей.

Таблица 85

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$; $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

n	a_n	b_n	c_n	z_1^n	z_2^n
0	1,000000	0	0	—	—
	↓			0,400000	0,130000
1	1,000000	+1,000000	+1,000000		
2	0,500000	0	+1,000000	0,160000	0,016900
	↓	↑			
3	0,166667	—0,166667	+0,333333	0,064000	0,002197
4	0,041667	0	0	0,025600	0,000286
		↑			
5	0,008333	+0,008333	—0,033333	0,010240	0,000037
6	0,001389	0	—0,011112	0,004096	—
7	0,000198	—0,000198	—0,001587	0,001638	—
8	0,000025	0	0	—	—
9	0,000003	+0,000003	+0,000045	—	—
10	0,000000	0	+0,000009	—	—
$\sum_n =$	2,718282	0,841471	2,287355	0,580944	0,147631

Контроль: $2{,}718282 \cdot 0{,}841471 = 2{,}287355$ $\qquad$ $e^{0,13} \sin 0{,}13 = 0{,}147631$

Например, при определении c_5 вычисляем произведение $a_0 b_5$ (множители a_0 и b_5 обведены в табл. 85 сплошными линиями), затем, не снимая результата, умножаем «в отрицательном направлении» a_2 на $b_3 = -0{,}166667$ (множители a_2 и b_3 обведены пунктиром) и заканчиваем вычисление, умножив «в положительном направлении» a_4 на $b_1 = +1{,}000000$ (произведения $a_1 b_4 = a_3 b_2 = a_5 b_0 = 0$ и поэтому в вычислениях не участвуют).

В данном случае c_5 есть величина отрицательная, поэтому в результативном счетчике получим число ... 999,9666665, которое следует понимать как дополнение искомого числа до единицы. Округлив полученное число до шести десятичных знаков и определив для него дополнение, находим $c_5 = -0{,}033333$. Если путем грубой прикидки можно определить, что c_n будет отрицательным, то следует изменить знаки у коэффициентов b_n и вычислить $(-c_n)$, которое будет уже величиной положительной.

В табл. 85 мы предварительно заполняем полностью колонки a_n и b_n. Для того чтобы при вычислении c_n фиксировать внимание на необходимых множителях, удобно применять какие-либо марки (например, мелкие монеты), отмечающие нужные в данный момент величины. Расположив эти марки в начале вычислений соответственно над и под числами, помещенными в сплошных прямоугольниках (мы продолжаем разбор вычисления c_5), и вычислив произведение a_0b_5, смещаем марки на одну строку, фиксируя множители a_1 и b_4, и продолжаем этот процесс, пока не дойдем до a_5b_0. Вычисленное значение c_5 записываем в колонке c_n.

Конечно, весь процесс вычисления коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{10}$ требует значительно меньше времени, чем его потребовалось для описания техники вычисления одного коэффициента c_5. Но поскольку в дальнейшем нам неоднократно придется вычислять величины вида $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, то мы и остановились так подробно на технике вычислений.

Определив коэффициенты c_n, имеем

$$e^z \sin z = z + z^2 + 0{,}333333z^3 - 0{,}033333z^5 - 0{,}011112z^6 - \\ - 0{,}001587z^7 + 0{,}000045z^9 + 0{,}000009z^{10} + \ldots$$

Полученный ряд позволяет непосредственно вычислять значения функции $w(z) = e^z \sin z$. Вычисления также удобнее всего производить в табличной форме. Так, в табл. 85 вычислены z^n для $z = z_1 = 0{,}4$ и $z = z_2 = 0{,}13$. Перемножив c_n и z^n, расположенные в одних и тех же горизонтальных строках, и просуммировав результат (все это выполняется на арифмометре в один прием без промежуточных записей), получаем

$$w(0{,}4) = e^{0{,}4} \sin 0{,}4 = 0{,}580944 \text{ и } w(0{,}13) = 0{,}147631.$$

Для контроля вычислим непосредственно эту величину, ограничиваясь шестью десятичными знаками. Из таблиц I и II приложения находим

$$e^{0{,}4} = 1{,}491825; \quad \sin 0{,}4 = 0{,}389418; \quad e^{0{,}13} = 1{,}138828; \quad \sin 0{,}13 = 0{,}129634,$$

и тогда

$$e^{0{,}4} \sin 0{,}4 = 0{,}580944; \quad e^{0{,}13} \sin 0{,}13 = 0{,}147631.$$

Мы можем также проконтролировать результаты вычисления коэффициентов c_n, воспользовавшись тождеством

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \tag{VIII.66}$$

которое получим, положив $z = 1$ в исходной формуле

$$w(z) = e^z \sin z = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right\}.$$

Значения $\sum a_n = e$, $\sum b_n = \sin 1$ *рад*, а также $w(z) = \sum c_n z^n$ для $z = 1$; $z = 0{,}4$; $z = 0{,}13$ приведены в предпоследней строке табл. 85.

Упражнение 1. Продублировать табл. 85 и вычислить $w(z)$ при $z = \pm 0{,}5$.

Пример 2. Определить коэффициенты ряда для функции $w(z) = \sin z \cos z$, воспользовавшись рядами Маклорена (VIII.55) и (VIII.56), а затем вычислить $w(z)$ при $z = z_1 = 0{,}427543$ и $z = z_2 = -0{,}5$.

Таблица 86

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. Точные $c_{2\nu-1} = (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}$

n	a_n	b_n	c_n	z_1^n	z_2^n
0	0	+1,000000	0	—	—
1	+1,000000	0	+1,000000	0,427543	−0,500000
2	0	−0,500000	0	0,182793	+0,250000
3	−0,166667	0	−0,666667	0,078152	−0,125000
4	0	+0,041667	0	—	—
5	+0,008333	0	+0,133334	0,014286	−0,031250
6	0	−0,001389	0	—	—
7	−0,000198	0	−0,012699	0,002611	−0,007813
8	0	+0,000025	0	—	—
9	+0,000003	0	+0,000706	0,000477	−0,001953
10	0	0,000000	0	—	—
11	0,000000	0	−0,000026	—	−0,000488
12	0	0	0	—	—
13	0	0	+0,000001	—	—
$\sum_n =$	+0,841471	+0,540303	+0,454649	0,377314	−0,420736
Контроль: $0{,}841471 \cdot 0{,}540303 = 0{,}454649$				$\frac{1}{2}\sin(-1) = -0{,}420736$	

Решение. Записав в первых двух колонках табл. 86 значения коэффициентов исходных рядов $\sin z = \sum a_n z^n$ и $\cos z = \sum b_n z^n$, по формуле (VIII.65) определяем коэффициенты искомого ряда $w(z) = \sum c_n z^n$. Контроль найденных коэффициентов c_n выполняем согласно тождеству (VIII.66), которое, как и в предыдущем примере, получим, положив $z = 1$ в исходной формуле $w(z) = \sin z \cos z$. Весь дальнейший ход решения примера ясен из табл. 86. Заметим только, что в данном примере c_{11} и c_{13} отличны от нуля, хотя при $n \geqslant 10$ исходные коэффициенты a_n и b_n уже обратились в нуль с заданной степенью точности.

Упражнение 2. Найти точные значения коэффициентов c_n, исходя из тригонометрического тождества

$$\sin z \cos z = \frac{1}{2} \sin 2z,$$

вычислить их с восемью значащими цифрами и сравнить результаты с результатами, приведенными в табл. 86.

В заключение отметим, что при вычислении коэффициентов c_n по формуле (VIII.65) результативные данные, полученные в очередном n-м шаге, возвращаются затем в виде исходных данных для вычисления c_{n+1} в следующем шаге, вследствие чего формулы типа (VIII.65) и получили название *рекуррентных* (от латинского *recurrentis* — «те, что возвращаются»). В дальнейшем, применяя для вычисления степенные ряды, мы будем часто пользоваться рекуррентными формулами.

§ 100. Деление степенных рядов. Метод неопределенных коэффициентов

Формула (VIII.65) позволяет определять коэффициенты c_n не только в численном, но и в общем виде, по известным a_n и b_n. В дальнейшем, при решении линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, мы будем очень широко пользоваться этой формулой, принадлежащей Коши, а пока покажем, что она позволяет также определить коэффициенты ряда, полученного в результате деления двух заданных степенных рядов.

Действительно, если необходимо определить ряд

$$s_a(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n}, \tag{VIII.67}$$

то придем к рассмотренной выше задаче, представив равенство (VIII.67) в следующем виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\} \cdot \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right\}.$$

В таком случае коэффициенты a_n, b_n, c_n будут связаны той же формулой (VIII.65)

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0,$$

но неизвестны теперь a_n, а известны b_n и c_n.

Положив в формуле (VIII.65) $n = 0$, имеем

$$c_0 = a_0 b_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{c_0}{b_0}. \tag{VIII.68}$$

Далее, из того же равенства (VIII.65), разрешив его относительно a_n, находим

$$a_n = -\frac{1}{b_0}\left[(b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_{n-1} a_1 + b_n a_0) - c_n\right], \tag{VIII.69}$$

или

$$a_n = \frac{1}{b_0}\left[c_n - \sum_{k=1}^{n} b_k a_{n-k}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Положив в формуле (VIII.69) $n = 1$ и учтя (VIII.68), определяем

$$a_1 = -\frac{1}{b_0}(b_1 a_0 - c_1) = \frac{c_1 b_0 - b_1 c_0}{b_0^2}.$$

При $n = 2$ получаем

$$a_2 = -\frac{1}{b_0}\left[(b_1 a_1 + b_2 a_0) - c_2\right] = \frac{1}{b_0^3}\left[b_1 (c_0 b_1 - b_0 c_1) + b_0 (c_2 b_0 - b_2 c_0)\right].$$

Этот процесс можем продолжать как угодно далеко, определяя последовательно $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, т. е. все коэффициенты искомого ряда.

В более общем виде решение этой задачи приведено в книге В. И. Смирнова [125, т. III, ч. 2, стр. 60—61], где получена общая формула для коэффициентов a_n в виде частного двух определителей n-го порядка.

Таблица 87

$a_0 = \frac{c_0}{b_0}$; $a_n = c_n - (b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_n a_0)$; $n \geqslant 1$

n	c_n	$(-b_n)$	a_n	z_1^n	z_2^n
0	0	—1,000000	0	—	—
1	+1,000000	0	+1,000000	0,400000	0,130000
2	0	+0,500000	0	—	—
3	—0,166667	0	+0,333333	0,640000	0,002197
4	0	—0,041667	0	—	—
5	+0,008333	0	+0,133333	0,010240	0,000037
6	0	+0,001389	0	—	—
7	—0,000198	0	+0,053969	0,001638	—
8	0	—0,000025	0	—	—
9	+0,000003	0	+0,021870	0,000262	—
10	0	+0,000000	0	—	—
$\sum_n =$	+0,841471	+0,540303	$\sum a_n z^n =$	0,422793	0,130737

Контроль: $0{,}841471 : 0{,}540303 = 1{,}557406 = \operatorname{tg} 1 = \sum a_n$

По формуле (VIII.69) коэффициенты a_n наиболее удобно определять численным путем по известным $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ и a_0. Для иллюстрации техники вычислений рассмотрим два примера.

Пример 1. Определить разложение в степенной ряд для функции

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad \text{(VIII.70)}$$

воспользовавшись рядами (VIII.55) и (VIII.56).

Решение. В данном примере $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{1}{6}$, ...; $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = 0$, $b_4 = \frac{1}{24}$, ...; $a_0 = \frac{c_0}{b_0} = 0$ и $\frac{1}{b_0} = 1$.

Как вычислять по формуле (VIII.69) первые 11 коэффициентов (с шестью десятичными знаками), ясно из табл. 87. Например, при вычислении a_5 поступаем следующим образом. Вычисляем прежде всего $\sum_{k=1}^{5} (-b_k)\, a_{5-k}$ (коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 уже определены). Для этого, учтя, что $b_1 = 0$, устанавливаем марки над и под числами, заключенными в сплошные прямоугольники. Перемножив $(-b_2)$ и a_3 «в положительном направлении», перемещаем марки соответственно вниз и вверх на две строки (так как $b_3 = 0$) и, не снимая результата, умножаем «в отрицательном направлении» $(-b_4)$ на a_1. Как только верхняя марка дошла до горизонтали n, это служит сигналом того, что вычисление

$\sum_{k=1}^{n} (-b_k)\, a_{n-k}$ закончено. Прибавив (алгебраически) c_n к найденной сумме, умножаем все на $\frac{1}{b_0}$ $\left(\text{в данном примере } \frac{1}{b_0} = 1\right)$ и в результате получаем искомое a_n, которое записываем в той же строке n.

В рассматриваемом примере в формуле (VIII.69) знак «минус», стоящий перед $\sum$, удобнее отнести к коэффициентам b_n, в результате чего получим (учтя, что $b_0 = 1$)

$$a_n = c_n + \sum_{k=1}^{n} (-b_k)\, a_{n-k}.$$

В соответствии с этим в табл. 87 помещены коэффициенты $(-b_n)$.

Вычисление остальных коэффициентов a_n в данном примере существенно упрощается, так как при $n > 10$ будет $c_n < 3 \cdot 10^{-9}$; $b_n < 3 \cdot 10^{-10}$, т. е. с принятой нами точностью вычислений при $n \geqslant 10$ $c_n = 0$ и $b_n = 0$.

Благодаря этому в данном примере при $n \geqslant 10$

$$a_n = -b_2 a_{n-2} - b_4 a_{n-4} - b_6 a_{n-6} - b_8 a_{n-8}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, в дополнение к результатам табл. 87 найдем $a_{2m} = 0$; $m = 6, 7, 8, \ldots$; $a_{11} = 0{,}008863$; $a_{13} = 0{,}003592$; $a_{15} = 0{,}001456$; $a_{17} = 0{,}000590$; $a_{19} = 0{,}000239$; $a_{21} = 0{,}000097$; $a_{23} = 0{,}000039$; $a_{25} = 0{,}000016$; $a_{27} = 0{,}000006$; $a_{29} = 0{,}000003$; $a_{31} = 0{,}000001$.

Определив коэффициенты a_n, можем вычислить

$$\operatorname{tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

для любого комплексного z в круге сходимости полученного ряда, радиус которого необходимо определить по формуле (VIII.22) или (VIII.23) $\left(\text{в рассматриваемом случае } R = \frac{\pi}{2}\right)$.

Например, в табл. 87 приведены данные, необходимые для вычисления $\operatorname{tg} z$ при $z = z_1 = 0{,}4$ и $z = z_2 = 0{,}13$, на основании которых находим

$$\operatorname{tg} 0{,}4 = 0{,}422793; \quad \operatorname{tg} 0{,}13 = 0{,}130737.$$

Возможная погрешность не превышает единицы в шестом десятичном знаке. В качестве контроля вычислений коэффициентов a_n определяем

$$\operatorname{tg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1{,}557407$$

и найденный результат сверяем со значением, взятым из табл. I приложения:

$$\operatorname{tg} 1 = \operatorname{tg} 1 \text{ рад} = 1{,}557408.$$

Этот же результат получим, разделив суммы $\sum_n$, стоящие во второй и третьей колонках табл. 87:

$$\frac{\sum c_n}{\sum b_n} = \frac{0{,}841471}{0{,}540303} = 1{,}557406.$$

Пример 2. Найти степенное разложение для функции $w(z) = \frac{1}{e^z}$ и вычислить затем $w(z)$ при $z = z_1 = -0{,}5$ и $z = z_2 = 0{,}615783$.

Решение. Представив единицу в виде ряда

$$1 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots, \text{ где } c_0 = 1,\ c_n = 0 \text{ при } n \geqslant 1,$$

и воспользовавшись равенствами (VIII.69) и (VIII.51), получаем формулу для определения коэффициентов a_n искомого разложения:

$$a_0 = \frac{c_0}{b_0} = 1;\quad a_n = -(b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_n a_0);\quad b_n = \frac{1}{n!}.$$

Все необходимые значения коэффициентов b_n берем из второй колонки табл. 85. Сами вычисления и их контроль выполнены в табл. 88. При этом для того, чтобы избежать ошибок при считывании коэффициентов b_n, мы отделили знаком —*— коэффициент b_0, который при вычислении $(b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots)$ не используется.

Таблица 88

$a_0 = 1;\ a_n = -(b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_n a_0)$. Точные $a_n = (-1)^n b_n$

n	a_n	b_n	c_n	z_1^n	z_2^n
0	+1,000000	1,000000	1,000000	+1,000000	1,000000
		—*—			
1	—1,000000	1,000000	0	—0,500000	0,615783
2	+0,500000	0,500000	0	+0,250000	0,379189
3	—0,166667	0,166667	0	—0,125000	0,233498
4	+0,041667	0,041667	0	+0,062500	0,143784
5	—0,008333	0,008333	0	—0,031250	0,088540
6	+0,001388	0,001389	0	+0,015625	0,054521
7	—0,000197	0,000198	0	—0,007813	0,033573
8	+0,000024	0,000025	0	—	0,020674
9	—0,000002	0,000003	0	—	—
10	0,000000	0,000000	0	—	—
$\sum_n =$	+0,367880	2,718282	$\sum a_n z^n =$	+1,648721	0,540218
Контроль: 0,367880 · 2,718282 = 1,000002				Точное $e^{0,5} = 1,648721$	

Полученные результаты легко сравнить с точными значениями коэффициентов a_n, поскольку

$$w(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{e^z} = e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n$$

и, следовательно, в данном примере

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} = (-1)^n b_n. \qquad \text{(VIII.71)}$$

Расхождения между значениями a_n, вычисленными в табл. 88, и их точными значениями (VIII.71) не превышают неизбежных погрешностей самих вычислений.

Упражнения

1. Продублировать вычисления в табл. 87 с пятью десятичными знаками и продолжить их до $n = 27$.

2. Найти степенное разложение для функции $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ и вычислить затем (с шестью значащими цифрами) гиперболический тангенс $\operatorname{th} z$ при $z = z_1 = 0{,}1$ и $z = z_2 = 0{,}5$.

При выводе правила деления степенных рядов мы пользовались так называемым методом неопределенных коэффициентов, широко применяемым в теории рядов. Суть этого метода заключается в том, что искомый ряд формально представляют в виде ряда, коэффициенты которого неизвестны, не определены, а затем, пользуясь той или иной зависимостью, которую удается установить между формально введенными коэффициентами и коэффициентами других известных рядов, последовательно находят неопределенные вначале коэффициенты.

Для строгого обоснования этого метода необходимо еще доказать следующую, почти очевидную теорему.

Теорема. *Если сумма сходящегося степенного ряда равняется нулю при всех значениях z внутри некоторого круга, то все коэффициенты этого ряда равняются нулю.*

Доказательство. По условию теоремы

$$c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + c_3 (z - z_0)^3 + c_4 (z - z_0)^4 + \cdots \equiv 0.$$

Положив в этом тождестве $z = z_0$, находим

$$c_0 = 0.$$

Продифференцировав обе части тождества, имеем

$$c_1 + 2c_2 (z - z_0) + 3c_3 (z - z_0)^2 + 4c_4 (z - z_0)^3 + \cdots \equiv 0,$$

откуда, при $z = z_0$, получаем

$$c_1 = 0.$$

Продифференцировав обе части нового тождества и снова полагая $z = z_0$, находим

$$c_2 = 0$$

и, продолжая этот процесс, убеждаемся, что все коэффициенты $c_n = 0$.

Следствие. *Если суммы двух степенных рядов, центры которых совпадают, равны между собой в точках некоторого круга, то коэффициенты этих рядов при одинаковых степенях $(z - z_0)$ соответственно равны, т. е. из равенства*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z - z_0)^n \qquad \text{(VIII.72)}$$

следуют равенства

$$A_n = B_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad \text{(VIII.73)}$$

Действительно, перенося ряд из правой части равенства (VIII.72) в левую, мы приходим к ранее рассмотренному случаю:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n) (z - z_0)^n \equiv 0,$$

и в силу доказанной теоремы $A_n - B_n = 0$ $(n = 0,\ 1,\ 2.\ \ldots)$.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что для того чтобы равенства (VIII.73) имели место, центры обоих рядов должны совпадать.

На этом мы заканчиваем главу о степенных рядах. Вопрос о возведении ряда (VIII.21) в произвольную степень m (целую, дробную, рациональную или иррациональную) и об обращении этого ряда изложен в [148, гл. IV, § 29, 30; гл. VI, § 51].

Контрольные упражнения

1. Найти общий член каждого из следующих рядов:

а) $-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\cdots$; б) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;

в) $\frac{\cos\alpha}{1}+\frac{\cos 2\alpha}{4}+\frac{\cos 3\alpha}{9}+\cdots$; г) $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots$.

2. При помощи признака сравнения рядов установить сходимость или расходимость нижеследующих рядов:

а) $1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{2^4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\cdots+\frac{2^n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}+\cdots$;

б) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\frac{6}{4\cdot 5}+\frac{7}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}+\cdots$;

в) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^2+2}+\cdots$.

3. Исследовать по признаку Даламбера сходимость рядов:

а) $1+\frac{5}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\frac{5^3}{4!}+\cdots+\frac{5^n}{(n+1)!}+\cdots$;

б) $\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2^2}{2\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 4}+\frac{2^4}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{2^n}{n(n+1)}+\cdots$.

4. Установить, какие из приведенных ниже рядов сходятся абсолютно и какие сходятся неабсолютно:

а) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$; б) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2-\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots$;

в) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$; г) $\frac{\sin\alpha}{1}-\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}-\cdots$.

5. Определить радиус сходимости ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots.$$

6. Проинтегрировать и продифференцировать ряд, приведенный в предыдущем упражнении.

7. Используя разложение в ряд Маклорена функций e^z, $\cos z$, $\operatorname{arctg} z$, разложить в степенные ряды функции:

а) e^{3z}; б) $\cos\frac{z}{3}$; в) $\operatorname{arctg} z^3$; г) e^{-z^2}.

8. Разложить в ряд Маклорена функции

$$f(z)=\operatorname{sh} z;\quad f(z)=\operatorname{ch} z.$$

9. Воспользовавшись результатами предыдущего упражнения, доказать тождества

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2};\quad \operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}.$$

10. Вычислить с пятью десятичными знаками коэффициенты для функций:

а) $f(z)=\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z$; б) $\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$; в) $f(z)=z\operatorname{ctg} z=\frac{z\cos z}{\sin z}$.

Глава IX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В тех случаях, когда научную или техническую проблему можно сформулировать математически, наиболее вероятно, что задача сведется к одному или нескольким дифференциальным уравнениям. Это всегда имеет место для широкого класса проблем, связанных с силами и движением.

Если нам надо найти траекторию искусственного спутника или траекторию электрона в синхрофазотроне, если мы изучаем закон движения самолета или локомотива, мы должны обратиться к интегрированию дифференциальных уравнений. В электронике, радиотехнике, электротехнике, гидро- и аэродинамике, теплотехнике, физике, химии, биологии и во многих других областях науки и техники большое количество задач также сводится к дифференциальным уравнениям. Однако, несмотря на большие усилия, которые более двух столетий прилагают многие математики мира, число типов дифференциальных уравнений, разрешимых в замкнутом виде или в квадратурах, остается очень ограниченным. Поэтому в настоящее время существует множество проблем, точно сформулированных в виде дифференциальных уравнений, решения которых еще не найдены.

Все это привело к тому, что наряду с аналитическими и приближенными методами начали широко применяться численные методы решения дифференциальных уравнений, роль которых особенно возросла в связи с применением ЭВМ.

В этой главе рассмотрим самые простые уравнения, которые интегрируются в квадратурах, после чего сосредоточим внимание на применении степенных рядов к решению линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, так как этот вопрос, очень важный для практики, в литературе разработан недостаточно полно.

§ 101. Основные понятия и определения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные функции, независимую переменную и производные неизвестных функций (или их дифференциалы).

Если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если — от нескольких, то дифференциальное уравнение носит название *уравнения в частных производных*. В данной книге рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы.

Наиболее общий вид, который можно придать обыкновенному дифференциальному уравнению, таков:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad \text{(IX.1)}$$

где $y = y(x)$ — искомая функция.

Функцию F мы будем предполагать всюду (если не оговорено противное) вещественной функцией от своих аргументов, которые также предполагаются вещественными.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных (или дифференциалов), входящих в это уравнение.

Если в уравнении (IX.1) функция F есть целая рациональная функция (полином) относительно всех входящих в нее производных, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью уравнения*. Например, уравнение $y' - y^2 \sin x = 0$ есть дифференциальное уравнение первого порядка и первой степени; дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ — второго порядка первой степени; уравнение $y'^3 - x^5 y^4 + \sin x = 0$ — уравнение первого порядка третьей степени.

Решением уравнения (IX.1) называется функция $y = y(x)$, обращающая это уравнение в тождество. Например, решением уравнения

$$y' + ky = 0$$

является функция $y = Ce^{-kx}$, где C — произвольная постоянная величина.

Действительно, подставив это значение функции y в исходное уравнение, имеем

$$(Ce^{-kx})' + k \cdot Ce^{-kx} = C(-ke^{-kx}) + kCe^{-kx} \equiv 0.$$

График решения на плоскости (x, y) называется *интегральной кривой*. Процесс нахождения решений называется *интегрированием дифференциального уравнения*. Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств. Уже на самых простых примерах легко убедиться в том, что дифференциальное уравнение имеет бесконечное количество решений. Например, из простейшего уравнения

$$y' = 3x^2, \text{ или } dy = 3x^2\,dx, \qquad \text{(IX.2)}$$

сразу найдем с помощью интегрирования

$$y = \int 3x^2\,dx = x^3 + C. \qquad \text{(IX.3)}$$

Это — *общее решение уравнения* (IX.2), так как оно включает в себя произвольную постоянную C и является записью всего многообразия решений. Придавая произвольной постоянной конкретные числовые значения, мы получим конкретные, *частные решения* уравнения (IX.2). На рис. 230 представлены частные решения $y = x^3 + C$, соответствующие значениям $C = +2$; $C = 0$; $C = -1$; $C = -3$.

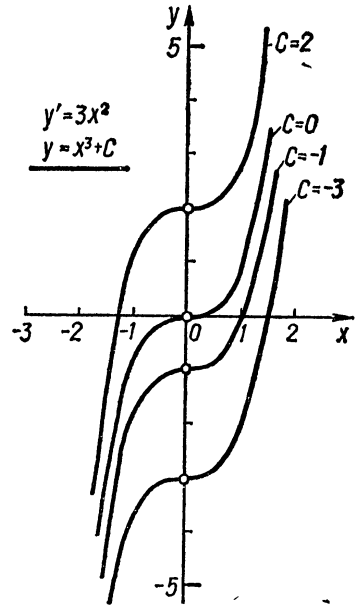


Рис. 230.

В общем случае (IX.1) решение находится в результате n последовательных интегрирований, так что общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных, т. е. имеет вид

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \qquad \text{(IX.4)}$$

Если общее решение уравнения (IX.1) получено в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \qquad \text{(IX.5)}$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения. Другими словами, в тех случаях, когда равенство (IX.5) удается разрешить относительно искомой функции y, то его называют *общим решением* дифференциального уравнения (IX.1), а если оно остается неразрешенным относительно y,— то *общим интегралом*. Придав произвольным постоянным $C_1, C_2, \ldots, C_n$ конкретные числовые значения, получаем из (IX.5) *частный интеграл*. Кроме общего и частного интегралов (или решений) могут встречаться и *особые интегралы* (или *решения*). Например, в случае дифференциального уравнения первого порядка интеграл называется *особым*, если через каждую его точку проходит по крайней мере еще один интеграл. *Как правило, особый интеграл не получается из общего ни при каком значении произвольной постоянной.* Более подробно этот вопрос хорошо изложен в книгах [12, стр. 443]; [80, стр. 33—55]; [94, стр. 421]; [125, т. II, стр. 35 и 40]; [170, стр. 57 и 78].

Для того чтобы из общего решения выделить одно, частное, необходимо к дифференциальному уравнению добавить некоторые дополнительные условия. Чаще всего ставятся *начальные условия*, которые при исследовании процесса, развивающегося во времени, являются математической записью начального состояния процесса, о чем более подробно сказано в § 116.

Положив в (IX.1) $n = 1$, мы придем к наиболее общему дифференциальному уравнению первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{IX.6}$$

Обычно это уравнение представляют в виде, *разрешенном* относительно производной

$$y' = f(x, y), \tag{IX.7}$$

причем мы будем всегда предполагать, что правая часть уравнения (IX.7) о д н о з н а ч н а и н е п р е р ы в н а в рассматриваемой области изменения x, y. При этих условиях всегда можно найти (точно или приближенно) интегральную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0), т. е. всегда можно найти частное решение уравнения (IX.7), определяемое начальными значениями

$$x = x_0; \quad y_0 = y(x)|_{x=x_0}. \tag{IX.8}$$

Например, в случае уравнения (IX.2) интегральную кривую, проходящую через точку $x = 0$, $y_0 = y(x_0) = -3$, получим, положив в формуле (IX.3) $C = -3$ (см. рис. 230).

Общее же решение в виде точного выражения через элементарные функции удается найти лишь для очень немногочисленного класса уравнений, который получил название *класса интегрируемых уравнений*. К рассмотрению основных типов интегрируемых уравнений мы и переходим, начав с изучения уравнения первого порядка.

§ 102. Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка (IX.7) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y), \tag{IX.9}$$

где правая часть представляет собой п р о и з в е д е н и е д в у х ф у н к ц и й*, одна из которых $[f(x)]$ — зависит только от переменной x, а вторая — $[\varphi(y)]$ — только от переменной y.

Переписав это уравнение так:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx, \tag{IX.10}$$

мы *разделяем* переменные, поскольку теперь в левой его части стоит выражение, зависящее только от y и dy, а в правой — выражение, зависящее только от x и dx.

* Требование того, чтобы правая часть представляла собой именно произведение двух функций, является существенным, и, например, уравнения $y' = x + y$, $y' = \sin xy$, $y' = y^2 - x$ не принадлежат к уравнениям с разделяющимися переменными, так что их интегрировать надо другими способами, отличными от излагаемого в данном параграфе.

Взяв квадратуры* от обеих частей равенства (IX.10)

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C, \qquad \text{(IX.11)}$$

мы получаем общий интеграл уравнения (IX.9) и тем самым полностью решаем поставленную задачу.

Замечание. Вполне возможно, что в отдельных случаях неопределенные интегралы $\int f(x)\,dx$ или $\int \frac{dy}{\varphi(y)}$ нельзя будет выразить в элементарных функциях. Тем не менее и в этих случаях будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения (IX.9) выполненной в том смысле, что мы свели ее к более простой и уже изученной в гл. V задаче вычисления неопределенных интегралов — квадратур. Такой подход является вполне закономерным, поскольку для любой непрерывной и ограниченной функции всегда можно (точно или приближенно) найти квадратуру.

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2-y} \qquad \text{(IX.12)}$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $x_0 = 3$; $y_0 = 1$.

Решение. Представив уравнение (IX.12) в виде

$$-(y-2)\,dy = x\,dx,$$

согласно (IX.11) находим общий интеграл искомого уравнения:

$$-\int (y-2)\,dy = \int x\,dx + C \quad \text{или} \quad -\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Выполнив очевидные преобразования, придаем этому интегралу окончательный вид:

$$x^2 + (y-2)^2 = 2C. \qquad \text{(IX.13)}$$

Полагая в (IX.13) $x = x_0 = 3$, $y = y_0 = 1$, находим, что $C = 5$.

Таким образом, интегральными кривыми уравнения (IX.12) будет семейство окружностей с центром в точке (0; 2) и радиусом $R = \sqrt{2C}$. На рис. 231 изображены три интегральные кривые семейства (IX.13), соответствующие значениям $C = 2$, $C = 5$, $C = 18$. При $C = 5$, как мы уже показали, интегральная кривая (которая на рис. 231 выделена полужирной линией) проходит через заданную точку $x_0 = 3$, $y_0 = 1$.

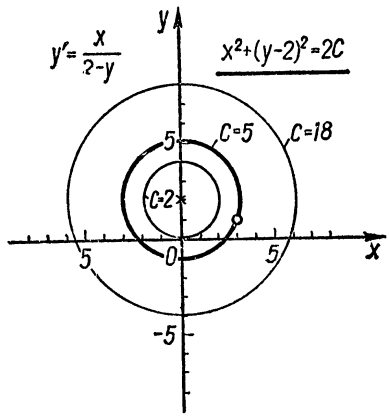


Рис. 231.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$y^2\,dy + \cos x\,dx = 0. \qquad \text{(IX.14)}$$

Решение. Путем интегрирования получаем

$$\int y^2\,dy + \int \cos x\,dx = C,$$

* Так как термин «интеграл» в теории дифференциальных уравнений часто применяется в смысле общего, частного или особого интеграла дифференциального уравнения, то во избежание недоразумений для интегралов функций $\int f(x)\,dx$ или $\int \psi(y)\,dy$ обычно применяется термин «квадратура».

или

$$\frac{1}{3}y^3 + \sin x = C.$$

Мы нашли общий интеграл данного уравнения. Разрешив это соотношение относительно y, получаем общее решение

$$y = 3\sqrt[3]{C - \sin x}. \tag{IX.15}$$

К этому же результату можно прийти, если воспользоваться формулой (IX.11), что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 6x. \tag{IX.16}$$

Решение. Приведя заданное уравнение к виду (IX.10)

$$(1 + x^2)\,dy = 2x\,(y + 3)\,dx,$$

$$\frac{dy}{y + 3} = \frac{2x}{1 + x^2}\,dx$$

и воспользовавшись формулой (IX.11), имеем:

$$\int \frac{dy}{y + 3} = \int \frac{2x}{1 + x^2}\,dx + C^*,$$

или

$$\ln(y + 3) = \ln(1 + x^2) + C^*.$$

Для придания более простого вида полученному результату представим произвольную постоянную C^* в виде новой произвольной постоянной $\ln C$, что всегда возможно. Тогда имеем

$$\ln(y + 3) = \ln(1 + x^2) + \ln C = \ln C\,(1 + x^2)$$

или, потенцируя,

$$y + 3 = C\,(1 + x^2), \text{ откуда } y = C\,(1 + x^2) - 3. \tag{IX.17}$$

Упражнения

1. Показать при помощи дифференцирования, что функция $y = C\,(1 + x^2) - 3$ действительно удовлетворяет уравнению (IX.16).
2. Выделить из общего решения (IX.17) интегральную кривую, проходящую через точку $x_0 = 1$, $y_0 = 5$.
3. Проинтегрировать уравнение

$$yy' - \sin x = 0.$$

§ 103. Уравнения, приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными. Однородное уравнение

Многие дифференциальные уравнения могут быть приведены к виду (IX.9) путем замены переменных. К числу таких уравнений относится, например, уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by), \tag{IX.18}$$

где a и b — постоянные величины.

Действительно, введя новую переменную z:

$$z = ax + by; \quad \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \tag{IX.19}$$

согласно (IX.19) и (IX.18) будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(ax + by) = a + bf(z).$$

Отсюда

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

т. е. мы получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C. \tag{IX.20}$$

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y - 3x. \tag{IX.21}$$

Решение. Полагая

$$z = y - 3x; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 3, \tag{IX.22}$$

согласно (IX.21) и (IX.22) будем иметь:

$$\frac{dz}{dx} = (y - 3x) - 3 = z - 3.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dz}{z - 3} = dx; \quad \ln(z - 3) = x + \ln C,$$

или

$$z - 3 = e^{x + \ln C} = e^x \cdot e^{\ln C} = Ce^x.$$

Отсюда, заменяя согласно (IX.22) z его первоначальным значением $y - 3x$, т. е. возвращаясь к переменным y; x, находим общее решение дифференциального уравнения (IX.21):

$$(y - 3x) - 3 = Ce^x,$$

или

$$y = 3 + 3x + Ce^x. \tag{IX.23}$$

Подставив (IX.23) в исходное дифференциальное уравнение (IX.21)

$$(3 + 3x + Ce^x)' = (3 + 3x + Ce^x) - 3x$$

и учтя, что производная от суммы равна сумме производных: $(3 + 3x + Ce^x)' = (3)' + (3x)' + (Ce^x)' = 0 + 3 + Ce^x$, убеждаемся, что найденная функция $y = y(x)$ действительно обращает его в тождество

$$3 + Ce^x = 3 + Ce^x,$$

справедливое при любом значении произвольной постоянной C.

Упражнение 1. Решить уравнение (IX.21), воспользовавшись непосредственно формулой (IX.20).

Указание. В формуле (IX.20) следует положить $a=-3$, $b=+1$, $f(z)=z$ и, кроме того, произвольную постоянную C заменить новой постоянной $C^*=-\ln C$.

К уравнению (IX.9) приводится и так называемое *однородное дифференциальное уравнение первого порядка*, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{IX.24}$$

Действительно, после подстановки

$$z=\frac{y}{x}, \text{ или } y=xz, \tag{IX.25}$$

приняв во внимание правило дифференцирования произведения, получаем

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z; \quad x\frac{dz}{dx}+z=f(z).$$

Выполнив очевидные преобразования, мы приходим к уравнению типа (IX.10), в котором переменные разделены:

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}. \tag{IX.26}$$

Проинтегрировав это уравнение методом, изложенным в § 102, завершаем решение задачи.

Пример 2 [170, стр. 26]. Найти общий интеграл уравнения

$$y'=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}. \tag{IX.27}$$

Решение. Полагая $y=xz$; $y'=xz'+z=x\frac{dz}{dx}+z$ и подставляя в исходное уравнение, получим

$$x\frac{dz}{dx}+z=z+\operatorname{tg}z, \text{ или } \frac{\cos z}{\sin z}dz=\frac{dx}{x}.$$

Взяв квадратуры от обеих частей этого равенства, имеем

$$\int\frac{\cos z}{\sin z}dz=\int\frac{dx}{x},$$

или

$$\ln\sin z=\ln x+\ln C=\ln Cx.$$

Отсюда после потенцирования и перехода к первоначальной переменной y находим общий интеграл уравнения (IX.27):

$$\sin z=Cx; \quad \sin\frac{y}{x}=Cx. \tag{IX.28}$$

Упражнение 2. Выделить из (IX.28) интегральную кривую, проходящую через точку $x_0=1$, $y_0=\frac{\pi}{2}$.

Заметим, что в более общем случае однородным уравнением называется уравнение

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0, \tag{IX.29}$$

в котором $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одной и той же степени*.

Уравнение (IX.29) легко привести к уравнению (IX.24), для чего надо представить его в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однако при решении конкретных задач нет необходимости уравнение (IX.29) приводить к виду (IX.24), а достаточно только удостовериться, что оно является однородным, и воспользоваться затем подстановкой (IX.25), которая приведет его непосредственно к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0. \qquad \text{(IX.30)}$$

Решение. В данном случае $M = y^2$ и $N = x^2 - xy$ есть однородные функции второй степени, так как

$$M(\lambda y) = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 M(y); \quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2 (x^2 - xy) = \lambda^2 N(x, y).$$

Поэтому (IX.30) является однородным уравнением и, подставив в него $y = xz$, $dy = x\,dz + z\,dx$, получим

$$x^2z^2\,dx + (x^2 - x^2z)(x\,dz + z\,dx) = x^2z^2\,dx + x^3(1 - z)\,dz + \\ + x^2z\,dx - x^2z^2\,dx = x^2z\,dx - x^3(z - 1)\,dz = 0,$$

или после разделения переменных:

$$\frac{z - 1}{z}\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Отсюда, взяв квадратуры, находим

$$\int\left(1 - \frac{1}{z}\right)dz = \int\frac{dx}{x}; \quad z - \ln z = \ln x + \ln C;$$

$$z = \ln z + \ln x + \ln C = \ln Cxz,$$

и после потенцирования

$$e^z = Cxz.$$

Заменив z его первоначальным значением $\frac{y}{x}$, получаем общий интеграл уравнения (IX.30):

$$e^{y/x} = Cy. \qquad \text{(IX.31)}$$

Упражнение 3. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$$

и проверить полученный результат при помощи дифференцирования.

§ 104. Линейное уравнение первого порядка

Уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = f(x), \qquad \text{(IX.32)}$$

в которое неизвестная функция y и ее производная y' входят линейно (т. е. в первой степени), называется линейным дифференциальным урав-

* Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени m*, если при любом значении λ выполняется тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y).$$

Таким образом, функция $f\left(\frac{y}{x}\right)$, стоящая в правой части уравнения (IX.24), есть однородная функция нулевой степени.

нением первого порядка. Функции $p(x)$ и $f(x)$ будем в дальнейшем считать непрерывными функциями x в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (IX.32). В частности, $p(x)$ и $f(x)$ могут быть величинами постоянными или равными нулю.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение

$$y' + p(x)\, y = 0 \tag{IX.33}$$

называется *линейным однородным* *.

В общем случае уравнение (IX.32) называют *линейным неоднородным* из-за наличия в нем неоднородной правой части.

В линейном однородном уравнении (IX.33) переменные разделяются:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = 0, \text{ откуда } \frac{dy}{y} = -p(x)\, dx,$$

так что, беря квадратуры, получим

$$\ln y = -\int p(x)\, dx + \ln C,$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)\, dx}. \tag{IX.34}$$

При делении на y мы потеряли частное решение $y(x) \equiv 0$. Однако оно может быть включено в найденное семейство решений (IX.34), если считать, что постоянная C может принимать и значение нуль.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения (IX.32) применяют чаще всего так называемый *метод вариации постоянной*, впервые предложенный Лагранжем. С этой целью сначала интегрируется соответствующее (т. е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение (IX.33), общее решение которого дается формулой (IX.34).

При постоянном C функция $y = Ce^{-\int p(x)\, dx}$ является решением однородного уравнения (IX.33). Попробуем удовлетворить неоднородному уравнению (IX.32), заменив постоянную C неизвестной функцией $\varphi(x)$. Другими словами, будем искать решение уравнения (IX.32) в виде

$$y = \varphi(x) \cdot e^{-\int p(x)\, dx}. \tag{IX.35}$$

Вычисляя согласно формуле (III.44) § 34 производную

$$y' = \varphi'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} + \varphi(x) \left\{e^{-\int p(x)\, dx}\right\}' =$$
$$= \varphi'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} - \varphi(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}$$

и подставляя найденные значения y' и y в исходное неоднородное уравнение $y' + p(x)\, y = f(x)$, получаем

$$\left\{\varphi'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} - \varphi(x)\, p(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}\right\} + p(x)\, \varphi(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = f(x)$$

или, после приведения подобных членов и очевидных преобразований:

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x)\, e^{\int p(x)\, dx}.$$

* Иногда, для большей точности терминологии, уравнение (IX.33) называют *линейным уравнением без правой части*, поскольку термин «однородное уравнение» имеет и другой смысл (см. § 103).

Отсюда, интегрируя, находим

$$\varphi(x) = \int f(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C_1,$$

где $C_1 = C$ — новая произвольная постоянная.

Подставив найденное значение $\varphi(x)$ в (IX.35), имеем:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left\{C + \int f(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right\}. \qquad \text{(IX.36)}$$

Это общее решение уравнения (IX.32). При $C = C_1 = 0$ мы получим частное решение того же уравнения, которое обозначим $y_1(x)$:

$$y_1(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\int f(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\,dx. \qquad \text{(IX.37)}$$

В таком случае формуле (IX.36) легко придать следующий окончательный вид:

$$y = y_1(x) + Ce^{-\int p(x)\,dx}. \qquad \text{(IX.38)}$$

Итак, *общее решение линейного неоднородного уравнения (IX.32) равно сумме некоторого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (IX.33), полученного отбрасыванием правой части $f(x)$.*

Замечание. У недостаточно опытного читателя может сложиться впечатление, что линейное уравнение решается очень сложно. Однако это не так, и в действительности, нет никакой надобности пользоваться выведенными громоздкими формулами. Важно только запомнить общий ход решения линейного уравнения *(рассматриваем однородное уравнение, разделяем переменные и варьируем произвольную постоянную, т. е. заменяем ее неизвестной функцией $\varphi(x)$)*, а затем, решая конкретные примеры, повторять его каждый раз заново.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{1+x^2}. \qquad \text{(IX.39)}$$

Решение. Учтя, что $y' = \frac{dy}{dx}$, рассматриваем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

откуда, после интегрирования, получаем

$$\ln y = \ln x + \ln C; \quad y = Cx.$$

Заменяем постоянную C неизвестной функцией $\varphi(x)$:

$$y = x \cdot \varphi(x); \quad y' = \varphi(x) + x\varphi'(x)$$

и, подставляя эти значения в исходное уравнение (IX.39), имеем

$$\varphi(x) + x\frac{d\varphi}{dx} - \frac{x\varphi(x)}{x} = \frac{x}{1+x^2},$$

или, после очевидных упрощений,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+x^2}; \quad \varphi(x) = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (IX.39) будет

$$y = C_1 x + x \operatorname{arctg} x = x (C_1 + \operatorname{arctg} x), \tag{IX.40}$$

так как $y_1(x) = x\varphi(x) = x \operatorname{arctg} x$ есть частное решение этого уравнения, полученное, если положить $C_1 = 0$, в формуле для $\varphi(x)$, а $y = Cx$ есть общее решение однородного уравнения $y' - \frac{y}{x} = 0$.

Упражнение 1. Проверить результат (IX.40) дифференцированием.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{y'}{2x} + 3xy = e^{-2x^3} \tag{IX.41}$$

и найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_0 = 5 \text{ при } x_0 = 0.$$

Решение. Прежде всего нужно привести данное уравнение к виду (IX.32). С этой целью умножим обе его части на $2x$ и получим

$$y' + 6x^2 y = 2xe^{-2x^3}. \tag{IX.42}$$

Решив соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + 6x^2 y = 0, \text{ или } \frac{dy}{y} = -6x^2\,dx,$$

находим

$$\int \frac{dy}{y} = -6 \int x^2\,dx; \quad \ln y = -2x^3 + \ln C; \quad y = Ce^{-2x^3}.$$

Варьируем произвольную постоянную, т. е. заменяем ее неизвестной функцией $\varphi(x)$:

$$y = \varphi(x) \cdot e^{-2x^3}; \quad y' = \varphi'(x) \cdot e^{-2x^3} - 6x^2\varphi(x)\, e^{-2x^3}.$$

Подставив эти результаты в уравнение (IX.42), имеем

$$\{\varphi'(x)\, e^{-2x^3} - 6x^2\varphi(x)\, e^{-2x^3}\} + 6x^2 \{\varphi(x)\, e^{-2x^3}\} = 2xe^{-2x^3}.$$

Приведя подобные члены, приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, из которого и определяем функцию $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)\, e^{-2x^3} = 2xe^{-2x^3}, \text{ или } \varphi'(x) = 2x.$$

Отсюда, взяв квадратуру, находим

$$\varphi(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C_1,$$

так что общее решение уравнения (IX.42), а следовательно, и (IX.41) будет

$$y = \varphi(x)\, e^{-2x^3} = (C_1 + x^2)\, e^{-2x^3}. \tag{IX.43}$$

Положив в этом равенстве $y = y_0 = 5$, $x = x_0 = 0$, определяем значение произвольной постоянной $C_1 = 5$ и соответствующее ей частное решение

$$y = (5 + x^2)\, e^{-2x^3},$$

которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Упражнение 2. Проинтегрировать уравнение

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

и выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_0 = \frac{1}{5} \text{ при } x_0 = 1.$$

В заключение заметим, что аналогичным путем интегрируется уравнение

$$\frac{dx}{dy} + p(y)\,x = f(y), \tag{IX.44}$$

получаемое из (IX.32), если поменять в нем ролями x и y.

§ 105. Уравнение Бернулли

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, *уравнение Бернулли*, имеющее вид

$$y' + p(x)\,y = f(x)\,y^n; \quad n \neq 0; \quad n \neq 1, \tag{IX.45}$$

или

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-n} = f(x), \tag{IX.46}$$

заменой переменных

$$y^{1-n} = z \tag{IX.47}$$

сводится к линейному уравнению.

Действительно, дифференцируя равенство (IX.47), находим

$$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

так что, подставив эти результаты в (IX.46) и выполнив очевидные упрощения, получим линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)\,z = f(x). \tag{IX.48}$$

При $n = 1$ уравнение (IX.48) теряет смысл, поэтому в (IX.45) мы исключили случай $n = 1$. Но при $n = 1$, так же как и при $n = 0$, уравнение (IX.45) непосредственно обращается в линейное уравнение.

Пример [81, стр. 83]. Проинтегрировать уравнение

$$y' - 2xy = 2x^3y^2 \tag{IX.49}$$

и найти интегральную кривую, проходящую через точку (0; 1).

Решение. Разделим обе части уравнения (IX.49) на y^2:

$$y^{-2}y' - 2xy^{-1} = 2x^3.$$

Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2}y' = z'$. Подставив эти значения в исходное уравнение, обе части которого надо предварительно умножить на (—1), приходим к линейному уравнению

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Интегрируя это уравнение, что читателю полезно выполнить в виде упражнения, находим

$$z = Ce^{-x^2} + 1 - x^2.$$

Следовательно, согласно подстановке $y^{-1} = \frac{1}{y} = z$ общим решением уравнения (IX.49) будет

$$y = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}. \qquad \text{(IX.50)}$$

Интегральной кривой, проходящей через заданную точку $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ будет

$$y = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Это частное решение мы найдем из общего решения при значении произвольной постоянной $C = 0$, которое получим, положив в формуле (IX.50) $x = x_0 = 0$, $y = y_0 = 1$. В результате приходим к уравнению

$$1 = \frac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}\Bigg|_{x=0} = \frac{1}{C+1}, \text{ откуда } C + 1 = 1;\ C = 0.$$

Решением уравнения (IX.49) будет также $y = 0$; оно представляет собой асимптоту всех других интегральных кривых (IX.50).

Легко проверить, что и в общем случае (при $n > 0$) прямая $y = 0$ является решением уравнения Бернулли. Действительно, подставив $y = 0$ в (IX.45) и учтя, что производная от любой постоянной, в том числе и от нуля, есть нуль, убеждаемся, что значение $y = 0$ тождественно удовлетворяет уравнению Бернулли. Это решение будет частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$ [81, стр. 83].

Упражнение. Проинтегрировать уравнение Бернулли

$$y' - \frac{y}{2x} = \frac{x^2}{2y}$$

и проверить полученный результат дифференцированием.

Указание. В данном случае $n = -1$; $p(x) = -\frac{1}{2x}$; $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Поэтому согласно (IX.47) и (IX.48) подстановка $y^2 = z$ приводит заданное уравнение к линейному, $z' - \frac{z}{x} = x^2$.

§ 106. Линейное уравнение второго порядка

Уравнение n-го порядка (IX.1) называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции $y = y(x)$ и всех ее производных, т. е. если в уравнение (IX.1) величины y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ входят только в первой степени (или отсутствуют). При этом отсутствовать может любая из величин y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, но не старшая производная $y^{(n)}$, так как в противном случае уравнение будет иметь порядок ниже чем n. Например, уравнение $y^{IV} + 5x^3y = 2x^5 \sin x$ есть линейное уравнение четвертого порядка, а $y'' = y'$ — линейное уравнение второго порядка.

Случай $n = 1$ мы уже рассмотрели в § 104. При $n = 2$ линейное уравнение всегда можно представить в следующем виде:

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f(x), \qquad \text{(IX.51)}$$

где не зависящие от y функции $p(x)$ и $q(x)$ называются *коэффициентами линейного уравнения*, а функция $f(x)$ — его *правой частью*.

Если $f(x) = 0$, то уравнение (IX.51) называется *однородным*, или *уравнением без правой части*, если же $f(x) \neq 0$, то — *неоднородным*. Левую часть уравнения

(IX.51) часто для краткости обозначают одним символом $L[y]$, который называют *линейным оператором*.

Таким образом, по определению

$$L[y] \equiv y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y. \tag{IX.52}$$

Тогда уравнение (IX.51) в операторной форме принимает такой вид:

$$L[y] = f(x), \tag{IX.51'}$$

если оно неоднородное, и

$$L[y] \equiv y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0, \tag{IX.53}$$

если это уравнение однородное.

Линейный оператор (IX.52) обладает следующими замечательными свойствами:

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \tag{IX.54}$$

и

$$L[Cy] = CL[y], \text{ если } C \text{ — постоянная.} \tag{IX.55}$$

Действительно, подставив в (IX.52) $y = y_1 + y_2$ и учтя, что производная от суммы равна сумме производных, имеем

$$L[y_1 + y_2] = (y_1'' + y_2'') + p(x)(y_1' + y_2') + q(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= [y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1] + [y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2] = L[y_1] + L[y_2].$$

Аналогично доказывается и формула (IX.55).

Пользуясь формулами (IX.54), (IX.55), легко доказать следующие свойства однородного уравнения (IX.53).

1. *Если функция $y_1 = \varphi(x)$ есть решение уравнения (IX.53), то функция $y = C\varphi(x)$, где C — постоянная, также является его решением.*

В самом деле, если y_1 есть решение, то $L[y_1] \equiv 0$, а тогда согласно (IX.55) и $L[Cy_1] = CL[y_1] \equiv 0$.

2. *Если функции $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ суть два решения уравнения (IX.53), то функция $y = \varphi(x) + \psi(x) = y_1 + y_2$ — также решение.*

Действительно, если y_1 и y_2 — два решения, т. е.

$$L[y_1] \equiv 0 \text{ и } L[y_2] \equiv 0, \text{ то } L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0.$$

Следствие. *Если $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ суть два решения уравнения (IX.53), то*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{IX.56}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, также является его решением.

Доказать справедливость формулы (IX.56) читатель легко сможет самостоятельно, воспользовавшись формулами (IX.55) и (IX.54).

Пример 1. Проинтегрировать однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + \frac{x}{1-x}\,y' - \frac{y}{1-x} = 0. \tag{IX.57}$$

Решение. Убедившись непосредственной проверкой, что функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = x$ являются решениями заданного уравнения, общее решение находим согласно формуле (IX.56):

$$y = C_1 e^x + C_2 x. \tag{IX.58}$$

Действительно, выражение (IX.58) есть функция x, содержащая две произвольные постоянные, как и должно быть в случае общего решения дифференциального уравнения второго порядка.

Упражнение 1. Проверить при помощи дифференцирования, что функции $y = e^x$, $y = x$, $y = 2e^x - 7x$, $y = C_1 e^x + C_2 x$ действительно удовлетворяют уравнению (IX.57).

Замечание. Необходимо подчеркнуть, что выражение (IX.56) будет общим решением однородного уравнения (IX.53) только в том случае, если y_1 и y_2 есть *линейно независимые решения*, т. е. такие решения, отношение которых не является постоянным:

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}. \tag{IX.59}$$

Если же они будут линейно зависимыми, например $y_1 = \lambda y_2$, то формула (IX.56) не даст общего решения, так как в этом случае

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 y_1 + \lambda C_2 y_1 = (C_1 + \lambda C_2)\, y_1 = C y_1,$$

где $C = C_1 + \lambda C_2$ есть новая постоянная. Таким образом, хотя в построенном решении формально и фигурируют две произвольные постоянные, но они не являются существенными и их всегда можно заменить одной новой произвольной постоянной.

Рассмотрим неоднородное уравнение (IX.51), для которого справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если известно какое-либо частное решение $y^* = \chi(x)$ неоднородного уравнения (IX.51), то общее его решение есть*

$$y = y^* + C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{IX.60}$$

где $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ — два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения (IX.53).

Доказательство. По условию теоремы $y^* = \chi(x)$ есть частное решение неоднородного уравнения (IX.51), так что

$$L[y^*] \equiv y^{*''} + p(x)\, y^{*'} + q(x)\, y^* \equiv f(x).$$

Сделаем в уравнении (IX.51) замену

$$y = y^* + z.$$

Тогда, учтя свойство (IX.54) линейного оператора, имеем

$$L[y] = L[y^* + z] = L[y^*] + L[z] = f(x).$$

Однако $L[y^*] \equiv f(x)$, и мы приходим к уравнению

$$L[z] = 0,$$

т. е. к однородному уравнению (IX.53) для новой переменной $z = y - y^*$, что и требовалось доказать.

Итак, в полном соответствии с результатами § 104, *общее решение линейного неоднородного уравнения (IX.51) есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Полученные результаты остаются справедливыми и для линейных уравнений n-го порядка, но этот вопрос выходит за рамки данной книги.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$y' - \frac{x}{1-x}\, y' - \frac{1}{1-x}\, y = 2 + \frac{x^2}{1-x}. \tag{IX.61}$$

Решение. Убедившись при помощи непосредственной проверки, что функция $y^* = x^2$ является частным решением неоднородного уравнения (IX.61), и учтя результаты, полученные в примере 1, общее решение находим по формуле (IX.60):

$$y = x^2 + C_1 e^x + C_2 x. \tag{IX.62}$$

Упражнение 2. Проверить при помощи дифференцирования, что функции $y = x^2$; $y = 3e^x + x^2$; $y = x^2 - 5x$; $y = x^2 + C_1 e^x + C_2 x$ действительно удовлетворяют уравнению (IX.61).

В настоящее время еще не разработаны достаточно эффективные методы для определения в конечном виде общего решения линейных уравнений с переменными коэффициентами. Однако для уравнений с постоянными коэффициентами, которые часто встречаются при решении различных технических задач, такой метод существует, и мы его рассмотрим в следующем параграфе. Для случая же уравнений с переменными коэффициентами при помощи рядов всегда можно построить приближенные решения, удовлетворяющие определенным начальным условиям. К этому вопросу мы также в дальнейшем вернемся.

§ 107. Линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами составляют важнейший класс уравнений, интегрирование которых сравнительно легко доводится до конца.

Для большей конкретности изложение начнем со случая $n = 2$.

Уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{IX.63}$$

где p и q — постоянные, а $f(x)$ зависит только от x или является постоянной величиной, называется *линейным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*. Уравнение (IX.63) всегда приводится к квадратурам, а в случае однородного уравнения, т. е. когда $f(x) = 0$, решение не только приводится к квадратурам, но и всегда выражается в элементарных функциях.

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{IX.64}$$

Эйлер предложил искать частные решения линейного уравнения с постоянными коэффициентами (любого порядка) в форме

$$y = e^{\lambda x}, \tag{IX.65}$$

где λ — некоторая постоянная, значения которой надо еще определить.

Подставив (IX.65) в (IX.64) и учтя, что $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, имеем

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Так как первый множитель при любом значении λ отличен от нуля, то мы должны потребовать, чтобы в нуль обратилось выражение в скобках:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{IX.66}$$

Итак, *для того чтобы функция (IX.65) удовлетворяла уравнению (IX.64) необходимо и достаточно, чтобы λ удовлетворяла уравнению (IX.66), которое называется характеристическим уравнением.* Заметим, что для составления характеристического уравнения достаточно в исходном дифференциальном уравнении вместо y'', y', y написать соответственно λ^2, λ, $1 = \lambda^0$.

Квадратное уравнение (IX.66) имеет два корня:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \qquad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{IX.67}$$

Разберем три возможных случая решения уравнения (IX.66).

Случай I. Корни характеристического уравнения действительны и различны, т. е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

В этом случае частными решениями будут функции

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{ и } y_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{const}.$$

Следовательно, в соответствии с (IX.56) общее решение будет

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{IX.68}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' - 10y = 0. \tag{IX.69}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

имеет два неравных действительных корня:

$$\lambda_{1;2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -\frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}; \qquad \lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = -5.$$

Следовательно, согласно (IX.68) общее решение есть

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x}. \tag{IX.70}$$

Упражнение 1. Проверить дифференцированием, что (IX.70) при любых значениях C_1 и C_2 действительно удовлетворяет уравнению (IX.69).

Случай II. Корни характеристического уравнения действительны и равны, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$.

В этом случае решения $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно зависимы, так как они совпадают ($\lambda_1 = \lambda_2$). Но теперь наряду с решением $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-\frac{p}{2}x}$ существует линейно независимое решение

$$y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^{-\frac{p}{2}x};\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2} \tag{IX.71}$$

так что общим решением при $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$ будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{IX.72}$$

Действительно, рассматриваемый случай можно получить из случая I, считая, что $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_1$, а затем переходя к пределу $\Delta\lambda_1 \to 0$. Тогда в качестве второго независимого решения $y = y_2$ возьмем то предельное значение, которое получим, положив $C_2 = -C_1 = \frac{1}{\Delta\lambda_1}$ в формуле (IX.68):

$$y_2 = \lim_{\Delta\lambda_1 \to 0} \frac{1}{\Delta\lambda_1}\left(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}\right) = \lim_{\Delta\lambda_1 \to 0} \frac{e^{(\lambda_1 + \Delta\lambda_1)x} - e^{\lambda_1 x}}{\Delta\lambda_1}.$$

Согласно определению производной (III.34) в правой части этого равенства стоит производная от функции $e^{x\lambda_1}$. Но в данном случае независимой переменной

является λ_1, а x мы должны рассматривать как постоянный параметр. Тогда, воспользовавшись формулами (III.49), (III.77), находим

$$y_2 = \frac{de^{\lambda_1 x}}{d\lambda_1} = xe^{\lambda_1 x},$$

что и требовалось доказать.

Этот же результат можно получить и другим путем. Исследуем выражение $\frac{1}{\Delta\lambda_1}\left(e^{\Delta\lambda_1 x} - 1\right)$ и найдем его предел при $\Delta\lambda_1 \to 0$.

Воспользовавшись рядом (VIII.51) для экспоненциальной функции, имеем

$$e^{\Delta\lambda_1 \cdot x} = 1 + \frac{x\cdot\Delta\lambda_1}{1!} + \frac{x^2(\Delta\lambda_1)^2}{2!} + \frac{x^3(\Delta\lambda_1)^3}{3!} + \ldots .$$

Тогда

$$\frac{1}{\Delta\lambda_1}\left(e^{\Delta\lambda_1\cdot x} - 1\right) = \frac{1}{\Delta\lambda_1}\left[1 + \frac{x\cdot\Delta\lambda_1}{1!} + \frac{x^2(\Delta\lambda_1)^2}{2!} + \frac{x^3(\Delta\lambda_1)^3}{3!} + \ldots - 1\right] =$$

$$= x + \frac{x^2}{2!}\Delta\lambda_1 + \frac{x^3}{3!}(\Delta\lambda_1)^2 + \frac{x^4}{4!}(\Delta\lambda_1)^3 + \ldots .$$

При $\Delta\lambda_1 \to 0$ все члены правой части этого равенства, кроме первого, обратятся в нуль и, следовательно,

$$\lim_{\Delta\lambda_1 \to 0} \frac{1}{\Delta\lambda_1}\left(e^{\Delta\lambda_1\cdot x} - 1\right) = x,$$

а в таком случае

$$y_2 = \lim_{\Delta\lambda_1 \to 0} \frac{e^{(\lambda_1+\Delta\lambda_1)x} - e^{\lambda_1 x}}{\Delta\lambda_1} = \lim_{\Delta\lambda_1 \to 0} e^{\lambda_1 x}\left[\frac{e^{\Delta\lambda_1\cdot x} - 1}{\Delta\lambda_1}\right] = xe^{\lambda_1 x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \qquad \text{(IX.73)}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

в данном примере имеет два совпадающих корня:

$$\lambda_{1;2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9}; \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 3,$$

что соответствует случаю II. Согласно (IX.72) общим решением уравнения (IX.73) будет

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}. \qquad \text{(IX.74)}$$

Действительно, дифференцируя дважды равенство (IX.74), находим

$$y' = C_2 e^{3x} + 3(C_1 + C_2 x)e^{3x};$$
$$y'' = 3C_2 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 9(C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Подставив эти результаты в исходное уравнение, имеем

$$y'' - 6y' + 9y = [6C_2 + 9(C_1 + C_2 x)]e^{3x} - 6[C_2 + 3(C_1 + C_2 x)]e^{3x} +$$
$$+ 9(C_1 + C_2 x)e^{3x} = e^{3x}\{(6C_2 - 6C_2) + (9C_1 - 18C_1 + 9C_1) +$$
$$+ (9C_2 x - 18C_2 x + 9C_2 x)\} \equiv 0.$$

Таким образом, какие бы числовые значения ни приписать постоянным C_1 и C_2, в общем решении (IX.74), это решение тождественно обращает в нуль уравнение (IX.73).

Упражнение 2. Проинтегрировать уравнения:

а) $y''-2y'+y=0$; б) $y''+y'-2y=0$; в) $2y''+7y'+3y=0$

и проконтролировать результат при помощи дифференцирования.

Случай III. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, а именно:

$$\lambda_1=a+ib;\quad \lambda_2=a-ib. \tag{IX.75}$$

Если коэффициенты уравнения (IX.64) действительные числа, то корни характеристического уравнения (IX.66) могут быть либо действительными, либо комплексными сопряженными. В последнем случае частными решениями однородного уравнения (IX.64) будут

$$y_1^*=e^{\lambda_1 x}=e^{(a+ib)x} \text{ и } y_2^*=e^{\lambda_2 x}=e^{(a-ib)x}. \tag{IX.76}$$

Однако эти решения можно преобразовать так, чтобы они не содержали мнимых величин.

Представим функции (IX.76) в следующем виде:

$$y_1^*=e^{ax+bxi}=e^{ax}\cdot e^{bxi},$$
$$y_2^*=e^{ax-bxi}=e^{ax}\cdot e^{-bxi}.$$

Сложив, а затем вычтя эти равенства, получим

$$y_1^*+y_2^*=e^{ax}\left(e^{bxi}+e^{-bxi}\right),$$
$$y_1^*-y_2^*=e^{ax}\left(e^{bxi}-e^{-bxi}\right).$$

Умножим первое из найденных равенств на $\frac{1}{2}$, а второе — на $\frac{1}{2i}$:

$$\frac{y_1^*+y_2^*}{2}=e^{ax}\,\frac{e^{bxi}+e^{-bxi}}{2},$$
$$\frac{y_1^*-y_2^*}{2i}=e^{ax}\,\frac{e^{bxi}-e^{-bxi}}{2i}. \tag{IX.77}$$

Воспользовавшись формулами Эйлера*, согласно которым

$$\frac{e^{bxi}+e^{-bxi}}{2}=\cos bx,\quad \frac{e^{bxi}-e^{-bxi}}{2i}=\sin bx,$$

придаем равенствам (IX.77) окончательный вид:

$$y_1=\frac{y_1^*+y_2^*}{2}=e^{ax}\cos bx,$$
$$y_2=\frac{y_1^*-y_2^*}{2i}=e^{ax}\sin bx. \tag{IX.78}$$

Выражения $y_1=\frac{1}{2}\left(y_1^*+y_2^*\right)$ и $y_2=\frac{1}{2i}\left(y_1^*-y_2^*\right)$ являются частными реше-

* Формулы Эйлера

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

будут доказаны позднее, в § 132 гл. X.

ниями уравнения (IX.64), так как мы можем их получить, положив в общем решении (IX.68) соответственно

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \text{ и } C_1 = -C_2 = \frac{1}{2i}.$$

Таким образом, мы нашли два частных решения уравнения (IX.64), представленные равенствами (IX.78), причем эти решения линейно независимые. Следовательно, общее решение уравнения (IX.64) в случае комплексных сопряженных λ_1 и λ_2 будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx,$$

или

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad \text{(IX.79)}$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 0, \quad \text{(IX.80)}$$

а затем выделить интегральную кривую, удовлетворяющую начальным условиям $x_0 = 0$, $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1 + 3i$ и $\lambda_2 = -1 - 3i$.

Сравнивая их с (IX.75), находим

$$a = -1; \quad b = +3.$$

Следовательно, линейно независимыми частными решениями данного уравнения будут

$$y_1 = e^{-x} \cos 3x \text{ и } y_2 = e^{-x} \sin 3x,$$

а его общее решение (IX.79)

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad \text{(IX.81)}$$

Переходим ко второй части задачи и подберем такие C_1 и C_2, при которых соответствующее им частное решение будет удовлетворять заданным начальным условиям.

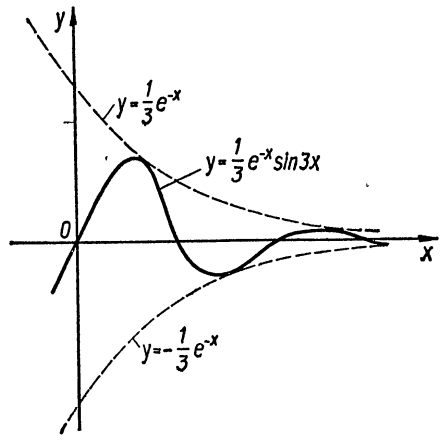


Рис. 232.

Подставив, согласно первому условию, $x = x_0 = 0$, $y = y(x_0) = 0$ в (IX.81), имеем

$$y(x_0) = e^{-0} (C_1 \cos 3 \cdot 0 + C_2 \sin 3 \cdot 0) = 0, \text{ откуда } C_1 = 0.$$

Внося найденное значение $C_1 = 0$ в уравнение (IX.81) и продифференцировав его, находим

$$y' = (C_2 e^{-x} \sin 3x)' = 3C_2 e^{-x} \cos 3x - C_2 e^{-x} \sin 3x,$$

а тогда из второго условия $x = x_0 = 0$, $y'(x_0) = 1$, учтя, что $e^0 = 1$; $\cos 0 = 1$; $\sin 0 = 0$, получаем

$$1 = 3C_2, \text{ т. е. } C_2 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, частное решение, которое и определяет собой искомую интегральную кривую, есть

$$y = \frac{1}{3} e^{-x} \sin 3x.$$

Его график приведен на рис. 232, на котором также пунктиром показаны и линии $y = \pm \frac{1}{3} e^{-x}$.

Упражнение 3. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' + 5 = 0$$

и выделить затем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0$; $y(x_0) = 1$; $y'(x_0) = 0$. Построить график.

В общем случае линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами ($a_1, a_2, \ldots, a_n = \text{const}$)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad \text{(IX.82)}$$

подстановка (IX.65) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \qquad \text{(IX.83)}$$

которое получим, заменив в (IX.82) $y^{(k)}$ на λ^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и учтя, что $y^{(0)} \equiv y$, $y^{(1)} = y'$, $\lambda^0 = 1$, $\lambda^1 = \lambda$.

Уравнение (IX.83) проще всего решать методом Ньютона (см. § 85). Определив его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, строим общее решение уравнения (IX.82):

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}. \qquad \text{(IX.84)}$$

Если некоторые из корней характеристического уравнения будут попарно равными или комплексными сопряженными, то поступаем аналогично случаям II и III.

Если же совпадающими корнями будут $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, то соответствующими им линейно независимыми решениями будут

$$y_1 = e^{\lambda x}, \; y_2 = xe^{\lambda x}, \; y_3 = x^2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}. \qquad \text{(IX.85)}$$

Пример 4. Найти общий интеграл уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0. \qquad \text{(IX.86)}$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

и находим его корни: $\lambda_1 = +1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = +2$. Подставив эти значения в формулу (IX.84), мы и решаем поставленную задачу:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \qquad \text{(IX.87)}$$

Полученный результат, как и при $n = 2$, легко проверить дифференцированием, что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

§ 108. Неоднородное линейное уравнение высшего порядка

Переходим к решению неоднородного линейного уравнения, начав изложение вопроса с уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad \text{(IX.88)}$$

Общее решение $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ уравнения (IX.88) получается из какого-либо частного его решения $y^* = \chi(x)$ прибавлением общего решения $\bar{y} = \bar{y}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ уравнения (IX.82)*

$$y = y^* + \bar{y}, \qquad \text{(IX.89)}$$

* Звездочка при y поставлена для того, чтобы легче было отличать частное решение $y^* = y^*(x) = \chi(x)$ уравнения (IX.88) от его общего решения $y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. С той же целью общее решение $\bar{y} = \bar{y}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ однородного уравнения (IX.82) мы обозначаем y с черточкой над ним.

т. е. теорема, доказанная в § 106 при $n = 2$, остается справедливой и при $n > 2$. Поэтому достаточно найти только одно единственное частное решение $y^*(x)$ уравнения (IX.88), после чего задача будет сведена к решению соответствующего однородного уравнения (IX.82). Проще всего эта задача решается в том случае, когда правая часть имеет следующий вид:

$$f(x) = P(x)\,e^{kx}, \tag{IX.90}$$

где $P(x) = P_m(x)$ — какой-либо полином степени m, а число k не является корнем характеристического уравнения (IX.83).

В этом случае уравнение (IX.88) имеет частное решение вида

$$y^* = Q(x)\,e^{kx}, \tag{IX.91}$$

где $Q(x) = Q_m(x)$ — некоторый полином степени не выше чем m. Неизвестные вначале коэффициенты и свободный член полинома $Q(x)$ можно найти по методу неопределенных коэффициентов.

Замечание 1. Если множитель $P(x)$ есть постоянная величина (т. е. полином нулевой степени $m = 0$), то $Q(x)$ — тоже постоянная.

Замечание 2. Если $f(x)$ есть просто полином $P(x)$, т. е. в формуле (IX.90) $k = 0$, то решение (IX.91) — тоже полином.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 6x^2 - 7. \tag{IX.92}$$

Решение. Найдем прежде всего какое-либо частное решение для заданного неоднородного уравнения (IX.92).

Здесь $f(x) = 6x^2 - 7$ есть полином второй степени ($m = 2$), а в множителе e^{kx} мы должны положить $k = 0$, при котором $e^{kx} = e^0 = 1$. Так как число $k = 0$ не является корнем характеристического уравнения $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, то уравнение (IX.92) должно иметь частное решение вида

$$y^* = Q_2(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0, \tag{IX.93}$$

где коэффициенты A_0, A_1, A_2 надо еще определить.

Поскольку в соответствии с (IX.93)

$$y^{*\prime} = 2A_2x + A_1; \quad y^{*\prime\prime} = 2A_2; \quad y^{*\prime\prime\prime} = 0,$$

то, подставив эти результаты в исходное уравнение (IX.92), имеем

$$0 - 2 \cdot 2A_2 - (2A_2x + A_1) + 2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = 6x^2 - 7,$$

или после приведения подобных членов

$$2A_2x^2 + 2(A_1 - A_2)x + (2A_0 - A_1 - 4A_2) = 6x^2 - 7.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (в том числе и свободные члены, т. е. коэффициенты при x в нулевой степени), а также учтя, что в правой части коэффициент при первой степени x равен нулю, получаем

$$2A_2 = 6; \quad A_1 - A_2 = 0; \quad 2A_0 - A_1 - 4A_2 = -7.$$

Отсюда

$$A_2 = 3; \quad A_1 = A_2 = 3; \quad A_0 = \frac{1}{2}(4A_2 + A_1 - 7) = 4,$$

так что согласно (IX.93) искомое решение y^* есть

$$y^* = 3x^2 + 3x + 4.$$

Воспользовавшись формулой (IX.89) и учтя, что согласно (IX.87) $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ есть решение соответствующего однородного уравнения, которое мы уже рассмотрели в примере 4 § 107, находим общее решение уравнения (IX.92):

$$y = y^* + \bar{y} = 3x^2 + 3x + 4 + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}. \quad \text{(IX.94)}$$

Упражнение 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = (2x + 5) e^{3x}$$

и результаты проверить дифференцированием.

Если в формуле (IX.90) число k совпадает с корнем μ-й кратности характеристического уравнения (IX.83), т. е. если $k = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_\mu$, то уравнение (IX.88) имеет частное решение вида

$$y^* = x^\mu Q(x) e^{kx}. \quad \text{(IX.95)}$$

Если правая часть уравнения (IX.88) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x], \quad \text{(IX.96)}$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — полиномы степеней m_1 и m_2, то формулу (IX.91) следует заменить формулой

$$y^* = e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \quad \text{(IX.97)}$$

в том случае когда комплексные числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, или же формулой

$$y^* = x e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \quad \text{(IX.98)}$$

когда $\alpha \pm i\beta$ суть корни уравнения (IX.83).

В формулах (IX.97) и (IX.98) $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ есть полиномы, степень которых не превышает старшей из степеней m_1, m_2, и коэффициенты этих полиномов определяются совершенно аналогично тому, как это было показано в начале параграфа.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 17 \sin x. \quad \text{(IX.99)}$$

Решение. Правая часть уравнения имеет вид (IX.96), причем $\alpha = 0$, $\beta = +1$, $P_1(x) = 0 = \text{const}$, $P_2(x) = 17 = \text{const}$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения согласно (IX.80) и (IX.81) есть

$$\bar{y} = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad \text{(IX.100)}$$

Так как числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$, то частное решение для (IX.99) ищем в виде

$$y^* = A \cos x + B \sin x, \quad \text{(IX.101)}$$

поскольку оба полинома $P_1(x) = 0$ и $P_2(x) = 17$ суть полиномы нулевой степени, постольку и неизвестные пока полиномы в формуле (IX.97) также должны быть равны постоянным $Q_1(x) = A$ и $Q_2(x) = B$.

Согласно (IX.101)

$$y^{*\prime} = (A \cos x + B \sin x)' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y^{*\prime\prime} = (-A \sin x + B \cos x)' = -A \sin x - B \cos x,$$

так что, подставив все эти результаты в исходное уравнение (IX.99), имеем

$$(-A\cos x - B\sin x) + 2(-A\sin x + B\cos x) + 10(A\cos x + B\sin x) = 17\sin x,$$

или, после приведения подобных членов,

$$(-A + 2B + 10A)\cos x + (-B - 2A + 10B)\sin x \equiv 17\sin x.$$

Приравняв коэффициенты в полученном тождестве и приняв во внимание, что в правой части отсутствует член, содержащий $\cos x$, приходим к системе уравнений для определения постоянных A и B:

$$\begin{cases} 9A + 2B = 0, & A = -\frac{2}{5}, \\ -2A + 9B = 17, & B = +\frac{9}{5}. \end{cases}$$

Внося эти значения в (IX.101) и воспользовавшись формулами (IX.89) и (IX.100), находим общее решение для заданного уравнения:

$$y = \bar{y} + y^* = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - \frac{2}{5}\cos x + \frac{9}{5}\sin x, \qquad \text{(IX.102)}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Замечание. В правой части исходного уравнения отсутствовал член, содержащий $\cos x$. Однако в искомое частное решение y^* и в этом случае надо обязательно включить $\cos x$, так как в противном случае мы не получим замкнутой системы для определения коэффициентов полиномов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Упражнение 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + 2y' + 10y = 3x\cos x$$

и результаты проверить дифференцированием.

В общем случае, когда $f(x)$ есть заданная непрерывная функция x, частное решение y^* уравнения (IX.88) всегда можно найти при помощи метода вариации произвольных постоянных. Отметим также, что формула (IX.89) остается справедливой и в случае линейного уравнения с переменными коэффициентами, т. е. в том случае, когда коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ уравнения (IX.88) суть функции от x.

Кроме рассмотренных в § 102—106 уравнений имеется еще несколько малораспространенных типов уравнений, интегрируемых в квадратурах. Кроме того, отдельные уравнения, не принадлежащие к определенным типам, иногда удается проинтегрировать в результате удачно подобранной подстановки. Однако необходимо подчеркнуть, что большинство уравнений не интегрируется в квадратурах. Например, не интегрируется в квадратурах простейшее из нелинейных уравнений

$$y' = y^2 + x^2,$$

которое мы рассмотрим в § 112, и многие другие такие же простые уравнения. Во всех этих случаях исключительно важную роль играет применение степенных рядов, к чему мы и перейдем, уточнив предварительно в следующем параграфе некоторые основные понятия.

§ 109. Геометрический смысл уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной (IX.7):

$$y' = f(x, y).$$

Будем считать, что функция $f(x, y)$ представляет собой однозначную функцию по x и y, что она дифференцируема по x и y и что ее производные конечны.

Исходя только из геометрических соображений, мы можем, не отыскивая в явном виде решения $y(x)$, построить качественную картину этих решений, что существенно облегчает дальнейшее более полное исследование уравнения (IX.7).

В плоскости x, y для кривой $y = y(x)$ величина

$$y' = \operatorname{tg}\alpha = k$$

равна тангенсу угла наклона касательной к этой кривой. Следовательно, зная, как выражается y' через переменные x и y, мы согласно (IX.7) можем найти в каждой (неособой) точке плоскости x, y угловой коэффициент $k = y'$ касательной к интегральной линии $y = y(x)$ уравнения (IX.7). Направление касательной покажем на чертеже, проведя через данную точку (x, y) небольшой отрезок прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = y'$ и построив вспомогательный прямоугольный треугольник с катетами $\Delta x = 1$ и $\Delta y = k = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 233).

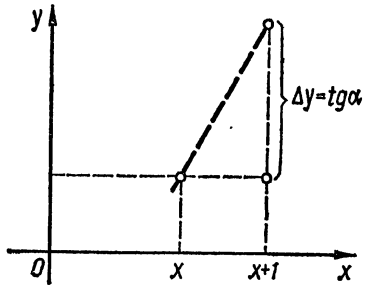


Рис. 233.

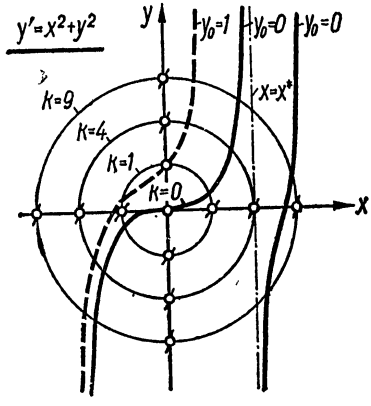


Рис. 234.

Начертим семейство кривых, определяемых уравнением

$$f(x, y) = C = \text{const}. \qquad \text{(IX.103)}$$

Каждая из этих кривых согласно (IX.103) соединяет точки, в которых интегральные кривые $y = y(x)$ уравнения (IX.7) имеют один и тот же наклон. Меняя значения константы C в уравнении (IX.103), мы получим однопараметрическое семейство таких кривых, которые называются *изоклинами*, т. е. линиями равного наклона. Задача нахождения решений (т. е. интегральных кривых) уравнения (IX.7) именно в том и состоит, чтобы найти такие кривые, которые пересекают каждую изоклину с соответствующим ей наклоном. Очевидно, что можно получить бесчисленное множество интегральных кривых, если каждый раз их построение начинать от различных точек некоторой изоклины.

На рис. 234 изображены две интегральные кривые уравнения

$$y' = x^2 + y^2,$$

проходящие соответственно через точки $x = 0$, $y = 0$ (сплошная линия) и $x = 0$, $y = 1$ (пунктирная линия).

Изоклинами в данном случае являются окружности

$$x^2 + y^2 = R^2 = C = \text{const},$$

и во всех точках каждой из этих окружностей угловой коэффициент

$$k = y' = R^2$$

сохраняет постоянное значение.

При $x = 0$, $y = 0$ наклон $k = 0$, а затем по мере удаления точки (x, y) от начала координат $k = R^2$ будет расти все быстрее и быстрее, стремясь при $R \to \infty$ к бесконечности. В соответствии с этим и интегральные кривые по мере удаления от начала координат будут все быстрее уходить в бесконечность, непрерывно увеличивая угол наклона. Так как

$$k = x^2 + y^2 \geqslant 0,$$

то каждое частное решение $y = y(x, C)$ рассматриваемого уравнения на всем бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$ будет являться монотонно растущей функцией. Поэтому интегральная кривая, пройдя через полюс,

$$x = x^*, \quad y = \pm\infty,$$

в окрестности которого касательная к $y(x)$ принимает вертикальное направление ($k = \infty$), при $x > x^*$ снова начнет монотонно возрастать, пока не достигнет второго полюса, и т. д. В самих полюсах функция $y = y(x)$ терпит разрыв непрерывности.

На рис. 235 аналогичные построения выполнены для уравнения

$$y' = 1 + y^2,$$

общим интегралом которого, как легко непосредственно проверить, будет

$$y = \operatorname{tg}(x + C).$$

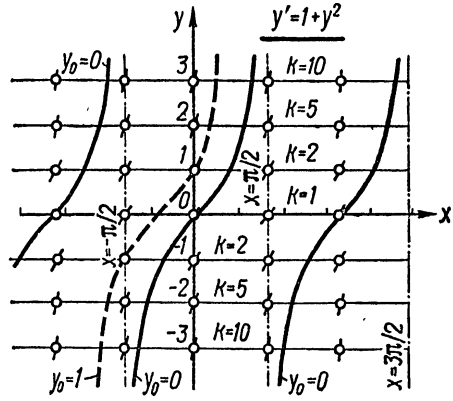


Рис. 235.

Изоклинами этого уравнения являются прямые, параллельные оси абсцисс:

$$1 + y^2 = C = \text{const}, \text{ или } y = \pm\sqrt{C - 1},$$

а угловой коэффициент

$$k = 1 + y^2,$$

приписываемый каждой изоклине, не зависит от x, а зависит только от y, и при $y \to \infty$, так же как и в первом примере, $k \to \infty$.

Отсюда непосредственно вытекает, что $\operatorname{tg} x$ есть *периодическая* и *мероморфная функция*, т. е. функция, все конечные особые точки которой являются полюсами. Действительно, пройдя через первый положительный полюс, который для интегральной кривой, определяемой начальным условием $y(0) = y_0 = 0$, как известно, равен $\frac{\pi}{2}$, кривая $y = \operatorname{tg} x$ может идти только эквидистантно участку, расположенному в первом периоде, поскольку на каждой из прямых $y = \text{const}$ наклон $k = y' = 1 + y^2$ будет одним и тем же.

Изложенный графический метод решения дифференциального уравнения первого порядка называется также *методом изоклин*. При этом, решая задачу с начальными условиями, мы из всех возможных интегральных кривых выделяем одну определенную кривую, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

При построении семейства интегральных кривых для данного уравнения (IX.7) прежде всего выделяем изоклины нулей ($k = 0$), на которых должны находиться все экстремальные точки искомых интегральных кривых и изоклины бесконечностей ($k = \infty$), в точках которых интегральные кривые имеют вертикальные касательные. Аналогичным путем, пользуясь уравнением (IX.7), можно в плоскости x, y найти кривые $y'' = 0$, характеризующие собой точки перегиба, что позволит внести дополнительные уточнения в качественную картину семейства интегральных кривых исследуемого дифференциального уравнения.

Метод изоклин может быть применен только в предположении, что $f(x, y)$ — однозначная и непрерывная функция от x и y, так как в противном случае через каждую точку (x, y) не будет проходить только одна интегральная кривая, т. е. решение не будет единственным.

Однако в некоторых особых точках эти условия могут не выполняться. Например, если $f(x, y)$ задана как частное от деления двух функций φ и ψ, так что

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}.$$

Тогда, если в какой-нибудь точке функции φ и ψ одновременно обращаются в нуль, функция $f(x, y)$ становится неопределенной и метод изоклин не может быть применен без дополнительных исследований.

Поведение кривых в окрестности особых точек дифференциальных уравнений (которые надо отличать от особых точек самих конкретных частных решений этих уравнений) подробно рассмотрено в книгах [26, 96, 112].

§ 110. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Задача Коши.

Решение дифференциального уравнения ν-го порядка в самом простейшем случае сводится к ν-кратному интегрированию заданной функции. Поэтому в состав его общего решения должны входить ν произвольных постоянных: C_1, C_2, ..., C_ν. В частности, в общее решение уравнения первого порядка входит только одна произвольная постоянная $C = C_1$, так как в этом случае $\nu = 1$. При $\nu = 2$, т. е. в случае уравнения второго порядка, в общее решение будут входить две произвольные постоянные: C_1, C_2 и т. д.

Такую же структуру сохраняет общее решение (или общий интеграл) и во всех других случаях дифференциальных уравнений ν-го порядка. Поэтому, для того чтобы задачу сделать однозначной, как уже отмечалось, необходимо еще задать ν каких-либо дополнительных условий, из которых можно определить ν произвольных постоянных. Если все эти условия заданы в начальной точке $x = x_0$, т. е. если в точке $x = x_0$ задана сама функция $y(x_0)$ и все ее производные $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ..., $y^{(\nu-1)}(x_0)$ до порядка $(\nu - 1)$ включительно, то рассматриваемая задача называется *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*. Если же условия заданы на концах рассматриваемого интервала, то задача называется *краевой*. Существуют и другие типы задач интегрирования уравнений, но мы в данной работе ограничимся задачей Коши и простейшими краевыми задачами, которые будут рассмотрены в § 114. При этом необходимо подчеркнуть, что метод степенных рядов применим как к линейным дифференциальным уравнениям, так и к очень широкому классу нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, что делает его незаменимым при изучении очень большого числа самых разнообразных технических задач.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения ν-го порядка, разрешенного относительно старшей производной:

$$y^{(\nu)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}); \tag{IX.104}$$

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ y''(x_0) = y_0'';\ \ldots;\ y^{(\nu-1)}(x_0) = y_0^{(\nu-1)}. \tag{IX.105}$$

Будем искать формальное решение задачи (IX.104) — (IX.105) в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{IX.106}$$

так что в каждом конкретном случае необходимо дополнительно исследовать, может ли данная задача Коши быть решена при помощи ряда (IX.106).

Обозначим k-ю степень ряда (IX.106) соответственно

$$y^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} (x - x_0)^n; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{IX.107}$$

и выведем рекуррентную формулу для вычисления введенных коэффициентов $a_n^{(k)}$.

Так как для произвольного $k = l + m$ имеет место тождество

$$y^k = y^{l+m} = y^l \cdot y^m,$$

то, воспользовавшись формулой Коши для умножения степеных рядов (VIII.65) § 99, непосредственно получаем искомую рекуррентную формулу

$$a_n^{(l+m)} = a_0^{(l)} a_n^{(m)} + a_1^{(l)} a_{n-1}^{(m)} + \cdots + a_n^{(l)} a_0^{(m)}, \tag{IX.108}$$

где

$$l = 1, 2, 3, \ldots; \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

В частности, при $k = 1$ ряд (IX.107) тождественно совпадает с рядом (IX.106), так что

$$a_n^{(1)} \equiv a_n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.109}$$

и тогда при помощи формулы (IX.108) легко определить коэффициенты $a_n^{(k)}$ для произвольной целой степени ряда y^k через коэффициенты a_n исходного ряда (IX.106).

Для удобства выкладок представим производные y', y'', ... в виде таких рядов:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1} (x - x_0)^n, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2} (x - x_0)^n, \ldots, \tag{IX.110}$$

где введены обозначения*

$$\dot{a}_{n+1} = (n+1) a_{n+1}; \quad \ddot{a}_{n+2} = (n+1)(n+2) a_{n+2}; \ldots. \tag{IX.111}$$

В таком случае и все степени от производных y', y'', ... легко выразить рядами

$$(y')^k = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1}^{(k)} (x - x_0)^n, \quad (y'')^k = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2}^{(k)} (x - x_0)^n, \ldots, \tag{IX.112}$$

коэффициенты которых

$$\dot{a}_{n+1}^{(k)}, \quad \ddot{a}_{n+2}^{(k)}, \quad \dddot{a}_{n+3}^{(k)}, \ldots$$

определим при помощи формулы (IX.108), если в этой формуле a_n заменим соответственно на $\dot{a}_{n+1}$, $\ddot{a}_{n+2}$, $\dddot{a}_{n+3}$, ...

Если мы подставим ряды (IX.106), (IX.107), (IX.112) в исходное уравнение

---

* Эти обозначения легко запоминаются, так как число точек над коэффициентом a_n и сдвиг в его индексе равны порядку производной, т. е. согласно обозначениям (IX.111) в случае первой производной над a ставим одну точку и к индексу n добавляем единицу, в случае третьей производной — ставим три точки и к индексу добавляем число три:

$$y''' = \sum_{n=0}^{\infty} \dddot{a}_{n+3} (x - x_0)^n \text{ и т. д.}$$

(IX.104) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$, то после соответствующих упрощений получим рекуррентную формулу вида

$$a_{n+\nu} = F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n+\nu-1}); \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.113}$$

где функция F полностью определяется заданной функцией $f(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)})$, а первые ν коэффициентов согласно начальным условиям (IX.105) будут такими:

$$a_0 = y_0; \quad a_1 = \frac{y_0'}{1!}; \quad a_2 = \frac{y_0''}{2!}; \quad \ldots; \quad a_{\nu-1} = \frac{y_0^{(\nu-1)}}{(\nu-1)!}. \tag{IX.114}$$

В том случае, когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+p}},$$

радиус сходимости ряда (IX.106) можно определить численно, если в соответствии с признаком Даламбера (VIII.10) вычислить достаточное количество членов последовательности

$$R_n^p = \frac{a_n}{a_{n+p}}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{IX.115}$$

до такого значения n включительно, начиная с которого будет иметь место равенство

$$\frac{a_n}{a_{n+p}} = \frac{a_{n+p}}{a_{n+2p}} = \frac{a_{n+2p}}{a_{n+3p}} = \ldots = \text{const} = R^p \tag{IX.116}$$

с необходимой для данной задачи точностью.

В отдельных частных случаях радиус сходимости ряда (IX.106) можно найти, исходя из самой рекуррентной формулы (IX.113).

Рассматриваемый метод позволяет также построить аналитическое продолжение ряда (IX.106) и выявить особые точки найденного решения. Для этого в любой точке x_1, где $|x_1 - x_0| < R$, вычисляем при помощи ряда (IX.106) новые начальные значения

$$y^{(j)}(x_1) = y_1^{(j)}; \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{IX.117}$$

и, подставив их в перестроенную соответствующим образом рекуррентную формулу (IX.113), находим коэффициенты a_n^* нового ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x - x_1)^n, \tag{IX.118}$$

который согласно известной теореме об аналитическом продолжении решений дифференциального уравнения [26; 125, т. III, ч. 2] и есть аналитическое продолжение ряда (IX.106).

Особые точки решения находим как точки пересечения двух или трех окружностей сходимости соответствующих аналитических продолжений. Если найденная особая точка есть полюс, то его легко выделить, перестроив соответствующим образом ряд (IX.106), на чем мы остановимся в § 111.

Излагаемый метод остается справедливым и в комплексной области. Все эти вопросы лучше всего изложить при рассмотрении примеров, к чему мы и переходим.

Пример 1. Решить задачу Коши с шестью десятичными знаками на сегменте $[-1; +1]$ для нелинейного неоднородного уравнения

$$y' = y^3 - y^2 + \frac{1}{5} e^x \tag{IX.119}$$

при таких начальных условиях:

$$x_0 = 0; \quad y(0) = \frac{1}{2}. \tag{IX.120}$$

Решение. Подставив в исходное уравнение (IX.119) ряды (IX.106), (IX.107), (IX.110) при $x_0 = 0$, $k = 2$, $k = 3$ и сравнив затем коэффициенты при x^n, имеем

$$\dot{a}_{n+1} = a_n^{(3)} - a_n^{(2)} + \gamma_n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.121}$$

где γ_n есть коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции

$$f(x) = \frac{1}{5} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n = \frac{1}{5}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right), \text{ т. е. } \gamma_n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Воспользовавшись известным соотношением для факториала $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, мы можем получить более удобную рекуррентную формулу

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n!}\right) = \frac{\gamma_n}{n+1}; \quad \gamma_0 = \frac{1}{5}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.122}$$

которая вычисление очередного коэффициента γ_{n+1} сводит к делению на его номер $n+1$ предыдущего коэффициента γ_n.

Согласно начальным условиям (IX.120) $a_0 = y(0) = 0{,}5$, так что, подставив при $n = 0$ это значение в формулу (IX.121), которая является рекуррентной формулой (IX.113) для уравнения (IX.119), находим $\dot{a}_1$, что позволяет затем продолжить вычисления при $n = 1$ и т. д.

Действительно, по известному коэффициенту $\dot{a}_{n+1}$ согласно первой из формул (IX.111) находим коэффициент без точки

$$a_{n+1} = \frac{\dot{a}_{n+1}}{n+1} \tag{IX.123}$$

и тем самым получаем необходимую величину для продолжения вычислений по формуле (IX.121).

Коэффициенты $a_n^{(2)}$ и $a_n^{(3)}$ вычисляем по формуле (IX.108), в которой надо вначале положить $l = m = 1$, а затем $l = 1$, $m = 2$, в результате чего получим

$$a_n^{(2)} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0; \tag{IX.124}$$

$$a_n^{(3)} = a_0 a_n^{(2)} + a_1 a_{n-1}^{(2)} + a_2 a_{n-2}^{(2)} + \cdots + a_n a_0^{(2)}, \tag{IX.125}$$

где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Все вычисления (с тремя запасными знаками) приведены в табл. 89, и окончательным решением будет ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{IX.126}$$

Согласно (IX.116) радиус сходимости полученного ряда

$$R \approx 2{,}2,$$

так что при $n = 15$ заданная точность для $|x| \leqslant 1$ будет достигнута.

Методика вычислений табл. 89 очень проста. Прежде всего по формуле (IX.122) вычисляем всю колонку γ_n. Этот процесс выполняется практически со скоростью записи результатов, так как нам надо только очередное γ_n перенести

Таблица 89

$$y' = y^3 - y^2 + \frac{1}{5}e^x;\quad x_0 = 0;\quad y(0) = \frac{1}{2};\quad \frac{1}{5}e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

$$\dot{a}_{n+1} = a_n^{(3)} - a_n^{(2)} + \gamma_n;\quad a_{n+1} = \frac{\dot{a}_{n+1}}{n+1};\quad \gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{n+1};\quad \gamma_0 = \frac{1}{5}$$

n	a_n	$a_n^{(2)}$	$a_n^{(3)}$	γ_n	$\dot{a}_{n+1}$	$R_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$
0	0,500000000	0,250000000	0,125000000	0,200000000	0,075000000	6,66667
1	0,075000000	0,075000000	0,056250000	0,200000000	0,181250000	0,82759
2	0,090625000	0,096250000	0,076406250	0,100000000	0,080156250	3,39181
3	0,026718750	0,040312500	0,040851563	0,033333333	0,033872396	3,15522
4	0,008468099	0,020688802	0,026211426	0,008333333	0,013855957	3,05576
5	0,002771191	0,008884180	0,013546655	0,001666667	0,006329143	2,62708
6	0,001054857	0,003719270	0,006764579	0,000277778	0,003323087	2,22203
7	0,000474727	0,001587748	0,003236620	0,000039683	0,001688556	2,24915
8	0,000211070	0,000693266	0,001516957	0,000004960	0,000828652	2,2924
9	0,000092072	0,000313080	0,000711428	0,000000551	0,000398900	2,3081
10	0,000039890	0,000142870	0,000334435	0,000000055	0,000191620	2,2899
11	0,000017420	0,000065257	0,000157902	0,000000005	0,000092650	2,2562
12	0,000007721	0,000029803	0,000074674	0,000000000	0,000044872	2,237
13	0,000003452	0,000013630	0,000035301	—	0,000021671	2,230
14	0,000001548	0,000006252	0,000016675	—	0,000010422	2,227
15	0,000000695	—	—	—	—	—

в установочный счетчик арифмометра и разделить затем его на $n+1$, после чего весь цикл повторяется.

Далее, по известному $a_0 = 0{,}5$ согласно (IX.124) и (IX.125) вычисляем $a_0^{(2)} = a_0 a_0 = 0{,}25$; $a_0^{(3)} = a_0 a_0^{(2)} = 0{,}125$ и, подставив эти данные (вместе с γ_0) в формулы (IX.121) и (IX.123), находим

$$\dot{a}_1 = a_0^{(3)} - a_0^{(2)} + \gamma_0 = 0{,}075 \text{ и } a_1 = \frac{\dot{a}_1}{1} = 0{,}075.$$

Найденное a_1 позволяет весь цикл вычислений повторить при $n = 1$, а затем, продолжая этот процесс, определить любое количество коэффициентов a_n искомого ряда (IX.126).

Для удобства ориентировки каждый из сомножителей, который используется в данный момент, отмечаем какими-либо марками, как уже отмечалось в главе VIII. Столбец $a_n^{(2)}$ вычисляем, умножив столбец a_n сам на себя. Например,

$$a_2^{(2)} = 0{,}500000000 \cdot 0{,}090625000 + (0{,}075000000)^2 + 0{,}090625000 \cdot 0{,}500000000 = 0{,}096250000;$$

$$a_2^{(3)} = 0{,}500000000 \cdot 0{,}096250000 + 0{,}075000000 \cdot 0{,}075000000 + 0{,}090625000 \cdot 0{,}250000000 = 0{,}076406250.$$

Процесс вычисления $a_2^{(3)}$ по формуле (IX.125) для большей наглядности показан также на рис. 236.

Ход дальнейших вычислений ясен из табл. 89, в которой все величины, необходимые для определения очередного a_{n+1}, размещены в одной строке.

Воспользовавшись найденными коэффициентами a_n, при помощи ряда (IX.126) легко вычислить любое количество точек интегральной кривой на заданном сегменте $[-1; +1]$. Полученные результаты можно также распространить и за пределы исходного сегмента, к чему мы еще вернемся в дальнейшем. На рис. 237 сплошной линией представлен график искомой функции $y = y(x)$ и пунктирной — график ее производной $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$.

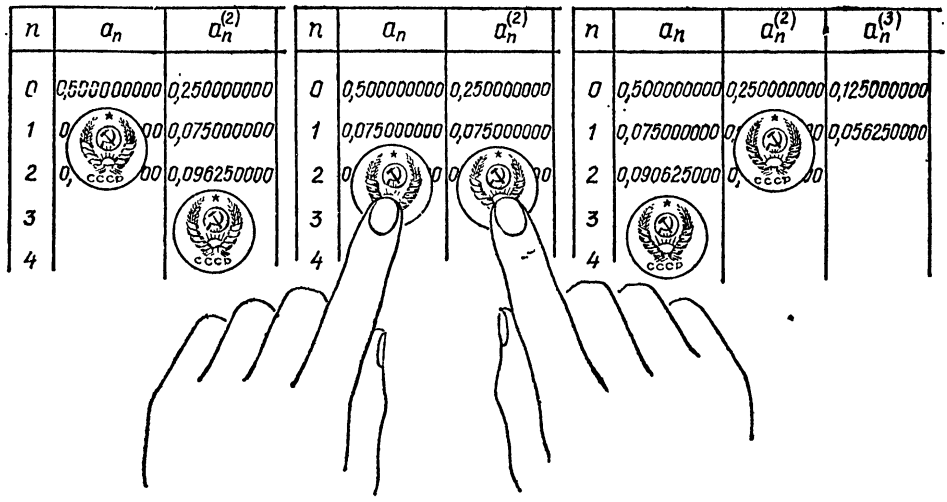


Рис. 236.

Упражнение 1. Продублировать табл. 89, выполняя вычисления с четырьмя десятичными знаками, а затем вычислить $y(x)$ и $y'(x)$ при $x = \pm 1$ и $x = \pm 0{,}5$.

Повышение порядка уравнения не приводит к каким-либо принципиальным трудностям и, например, для уравнения

$$y'' = y^3 - y^2 + \frac{1}{5} e^x$$

вместо рекуррентных формул (IX.121) и (IX.123) имеем:

$$\ddot{a}_{n+2} = a_n^{(3)} - a_n^{(2)} + \gamma_n; \quad a_{n+2} = \frac{\ddot{a}_{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

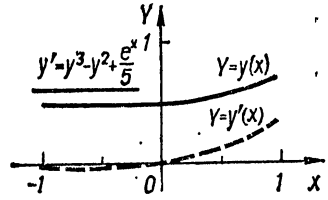


Рис. 237.

Пример 2. Решить с шестью десятичными знаками на сегменте $[-1; +1]$ задачу Коши для нелинейного уравнения третьего порядка

$$5y''' = 2y' + y^3 - f(x); \quad f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sh} x \tag{IX.127}$$

при следующих начальных условиях:

$$x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1; \quad y''(0) = \frac{1}{2}. \tag{IX.128}$$

Р е ш е н и е. Подставив в исходное уравнение (IX.127) ряды (IX.106), (IX.107), (IX.110) при $x_0 = 0$, $k = 3$, в результате сравнения коэффициентов при x^n имеем

$$5\dddot{a}_{n+3} = 2\dot{a}_{n+1} + a_n^{(3)} - \gamma_n, \qquad \text{(IX.129)}$$

где γ_n есть коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции

$$f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sh} x = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\right),$$

и в данном случае

$$\gamma_{2\nu} = \frac{1}{(2\nu+1)!}; \quad \gamma_{2\nu+1} = 0; \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Заменив в соответствии с формулой (IX.111)

$$\dddot{a}_{n+3} = (n+1)(n+2)(n+3)\, a_{n+3}$$

и учтя, что согласно начальным условиям (IX.128)

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{4},$$

находим из (IX.129) рекуррентную формулу (IX.113) для уравнения (IX.127):

$$a_{n+3} = \frac{2\dot{a}_{n+1} + a_n^{(3)} - \gamma_n}{5(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad a_0 = a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \qquad \text{(IX.130)}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Коэффициенты $\dot{a}_{n+1}$ вычисляем по формуле (IX.111), а коэффициенты $a_n^{(3)}$ — по формулам (IX.125) и (IX.124).

Таблица 90

$5y''' = 2y' + y^3 - \frac{1}{x}\operatorname{sh} x$; $a_{n+3} = \frac{2\dot{a}_{n+1} + a_n^{(3)} - \gamma_n}{5N_n}$; $N_n = (n+1)(n+2)(n+3)$

n	a_n	$a_n^{(2)}$	$a_n^{(3)}$	$\dot{a}_{n+1}$	γ_n	$5N_n$	$\frac{a_n}{a_{n+1}}$
0	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	1,00000000	30	1,0000
1	1,00000000	2,00000000	3,00000000	0,50000000	0	120	4,0000
2	0,25000000	1,50000000	3,75000000	0,20000000	0,16666667	300	3,7500
3	0,06666667	0,63333333	2,70000000	0,13333333	0	600	2,0000
4	0,03333333	0,26250000	1,43750000	0,06638890	0,00833333	1050	2,5105
5	0,01327778	0,12655556	0,72733333	0,02966664	0	1680	2,6854
6	0,00494444	0,05755556	0,37345834	0,01041299	0,00019841	2520	3,3838
7	0,00148757	0,02394736	0,18304604	0,00374600	0	3600	3,1769
8	0,00046825	0,00926534	0,08405794	0,00140742	0,00000276	4950	2,9943
9	0,00015638	0,00353749	0,03678636	0,00052930	0	6600	2,954
10	0,00005293	0,00135702	0,01571434	0,00019305	0,00000003	8580	3,016
11	0,00001755	0,00051206	0,00660437	0,00006876	0	10920	3,061
12	0,00000573	0,00018904	0,00271802	0,00002444	0,00000000	13650	3,056
13	0,00000188						3,039
14	0,00000062						3,046
15	0,00000020						

Все вычисления (с двумя запасными знаками) приведены в табл. 90 и окончательным решением, как и в примере 1, будет ряд (IX.126):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Согласно (IX.116) радиус сходимости полученного ряда

$$R \approx 3{,}0,$$

так что при $n = 15$ заданная точность для $|x| \leqslant 1$ будет обеспечена.

График искомой функции $y = y(x)$ и ее производной $y'(x)$ представлен на рис. 238.

Для того чтобы точнее определить радиус сходимости R, вычисления надо вести с большим числом значащих цифр, и если мы это выполним, то получим, например,

$$a_{12} = 5{,}7341 \cdot 10^{-6}; \quad a_{13} = 1{,}8765 \cdot 10^{-6}; \quad a_{14} = 0{,}61740 \cdot 10^{-6};$$
$$a_{15} = 0{,}20270 \cdot 10^{-6},$$

по которым в табл. 90 и были найдены соответствующие $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$.

Упражнение 2. Продублировать табл. 90, выполняя вычисления с шестью десятичными знаками.

В случае линейных уравнений при помощи рядов можно решать не только задачу Коши, но и находить общее решение. Кроме того, в этом случае существенно упрощаются все расчетные формулы. Поэтому метод степенных рядов позволяет весьма эффективно решать линейные уравнения любого порядка с переменными коэффициентами, а этот вопрос до настоящего времени остается открытым и представляет большой научный и практический интерес.

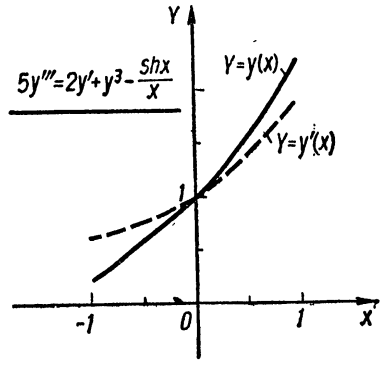


Рис. 238.

Пример 3. Построить общее решение для однородного линейного уравнения второго порядка:

$$y'' = -x^2 y. \qquad \text{(IX.131)}$$

Решение. Будем решение уравнения (IX.131) искать в виде ряда с центром $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{(IX.132)}$$

а производную y'', в соответствии с обозначениями (IX.111), представим рядом

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2} x^n, \quad \text{где } \ddot{a}_{n+2} = (n+1)(n+2) a_{n+2}. \qquad \text{(IX.133)}$$

Подставив ряды (IX.132) и (IX.133) в исходное уравнение (IX.131), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2} x^n = -x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = -\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x^n, получаем

$$\ddot{a}_{n+2} = -a_{n-2}. \tag{IX.134}$$

Отсюда, заменяя $\ddot{a}_{n+2}$ его истинным значением $(n+1)(n+2)\,a_{n+2}$, находим рекуррентную формулу (IX.113) для уравнения (IX.131):

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)}; \quad a_{-2} = a_{-1} \equiv 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.135}$$

которая и решает поставленную задачу, так как с ее помощью можно все последующие коэффициенты a_2, a_3, a_4, ... ряда (IX.132) выразить через два его первых коэффициента

$$a_0 = y(x_0) \text{ и } a_1 = y'(x_0).$$

Рассмотрим два *основных*, или *фундаментальных*, *решения* $y_1(x)$ и $y_0(x)$, которые определим следующими начальными данными (причем, воспользовавшись заменой $x^* = x - x_0$, всегда можно положить $x_0 = 0$).

Для первого фундаментального решения $y = y_1(x)$:

$$y(0) = +1; \quad y'(0) = 0. \tag{IX.136}$$

Для второго фундаментального решения $y = y_0(x)$:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = +1. \tag{IX.137}$$

В таком случае общим решением уравнения (IX.131) будет

$$y(x) = Ay_1(x) + By_0(x), \tag{IX.138}$$

поскольку $y(0) = A$, $y'(0) = B$.

Подставив начальные значения (IX.136) и (IX.137) в рекуррентную формулу (IX.135), получаем для искомых фундаментальных решений всюду сходящиеся ряды*:

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots, \tag{IX.139}$$

$$y_1(-x) = +y_1(x);$$

$$y_0(x) = x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots, \tag{IX.140}$$

$$y_0(-x) = -y_0(x).$$

Радиус сходимости этих рядов $R = \infty$, так как из рекуррентной формулы (IX.135) непосредственно получаем

$$R^4 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-2}}{a_{n+2}}\right| = (n+1)(n+2) = \infty.$$

Продифференцировав (IX.139) и (IX.140), получаем ряды для производных рассматриваемых функций $y = y_1(x)$ и $y = y_0(x)$:

$$y_1'(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 7} - \frac{x^{11}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11} + \cdots, \tag{IX.141}$$

$$y_1'(-x) = -y_1'(x);$$

$$y_0'(x) = 1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4\cdot 5\cdot 8} - \frac{x^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12} + \cdots, \tag{IX.142}$$

$$y_0'(-x) = +y_0'(x).$$

* В формуле (IX.135) мы должны положить $a_{-2} = a_{-1} = 0$, так как ряд (IX.132) есть степенной ряд, а не ряд Лорана, и поэтому все его коэффициенты с отрицательными индексами должны тождественно равняться нулю.

На рис. 239 построены графики функций $y_1(x)$, $y_0(x)$ и их первых производных $y_1'(x)$, $y_0'(x)$. Точки перегиба для этих функций совпадают с их нулями, так как если $y(x_n) = 0$, то согласно уравнению (IX.131) и $y''(x_n) = 0$. Пользуясь тем фактом, что функции $y_1(x)$ и $y_0'(x)$ четные, а функции $y_0(x)$ и $y_1'(x)$ нечетные, построенные графики можно распространить и на отрицательную полуось.

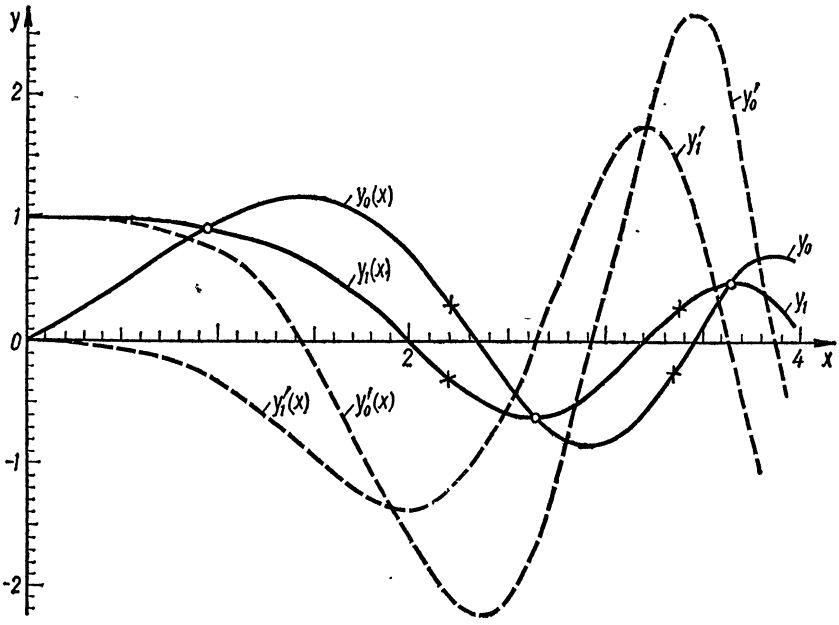


Рис. 239.

Полученные результаты легко распространить на линейное неоднородное уравнение ν-го порядка:

$$w^{(\nu)} + \varphi_\nu(z)\, w^{(\nu-1)} + \cdots + \varphi_3(z)\, w'' + \varphi_2(z)\, w' + \varphi_1(z)\, w + \varphi_0(z) = 0, \quad \text{(IX.143)}$$

в котором $w = w(z)$ и все заданные $\varphi_j(z)$ — аналитические функции комплексного переменного $z = x + iy$, что более подробно изложено в Украинском математическом журнале, т. 21, № 2, 1969, стр. 220—237, где приведена и дальнейшая литература по этому вопросу.

Упражнения

3. Вычислить с тремя десятичными знаками значения функций $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_0(x)$, $y_0'(x)$ в точках $x = \pm 0{,}5$ и $x = \pm 1$.

4. Проверить при помощи дифференцирования, что ряды (IX.139) и (IX.140) действительно удовлетворяют уравнению (IX.131).

§ 111. Выделение из решений особенностей

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$\frac{a_0}{1-q(x-x_0)} = a_0\{1+q(x-x_0)+q^2(x-x_0)^2+\dots\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad \text{(IX.144)}$$

которую можно полностью определить, задав a_0 и отношение последующего коэффициента к предыдущему:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad \text{(IX.145)}$$

так как в данном случае

$$a_n = a_0 q^n.$$

Величина q может быть как положительной, так и отрицательной (а в общем случае и комплексной).

При решении дифференциальных уравнений мы часто получаем ряды

$$y = \sum a_n(x-x_0)^n, \qquad \text{(IX.146)}$$

для которых условие (IX.145) выполняется лишь асимптотически:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = \text{const}, \qquad \text{(IX.147)}$$

т. е. для достаточно больших n отношение (IX.145) сохраняет постоянное значение в пределах требуемой точности.

В этом случае из ряда (IX.146) можно выделить геометрическую прогрессию (IX.144), преобразовав его в новый степенной ряд $\sum b_n(x-x_0)^n$, коэффициенты которого будут определяться формулой

$$b_{n+1} = a_n q - a_{n+1}.$$

Отсюда

$$a_{n+1} = a_n q - b_{n+1},$$

и тогда имеем

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0,\\
a_1 &= a_0 q - b_1,\\
a_2 &= a_1 q - b_2 = a_0 q^2 - b_1 q - b_2,\\
a_3 &= a_2 q - b_3 = a_0 q^3 - b_1 q^2 - b_2 q - b_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_n &= a_{n-1} q - b_n = a_0 q^n - b_1 q^{n-1} - b_2 q^{n-2} - b_3 q^{n-3} - \dots - b_n.
\end{aligned}$$

Умножив каждое из рассматриваемых равенств на $(x-x_0)^\nu$; $\nu = 0, 1, 2, \dots$ и сложив результаты, получим

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x-x_0)^\nu = a_0 \sum_{\nu=0}^{n} q^\nu (x-x_0)^\nu - b_1 (x-x_0) \sum_{\nu=0}^{n-1} q^\nu (x-x_0)^\nu - b_2 (x-x_0)^2 \sum_{\nu=0}^{n-2} q^\nu (x-x_0)^\nu - \dots .$$

Из этого равенства при $n \to \infty$, учтя, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu} (x - x_0)^{\nu} = \frac{1}{1 - q(x - x_0)},$$

мы и приходим к искомой формуле

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (x - x_0)^{\nu} = \frac{1}{1 - q(x - x_0)} \left\{ a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} (x - x_0)^{\nu} \right\}, \qquad \text{(IX.148)}$$

где, как уже было ранее определено,

$$b_{\nu+1} = a_{\nu} q - a_{\nu+1}. \qquad \text{(IX.149)}$$

Таким образом, формула (IX.148) позволяет из решения (IX.146), для которого выполняется условие (IX.147), выделить геометрическую прогрессию со знаменателем q и тем самым для этого решения одновременно определить полюс (простой), так как при $q(x - x_0) = 1$, т. е. при

$$x = \frac{1}{q} + x_0, \qquad \text{(IX.150)}$$

правая часть равенства (IX.148) обращается в бесконечность.

Если коэффициенты ряда $\sum b_{\nu} (x - x_0)^{\nu}$ будут удовлетворять соотношению (IX.147), то из этого ряда также можно выделить новую геометрическую прогрессию со знаменателем q^* и продолжить этот процесс до тех пор, пока все полюсы исследуемого решения (IX.146) не будут выделены. В частности, может оказаться, что $q^* = q$, тогда выделенный полюс будет кратным.

Радиус сходимости ряда (IX.146) согласно формуле (VIII.23) § 95 будет определяться равенством

$$R = \left| \frac{1}{q} \right|, \qquad \text{(IX.151)}$$

поскольку окружность круга сходимости должна проходить через первую особую точку решения (IX.146).

Если на окружности R не лежат другие особые точки решения (IX.146), а в противном случае их надо предварительно выделить, то радиус сходимости ряда $\sum b_{\nu} (x - x_0)^{\nu}$ будет определяться следующей, более удаленной от x_0, особой точкой, и поэтому формула (IX.148) позволяет вести вычисления за пределами первой особой точки. Этот факт имеет принципиальное значение, так как он позволяет при помощи аналитического продолжения распространить решение, полученное в виде ряда (IX.146), на любой интервал, на котором нет существенно особых точек. Исследование решения в окрестности существенно особой точки рассмотрено в [148, § 49].

В частном случае, если ряд (IX.146) имеет только нечетные или только четные степени, формулы (IX.148) — (IX.149) принимают следующий вид:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu+1} (x - x_0)^{2\nu+1} = \frac{x - x_0}{1 - q^2 (x - x_0)^2} \left\{ a_1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu+1} (x - x_0)^{2\nu} \right\}, \qquad \text{(IX.152)}$$

где

$$a_{2\nu} = 0; \quad q^2 = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_{2\nu+3}}{a_{2\nu+1}}; \quad b_{2\nu+3} = a_{2\nu+1} q^2 - a_{2\nu+3},$$

и соответственно

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu}(x-x_0)^{2\nu} = \frac{1}{1-q^2(x-x_0)^2}\left\{a_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu}(x-x_0)^{2\nu}\right\}, \qquad \text{(IX.153)}$$

где

$$a_{2\nu+1} = 0; \quad q^2 = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_{2\nu+2}}{a_{2\nu}}; \quad b_{2\nu+2} = a_{2\nu}q^2 - a_{2\nu+2}.$$

Пример 1. Решить следующую задачу Коши:

$$y' = 1 - y^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 0 \qquad \text{(IX.154)}$$

и из полученного ряда выделить первые два полюса.

Решение. Так как $x_0 = 0$, то решение ищем в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad \text{(IX.155)}$$

коэффициенты которого согласно (IX.154) определяются рекуррентной формулой

$$a_{n+1} = -\frac{a_n^{(2)} - \gamma_n}{n+1}; \quad \gamma_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 0, \\ 0 \text{ при } n \neq 0. \end{cases} \qquad \text{(IX.156)}$$

Отсюда, учтя начальное условие $y_0 = 0$, находим, что

$$a_0 = 0; \quad \gamma_0 = 1; \quad a_1 = +1;$$

а тогда, полагая $n = 2\nu$ в формуле (IX.155), имеем

$$a_{2\nu} = 0; \quad a_{2\nu+3} = -\frac{a_{2\nu+1}^{(2)}}{2\nu+3}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{(IX.157)}$$

где величины $a_{2\nu+1}^{(2)}$ вычисляются, как обычно, по формуле (IX.124).

В табл. 91 определены с девятью значащими цифрами первые 20 коэффициентов a_n до a_{19} включительно, а затем по найденным $a_n = a_{2\nu+1}$ вычислены соответствующие им

$$q_{2\nu+1}^2 = \frac{a_{2\nu+3}}{a_{2\nu+1}}.$$

Анализируя полученные данные, видим, что величины $q_{2\nu+1}^2$ с ростом $n = 2\nu + 1$ монотонно и очень быстро стремятся к пределу, следовательно, условие (IX.147) для ряда (IX.155) выполняется с девятью значащими цифрами уже при $n = 2\nu + 1 = 17$. Поэтому, приняв приближенно, что с этой же точностью

$$q^2 = \lim_{\nu\to\infty} q_{2\nu+1}^2 = q_{17}^2 = -0{,}405284733,$$

мы можем найденное решение (IX.155) преобразовать согласно формуле (IX.152) и представить его в виде ряда

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu+1}x^{2\nu+1} = \frac{x}{1-q^2x^2}\left\{1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu+1}x^{2\nu}\right\}, \qquad \text{(IX.158)}$$

коэффициенты которого $b_{2\nu+1}$ вычислены в той же табл. 91.

Таблица 91

$$y' = 1 - y^2;\ a_{2\nu} = 0;\ a_{2\nu+3} = -\frac{a^{(2)}_{2\nu+1}}{2\nu+3};\ \nu = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_{2\nu+3} = a_{2\nu+1}q^2 - a_{2\nu+3};\ q^2 = q^2_{17};\ z = 2;\ 2i$$

$2\nu+1$	$a_{2\nu+1}$	$a^{(2)}_{2\nu+1}$	$q^2_{2\nu+1} = \frac{a_{2\nu+3}}{a_{2\nu+1}}$	$b_{2\nu+1}$	$z^{2\nu}$	2ν
1	+1,000000000	+1,0000000000	−0,333333333	—	+1	0
3	−0,333333333	−0,6666666667	−0,400000000	−0,071951400	±4	2
5	+0,133333333	+0,3777777778	−0,404761906	+0,001761578	+16	4
7	−0,539682540·10⁻¹	−0,1968253969	−0,405228757	−0,0000697103	±64	6
9	+0,218694885·10⁻¹	+0,0974955908	−0,405278593	+0,0000030209	+256	8
11	−0,886323553·10⁻²	−0,4669766444·10⁻¹	−0,405284054	−0,00000013428	±1024	10
13	+0,359212803·10⁻²	+0,2183751577·10⁻¹	−0,405284658	+0,00000000602	+4096	12
15	−0,145583438·10⁻²	−0,1003046647 10⁻¹	−0,405284727	−0,00000000027	±16384	14
17	+0,590027439·10⁻³	+0,4543453156·10⁻²	−0,405284733	+0,00000000001	+65536	16
19	−0,239129113·10⁻³			0,00000000000		

Разложив в формуле (IX.158) знаменатель на простые дроби

$$1 - q^2x^2 = (1 - qx)(1 + qx),$$

согласно формулам (IX.150) и (IX.151) определяем, что найденная функция $y(x)$ имеет по крайней мере два простых полюса

$$x = \pm\frac{1}{q} = \mp\, 1{,}5707963299i$$

и что радиус сходимости первоначального ряда (IX.155)

$$\vec{R} = \left|\frac{1}{q}\right| = 1{,}5707963299,$$

поскольку в данном примере

$$q = \sqrt{-0{,}405284733} = 0{,}6366197711i.$$

Уравнение (IX.154) есть уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, так что рассматриваемая задача Коши имеет точное аналитическое решение:

$$y = \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \frac{1382}{155925}x^{11} + \ldots$$

Радиус сходимости этого точного ряда

$$R = \frac{\pi}{2} = 1{,}57079632679\ldots,$$

следовательно, найденное нами при помощи степенных рядов приближенное значение $\vec{R}$ имеет девять верных цифр, а десятая отличается от истинной на три единицы, что обусловлено пределами точности вычислений табл. 91.

Полученные результаты остаются справедливыми и в комплексной области; записав уравнение (IX.154) и его решение (IX.155) в виде

$$w' = 1 - w^2;\quad z_0 = 0;\quad w(0) = 0; \qquad \text{(IX.154')}$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n;\quad w = u + iv;\quad z = x + iy \qquad \text{(IX.155')}$$

и применив к этому уравнению метод степенных рядов, мы совершенно аналогично придем к той же рекуррентной формуле (IX.156), а следовательно, и к тем же

значениям коэффициентов a_n и b_n, которые вычислены в табл. 91. Так как точное решение уравнения (IX.154′) есть

$$\frac{dw}{1-w^2} = dz; \quad z = \operatorname{arth} w; \quad w = \operatorname{th} z,$$

то, заменяя x на z в формуле (IX.158), получим

$$w = \operatorname{th} z = \frac{z}{1-q^2z^2}\left\{1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{2\nu+1} z^2\right\}; \quad b_{2\nu} = 0, \tag{IX.159}$$

где (с 14 десятичными знаками)

$$q^2 = -\frac{4}{\pi^2} = -0{,}40528473456935;$$

$$b_3 = q^2 + \frac{1}{3} = -0{,}07195140123602;$$

$$b_5 = -\frac{1}{3}q^2 - \frac{2}{15} = +0{,}00176157818978;$$

$$b_7 = -0{,}00006971064099;$$

$$b_9 = +0{,}00000302094854;$$

$$b_{11} = -0{,}00000013432664;$$

$$b_{13} = +0{,}00000000602259;$$

$$b_{15} = -0{,}0000000027079;$$

$$b_{17} = +0{,}0000000001219.$$

Формула (IX.159) очень удобна для вычисления значений функции $w = \operatorname{th} z$; так, например, положив $z = 1$ и $z = i$, находим соответственно (пользуясь коэффициентами $b_{2\nu+1}$, вычисленными в табл. 91 с целью их контроля):

$$\operatorname{th} 1 = \frac{1{,}0702566399}{1{,}405284733} = 0{,}7615941558,$$

$$\operatorname{th} i = \frac{0{,}9262141502}{0{,}594715267} = 1{,}557407724i,$$

так как точное значение при $z = 1$ будет

$$\operatorname{th} z = \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}} = \frac{0{,}864664716763387}{1{,}135335283236613} = 0{,}761594155955764,$$

а при $z = i$, поскольку $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$,

$$\operatorname{th} i = i \operatorname{tg} 1 = 1{,}55740772465i,$$

то результаты, полученные по формуле (IX.159), имеют ту же точность, с какой были вычислены коэффициенты $b_{2\nu+1}$. Поэтому, взяв $b_{2\nu+1}$ с 14 десятичными знаками, мы найдем более точные значения $\operatorname{th} 1$ и $\operatorname{th} i$, что читателю полезно выполнить в виде упражнения.

Если же воспользоваться исходным степенным рядом (IX.155′), то для $z = 1$ и $z = i$ по коэффициентам a_n, приведенным в табл. 91 (т. е. при $n = 19$), получим следующие результаты:

$$\operatorname{th} 1 = \sum_{\nu=0}^{9} a_{2\nu+1} = 0{,}761525191;$$

$$\operatorname{th} 1 = \sum_{\nu=0}^{9}{}' (-1)^{\nu} a_{2\nu+1} = 1{,}557244763,$$

в которых только первые четыре знака верные.

Аналогично при $z=2$ и $z=2i$, воспользовавшись значениями $z^{2\nu}$, приведенными в предпоследней колонке табл. 91, находим

$$\operatorname{th} 2=\frac{2\cdot 1{,}263425139}{2{,}621138932}=0{,}964027602;$$

$$\operatorname{th} 2i=i\operatorname{tg} 2=\frac{2i\cdot 0{,}678607168}{-0{,}621138932}=-2{,}1850415i,$$

а соответствующие им более точные значения:

$$\operatorname{th} 2=0{,}964027800758;\quad \operatorname{th} 2i=i\operatorname{tg} 2=-2{,}18503986326i.$$

Таким образом, и за пределами радиуса сходимости исходного ряда (IX.155′), когда им непосредственно пользоваться нельзя, мы получили по формуле (IX.159) достаточно точные результаты, точность которых при необходимости можно повысить, вычислив большее число коэффициентов $b_{2\nu+1}$ с большим числом значащих цифр.

Как будет показано в § 137, функция $\operatorname{th} z$ в комплексной области $z=x+iy$ имеет бесконечное количество простых полюсов

$$z=\pm\frac{k\pi}{2}i;\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

причем все они расположены на мнимой оси (рис. 240). Поэтому радиус сходимости исходного ряда (IX.155′) определяется первой парой полюсов $z=\pm\frac{\pi}{2}i$ и, следовательно,

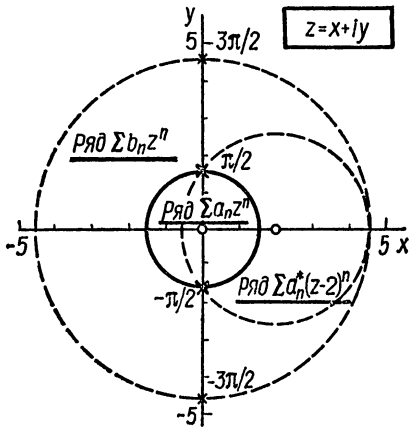


Рис. 240.

$R_1=\frac{\pi}{2}$, а радиус сходимости ряда (IX.159) $R_2=\frac{3\pi}{2}$, так что для коэффициентов $b_{2\nu+1}$ должно выполняться соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{b_{2\nu+1}}{b_{2\nu+3}}=-\frac{1}{R_2^2}=-\frac{4}{9\pi^2}=-0{,}045031637\ldots.$$

В таком случае из ряда (IX.159) мы снова можем выделить прогрессию со знаменателем

$$q^*=q_1^2=-\frac{4}{9\pi^2}$$

и получить ряд, сходящийся еще быстрее. Однако если воспользоваться непосредственно коэффициентами $b_{2\nu+1}$ из табл. 91, то из-за большой потери точности при их вычислении мы не получим надежных результатов, так что все вычисления в табл. 91 надо проводить со значительно большим числом значащих цифр. Этот же результат проще получить при помощи аналитического продолжения.

Для этого, воспользовавшись найденными согласно формуле (IX.159) результатами:

$$z_0=2;\quad w(z_0)=0{,}9640276,$$

надо решить исходную задачу Коши (IX.154′) в виде ряда $w=\sum a_n^*(z-z_0)^n$ при новых начальных условиях, что потребует лишь замены в рекуррентной формуле (IX.156) $a_0=0$ на $a_0^*=w(z_0)=0{,}9640276$.

Упражнение 1. Выполнить эти вычисления с семью значащими цифрами и результат проконтролировать при помощи точного значения

$$\operatorname{th} 4 = \frac{1-e^{-8}}{1+e^{-8}} = \frac{0{,}999664537}{1{,}00033546} = 0{,}99932930.$$

Рассмотрим биномиальный ряд с центром $x_0 = 0$

$$(1 \pm x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{IX.160}$$

коэффициенты которого определяются по рекуррентной формуле

$$b_{n+1} = \pm \frac{m-n}{n+1} b_n; \quad b_0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{IX.161}$$

Отсюда для биномиального ряда при любых m и n имеем

$$n \pm (n+1) \frac{b_{n+1}}{b_n} = m = \text{const}. \tag{IX.162}$$

Если соотношение (IX.162) выполняется для данного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad a_0 = 1 \tag{IX.163}$$

только асимптотически:

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \left[n \pm (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \right] = m = \text{const}, \tag{IX.164}$$

т. е. если, начиная с некоторого n, величины

$$m_n = n \pm (n+1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{IX.165}$$

с заданной точностью остаются постоянными, то из ряда (IX.163) можно при помощи деления выделить биномиальный ряд с показателем m и $a_0 = 1$.

Какой из двух возможных случаев будет иметь место, устанавливаем по характеру чередования знаков у заданного ряда.

Если при достаточно большом $n > m$ коэффициенты a_n будут знакопеременными, то ряд (IX.163) асимптотически стремится к ряду

$$(1+x)^m,$$

а если коэффициенты a_n знакопостоянны — то к ряду

$$(1-x)^m.$$

Знак показателя m определяется непосредственно по формуле (IX.165). Если показатель будет равен целому отрицательному числу

$$m = -n; \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

то таким путем мы можем выделить полюс, простой при $n = 1$ и кратный при $n \geqslant 2$.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y' = y + \frac{y}{2(1+x)}; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = 1 \tag{IX.166}$$

и из полученного ряда выделить биномиальный ряд.

Решение. Представив исходное дифференциальное уравнение в виде

$$2(y'-y)+2x(y'-y)=y, \tag{IX.167}$$

получаем для него следующую рекуррентную формулу:

$$2(a_{n+1}-a_n)+2(a_n-a_{n-1})=a_n. \tag{IX.168}$$

Действительно, учтя, что в данном примере $x_0=0$, согласно (IX.106) и (IX.110) имеем:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n;\quad y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n.$$

Тогда, подставив эти значения в исходное уравнение, получаем

$$2[(a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_{n+1}x^n+\cdots)-(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)]+$$
$$+2[(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots)-(a_0x+a_1x^2+a_2x^3+\cdots+a_{n-1}x^n+$$
$$+\cdots)]=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к следующим соотношениям:

$$2(a_1-a_0)=a_0,$$
$$2[(a_2-a_1)+(a_1-a_0)]=a_1,$$
$$2[(a_3-a_2)+(a_2-a_1)]=a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2[(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})]=a_n,$$

откуда и вытекает формула (IX.168).

Этот же результат проще получить, если воспользоваться тождеством

$$x^ky=x^k\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+k}=\sum_{n=k}^{\infty}a_{n-k}x^n, \tag{IX.169}$$

справедливым для любого целого (положительного или отрицательного) k. Отсюда непосредственно следует, что члены вида

$$x^ky;\quad x^ky';\quad x^ky'';\ \ldots,\ \text{где}\ k=\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots,$$

надо учитывать при помощи *сдвига в индексах* и вводить их в рекуррентную формулу (IX.113) для заданного дифференциального уравнения в виде коэффициентов

$$a_{n-k};\quad a_{n-k+1};\quad a_{n-k+2};\ \ldots.$$

В частности, при выводе формулы (IX.168) надо положить $k=+1$.

Заменив в (IX.168) $a_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$, $a_n=na_n$, находим

$$a_{n+1}=\frac{a_{n-1}-(n-1{,}5)a_n}{n+1};\quad a_0=+1;\quad a_1=-1{,}5;\quad n\geqslant 0, \tag{IX.170}$$

где первые два коэффициента, необходимые для того, чтобы начать рекуррентный процесс, определены из начального условия и самого исходного уравнения (IX.166)

$$a_0=y(0)=+1;\quad a_1=y'(0)=y(0)+\frac{y(0)}{2}=-1{,}5.$$

Первые 16 коэффициентов a_n, вычисленные по формуле (IX.170), приведены в табл. 92.

Таблица 92

$$y' = y + \frac{y}{2(1+x)}; \quad y(0) = 1; \quad a_{n+1} = \frac{a_{n-1} - (n-1{,}5)\,a_n}{n+1}; \quad a_0 = 1; \quad a_1 = 1{,}5$$

$$c_n = a_n - (b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_n c_0); \quad b_n = \frac{(1{,}5-n)}{n} b_{n-1}$$

n	$1{,}5-n$	a_n	b_n	c_n	m_n
0	—	+1,00000000000	+1,00000000000	1,000000000	+1,500000
1	+0,5	+1,50000000000	+0,50000000000	1,000000000	+2,166667
2	−0,5	+0,87500000000	−0,12500000000	0,500000000	+3,214286
3	−1,5	+0,35416666667	+0,62500000000·10⁻¹	0,166666667	+3,970588
4	−2,5	+0,85937500000·10⁻¹	−0,39062500000 10⁻¹	0,416666667·10⁻¹	+5,621212
5	−3,5	+0,27864583333·10⁻¹	+0,27343750000·10⁻¹	0,833333333·10⁻²	+4,584112
6	−4,5	−0,19314236111·10⁻²	−0,20507812500·10⁻¹	0,188888889·10⁻²	+4,107303
7	−5,5	+0,52222842262·10⁻²	+0,16113281250 10⁻¹	0,19841271·10⁻³	+1,130157
8	−6,5	−0,38317483569 10⁻³	−0,13092041016·10⁻¹	0,2480158·10⁻⁴	+0,137101
9	−7,5	+0,33476_76162 10⁻³		0,27557·10⁻⁵	+0,355384
10	−8,5	−0,28938955478 10⁻²		0,2755 10⁻⁶	+0,343210
11	−9,5	+0,25405217975·10⁻²			+0,360905
12	−10,5	−0,22524043853 10⁻²			+0,372084
13	−11,5	+0,20146744495 10⁻³			+0,382001
14	−12,5	−0,18157971825·10⁻³			+0,390474
15	−13,5	+0,16474759487·10⁻³			

В данном примере рекуррентная формула имеет очень простую структуру (что обусловлено линейностью исходного уравнения), поэтому предел (IX.164) можем определить не численно, а непосредственно из формулы (IX.170). В табл. 92 при $n \geqslant 5$ коэффициенты a_n знакочередующиеся, поэтому в формуле (IX.164) мы должны взять знак «плюс». В таком случае, учтя формулу (IX. 170) и воспользовавшись для раскрытия получающейся неопределенности правилом Лопиталя — Бернулли, имеем

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty}\left[n + (n+1)\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 + \frac{n+1}{n}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left\{1 + \dfrac{\dfrac{a_{n-1}}{a_n} - (n-1{,}5)}{n}\right\}'}{\left(\dfrac{1}{n}\right)'} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $m = \frac{1}{2}$, и в данном случае асимптотическим биномиальным рядом будет ряд

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n; \quad b_{n+1} = \frac{-(n-0{,}5)}{n+1} b_n; \quad b_0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

коэффициенты которого согласно формуле (IX.161) равны:

$$b_{n+1} = \frac{0{,}5-n}{n+1} b_n; \quad b_0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

или, что более удобно для вычислений в табл. 92,

$$b_n = \frac{1{,}5-n}{n} b_{n-1}; \quad b_0 = 1; \quad b_1 = \frac{1}{2}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ряд $\sum b_n x^n$ выделяем из данного ряда $\sum a_n x^n$ путем деления и в результате получаем ряд $\sum c_n x^n$, коэффициенты которого вычисляем по формуле (VIII.69) § 100, поменяв предварительно ролями величины a и c:

$$c_n = \left[\frac{a_n}{b_n}\right] = a_n - (b_1 c_{n-1} + b_2 c_{n-2} + \cdots + b_n c_0); \quad c_0 = \frac{a_0}{b_0}; \quad b_0 = 1.$$

Коэффициенты b_n и c_n приведены в той же табл. 92, причем в пределах точности вычислений

$$c_n = \frac{1}{n!}, \text{ так что } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = e^x.$$

Объединяя полученные результаты, находим искомое решение для задачи (IX.166):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right] = e^x \sqrt{1+x}. \qquad \text{(IX.171)}$$

Подставив этот результат в исходное уравнение и выполнив дифференцирование, убеждаемся, что решение (IX.171) удовлетворяет уравнению (IX.166).

Для того чтобы проиллюстрировать преимущества вычисления предела (IX.164) по самой рекуррентной формуле перед его определением численным путем, в табл. 92 приведены также соответствующие величины m_n, найденные по формуле (IX.165).

Упражнение 2. Продолжить вычисление коэффициентов a_n и соответствующих им m_n в табл. 92 до $n = 30$, выполняя их с шестью значащими цифрами.

Формулы (IX.160)—(IX.165) были получены в предположении, что $x_0 = 0$ и $a_0 = 1$. Оба этих ограничения легко устранить.

Если $a_0 \neq 1$, то, представив исходный ряд в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n^* (x - x_0)^n,$$

где введены новые коэффициенты

$$a_n^* = \frac{a_n}{a_0}, \quad a_0^* = 1,$$

мы приходим к случаю $a_0^* = 1$.

При $x_0 \neq 0$ все полученные формулы остаются теми же, что и при $x_0 = 0$, так как выбор центра ряда не влияет на структуру рекуррентной формулы для определения его коэффициентов. Переход от одного значения x_0 к другому может лишь повлиять на числовые значения коэффициентов a_n, что обусловлено переходом к новым начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ... и связанным с этим изменением первых коэффициентов $a_0, a_1, \ldots$ в соответствующей рекуррентной формуле. К этому вопросу мы еще вернемся в § 116.

В данном параграфе мы рассмотрели только вопрос о том, как выделить из решения геометрическую прогрессию и биномиальный ряд. Аналогичным путем из данного ряда можно выделить любой степенной ряд, коэффициенты которого определяются какой-либо достаточно простой рекуррентной формулой, например логарифмический ряд, гипергеометрический ряд и т. д.

Отметим также, что из (IX.148), (IX.149) при $q = 1$ получаем формулу Эйлера для преобразования медленно сходящегося ряда в ряд более быстро сходящийся:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} a_0 + \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n \Delta^n a_0, \tag{IX.172}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta a_0 &= a_1 - a_0, \\ \Delta^2 a_0 &= \Delta a_1 - \Delta a_0 = a_2 - 2a_1 + a_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^n a_k &= \Delta^{n-1} a_{k+1} - \Delta^{n-1} a_k. \end{aligned}$$

§ 112. Уравнение Риккати

Применим метод степенных рядов к решению уравнения Риккати (Jacopo Riccati, 1676—1754), которое относится к одному из простейших нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Как показал Лиувилль, общее дифференциальное уравнение Риккати

$$y' = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x), \tag{IX.173}$$

за исключением некоторых очень немногочисленных частных случаев, не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции.

Для четырех частных решений этого уравнения y_1, y_2, y_3, y_4 двойное отношение постоянно:

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C = \text{const}.$$

Поэтому если известны три частных решения y_1, y_2, y_3, то получаем общее решение:

$$y = \frac{y_2 (y_3 - y_1) + C y_1 (y_2 - y_3)}{(y_3 - y_1) + C (y_2 - y_3)} \tag{IX.174}$$

с произвольной постоянной C. Если известны лишь два решения y_1 и y_2, то будем иметь

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{1 + Ce^{\int P(x)(y_2 - y_1)\, dx}}. \tag{IX.175}$$

Располагая только одним известным частным решением y_1, при помощи подстановки

$$y = y_1 + \frac{1}{v} \tag{IX.176}$$

уравнение Риккати можно привести к линейному уравнению с переменными коэффициентами:

$$v' + [2P(x)\, y_1 + Q(x)]\, v + P(x) = 0. \tag{IX.177}$$

Подстановкой

$$y = -\frac{u'}{uP(x)} \tag{IX.178}$$

уравнение (IX.173) можно свести к однородному линейному уравнению второго порядка:

$$u'' - \left(\frac{P'}{P} + Q\right)u + PRu = 0, \tag{IX.179}$$

так что этот путь является наиболее эффективным.

Если положить

$$y = \frac{1}{z}, \tag{IX.180}$$

то для z получим снова уравнение Риккати

$$z' = -[R(x)z^2 + Q(x)z + P(x)], \tag{IX.181}$$

нули которого будут являться полюсами исходного уравнения (IX.173), и наоборот.

Заменой переменных

$$y = \frac{w}{P(x)} + \varphi(x) \tag{IX.182}$$

общее уравнение Риккати (IX.173) можно привести к канонической форме:

$$w' = w^2 + R^*(x), \tag{IX.183}$$

где

$$R^*(x) = P[P\varphi^2 + Q\varphi + R - \varphi'], \tag{IX.184}$$

а функция $\varphi(x)$ определяется из условия

$$P' + 2P^2\varphi + PQ = 0,$$

т. е.

$$\varphi(x) = -\frac{P(x)Q(x) + P'(x)}{2P^2(x)}. \tag{IX.185}$$

Пример 1. Решить задачу Коши для уравнения Риккати

$$y' = y^2 + x^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = +1, \tag{IX.186}$$

поле изоклин которого было построено на рис. 234.

Решение. Воспользовавшись результатами § 110, решение ищем в виде ряда $y = \sum a_n x^n$, коэффициенты которого определяются следующей рекуррентной формулой:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^{(2)} + \gamma_n}{n+1}; \quad a_0 = 1; \quad \gamma_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 2, \\ 0 \text{ при } n \neq 2. \end{cases} \tag{IX.187}$$

Все вычисления, которые обеспечивают девять верных знаков при определении первых 30 коэффициентов a_n, приведены в табл. 93. Так как для найденных коэффициентов a_n выполняется условие (IX.147) § 111, то в этой же таблице вычислены величины

$$R_n = \frac{1}{q_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}; \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{q_n}\right|$$

и соответствующие коэффициенты b_n ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{R}{R-x}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right\}, \tag{IX.188}$$

Таблица 93

$y' = y^2 + x^2$; $y(0) = 1$; $a_{n+1} = \dfrac{a_n^{(2)} + \gamma_n}{n+1}$; $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{R} - a_{n+1}$

n	a_n	$a_n^{(2)}$	γ_n	$R_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$	b_n
0	1,0000000000	1,0000000000	0	1,0000000000	—
1	1,0000000000	2,0000000000	0	1,0000000000	+0,0311291136
2	1,0000000000	3,0000000000	1	0,7500000000	+0,0311291136
3	1,3333333333	4,6666666667	0	1,1428571428	—0,3022042197
4	1,1666666667	6,0000000000	0	0,9722222223	+0,2081721514
5	1,2000000000	7,4000000000	0	0,9729729730	+0,0029839659
6	1,2333333333	8,9777777778	0	0,9616336634	+0,0040216030
7	1,2825396825	10,5428571429	0	0,9732008431	—0,0108137758
8	1,3178571429	12,2285713206	0	0,9699182329	+0,0046068630
9	1,3587301467	14,0071428331	0	0,9700266235	+0,0001507209
10	1,4007142833	15,8924867437	0	0,9695057397	+0,0003119285
11	1,4447715222	17,8753102113	0	0,9698997143	—0,0004542449
12	1,4896091843	19,9676767200	0	0,9698133472	+0,0001367947
13	1,5359751323	22,1727751351	0	0,9698223033	+0,0000042655
14	1,5837696525	24,4963400001	0	0,9697997655	+0,0000190242
15	1,6330893333	26,9427497512	0	0,9698130137	—0,0000183354
16	1,6839218595	29,5177951365	0	0,9698106338	+0,0000040971
17	1,7363408904	32,2270314413	0	0,9698111998	—0,0000000361
18	1,7903906356	35,0763676982	0	0,9698102828	+0,0000010076
19	1,8461246157	38,0718543473	0	0,9698107157	—0,0000007067
20	1,9035927174	41,2198475990	0	0,9698106469	+0,0000001211
21	1,9628498857	44,5269355071	0	0,9698106774	—0,0000000144
22	2,0239516140	47,9999755715	0	0,9698106419	+0,0000000487
23	2,0869554596	51,6460927048	0	0,9698106557	—0,0000000259
24	2,1519205294	55,4726977249	0	0,9698106535	+0,0000000037
25	2,2189079090	59,4874941163	0	0,9698106550	—0,0000000010
26	2,2879805429	63,6984904462	0	0,9698106537	+0,0000000024
27	2,3592033499	68,1140112399	0	0,9698106541	—0,0000000008
28	2,4326432586	72,7427093150	0	0,9698106540	+0,0000000003
29	2,5083692867				0,0000000000

где согласно формуле (IX.149)

$$b_{n+1} = \frac{a_n}{R} - a_{n+1}; \quad R = 0{,}969810654.$$

Таким образом, первая особая точка искомого решения есть полюс (простой $x = +R$, а ряд (IX.188), в котором этот полюс выделен, позволяет вести вычисления за его пределами. Вычислив при помощи ряда (IX.188) новое начальное значение $y(x_0) = y_0$ за пределами первой особой точки, аналогичным путем определяем вторую особую точку. Продолжая этот процесс, мы можем аналитически продолжить первоначальное решение на любой наперед заданный конечный интервал.

Упражнения

1. Продублировать с четырьмя десятичными знаками табл. 93 до $n = 12$ и вычислить затем значения искомой функции $y(x)$ в точках $x = \pm 0{,}25$ и $x = \pm 0{,}5$.

2. С той же точностью решить на сегменте $[-0{,}5;\ +0{,}5]$ задачу Коши для уравнения Риккати

$$y' = y^2 + \cos x; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = +1.$$

Указание. В соответствии с разложением в ряд (VIII.56) функции $f(x) = \cos x$ для коэффициентов γ_n в формуле (IX.187) надо взять следующие значения:

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2!}; \quad \gamma_4 = +\frac{1}{4!}; \quad \ldots; \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = \cdots = 0.$$

Пример 2. Построить общее решение для уравнения Риккати

$$y' = y^2 + x^2; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = y_0, \tag{IX.189}$$

сведя его к линейному однородному уравнению второго порядка.

Решение. Сравнив данное уравнение с уравнением (IX.173), видим, что в рассматриваемом примере $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, $R(x) = x^2$. В таком случае согласно формуле (IX.178) подстановка

$$y = -\frac{u'}{u}; \quad y' = \frac{u'^2 - uu''}{u^2} \tag{IX.190}$$

приводит уравнение (IX.189) к линейному уравнению второго порядка

$$u'' = -x^2 u, \tag{IX.191}$$

которое мы рассматривали в § 110.

Будем искать решение уравнения (IX.191) в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{IX.192}$$

Тогда, в соответствии с решением примера 3 § 110, для определения коэффициентов c_n имеем рекуррентную формулу

$$\ddot{c}_{n+2} = -c_{n-2}; \quad c_{n+2} = -\frac{c_{n-2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Отсюда, произведя сдвиг в индексах на две единицы, т. е. выполнив замену $n \to n+2$, получаем следующую расчетную формулу:

$$c_{n+4} = -\frac{c_n}{(n+3)(n+4)}; \quad c_0 = 1; \quad c_1 = -y_0; \tag{IX.193}$$
$$c_2 = c_3 = 0; \quad n \geqslant 0.$$

В формуле (IX.192), не нарушая общности, мы всегда можем положить $c_0 = 1$, т. е. решение $u = u(x)$ искать в виде ряда

$$u = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots.$$

В таком случае согласно (IX.190)

$$y = -\frac{u'}{u} = -\frac{c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots} = -c_1 + (c_1^2 - 2c_2)\, x + \cdots,$$

и для того, чтобы выполнялось начальное условие (IX.189), мы должны положить

$$c_1 = -y_0.$$

Далее, при $x = 0$ согласно (IX.191) имеем

$$u''(0) = 0; \quad u'''(0) = -[2xu + x^2 u']_{x=0} = 0$$

и, следовательно,

$$c_2 = \frac{u''(0)}{2!} = 0; \quad c_3 = \frac{u'''(0)}{3!} = 0.$$

Записав найденные c_0, c_1, c_2, c_3 непосредственно в (IX.193), мы по этой формуле можем легко вычислить любое количество дальнейших коэффициентов c_n.

При этом все $c_{4\nu+2} = c_{4\nu+3} = 0$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$; все $c_{4\nu+1}$ будут линейно выражаться через $c_1 = -y_0$, а все $c_{4\nu}$ — непосредственно вычисляться по $c_0 = 1$.

Таким образом, решение (IX.192) зависит от одного параметра $c_1 = -y_0$, и, следовательно, определяемое им

$$y = -\frac{u'(x)}{u(x)}$$

есть общее решение уравнения (IX.189). Взяв какое-либо конкретное значение $y(0) = y_0 = C^*$, найдем частное решение, проходящее через точку ($x_0 = 0$, $y_0 = C^*$).

В частности, для примера 1 мы имеем $y_0 = +1$, так что, положив в формуле (IX.193) $c_1 = -1$, в этом случае находим

$$c_0 = +1;\quad c_4 = \frac{-1}{3\cdot 4};\quad c_8 = \frac{+1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8};\quad c_{12} = \frac{-1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12};\quad \ldots;$$

$$c_1 = -1;\quad c_5 = \frac{+1}{4\ 5};\quad c_9 = \frac{-1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9};\quad c_{13} = \frac{+1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13};\quad \ldots;$$

$$c_2 = c_3 = c_6 = c_7 = c_{10} = c_{11} = \cdots = 0$$

и, следовательно,

$$u = 1 - x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{4\ 5} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \cdots,$$

$$u' = -1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 7} - \frac{x^8}{4\ 5\cdot 8} - \frac{x^{11}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11} + \cdots,$$

откуда

$$u'' = -x^2 + x^3 + \frac{x^6}{3\cdot 4} - \frac{x^7}{4\ 5} - \cdots =$$

$$= -x^2\left(1 - x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^5}{4\ 5} + \cdots\right) = -x^2 u.$$

По найденным u и u' согласно (IX.190) получаем

$$y = -\frac{u'}{u} = \frac{1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3\cdot 4\ 7}x^7 + \frac{1}{4\cdot 5\ 8}x^8 + \cdots}{1 - x - \frac{1}{3\ 4}x^4 + \frac{1}{4\cdot 5}x^5 + \frac{1}{3\ 4\cdot 7\cdot 8}x^8 - \cdots} =$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{6}{5}x^5 +$$

$$+ \frac{37}{2\cdot 3\cdot 5}x^6 + \frac{4\cdot 101}{5\ 7\cdot 9}x^7 + \frac{9\cdot 41}{5\cdot 7\ 8}x^8 + \cdots,$$

что полностью совпадает с результатами, приведенными в табл. 93.

Все вычисления, необходимые для определения первых 26 коэффициентов c_n с 12 верными знаками (счет мы вели с тремя запасными цифрами), приведены в табл. 94. В этой же таблице приведены и коэффициенты $\dot{c}_n = nc_n$ для производной

$$u' = u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{c}_n x^{n-1}, \qquad \text{(IX.194)}$$

которые в данном случае удобнее вычислять не через известные коэффициенты c_n, а непосредственно по рекуррентной формуле

$$\dot{c}_{n+4} = \frac{-\dot{c}_n}{n(n+3)};\quad \dot{c}_1 = -1;\quad \dot{c}_2 = \dot{c}_3 = 0;\quad \dot{c}_4 = \frac{-1}{3};\quad n \geqslant 1. \qquad \text{(IX.195)}$$

Таблица 94

$u' = -x^2u$; $u(0) = 1$; $u'(0) = -1$; $c_{n+4} = \frac{-c_n}{(n+3)(n+4)}$; $\dot{c}_{n+4} = \frac{\dot{c}_n}{n(n+3)}$; $\dot{c}_4 = -\frac{1}{3}$

n	$(n+3)(n+4)$	c_n	$n(n+3)$	$\dot{c}_n$
0	12	$+1{,}000000000000$	—	0
1	20	$-1{,}000000000000$	4	$-1{,}000000000000$
2	—	0	—	0
3	—	0	—	0
4	56	$-0{,}833333333333 \cdot 10^{-1}$	28	$-0{,}333333333333$
5	72	$+0{,}500000000000 \cdot 10^{-1}$	40	$+0{,}250000000000$
6	—	0	—	0
7	—	0	—	0
8	132	$+0{,}148809523810 \cdot 10^{-2}$	88	$+0{,}119047619048 \cdot 10^{-1}$
9	156	$-0{,}694444444444 \cdot 10^{-3}$	108	$-0{,}625000000000 \cdot 10^{-2}$
10	—	0	—	0
11	—	0	—	0
12	240	$-0{,}112734487734 \cdot 10^{-4}$	180	$-0{,}135281385281 \cdot 10^{-3}$
13	272	$+0{,}445156695157 \cdot 10^{-5}$	208	$+0{,}578703703704 \cdot 10^{-4}$
14	—	0	—	0
15	—	0	—	0
16	380	$+0{,}469727032227 \cdot 10^{-7}$	304	$+0{,}751563251563 \cdot 10^{-6}$
17	420	$-0{,}163660549690 \cdot 10^{-7}$	340	$-0{,}278222934473 \cdot 10^{-6}$
18	—	0	—	0
19	—	0	—	0
20	552	$-0{,}123612376902 \cdot 10^{-9}$	460	$-0{,}247224753804 \cdot 10^{-8}$
21	600	$+0{,}389667975452 \cdot 10^{-10}$	504	$+0{,}818302748450 \cdot 10^{-9}$
22	—	0	—	0
23	—	0	—	0
24		$+0{,}223935465402 \cdot 10^{-12}$		$+0{,}537445116965 \cdot 10^{-11}$
25		$-0{,}649446625754 \cdot 10^{-13}$		$-0{,}162361656438 \cdot 10^{-11}$

Ряд (IX.192), а следовательно, и ряд (IX.194), сходится во всей комплексной плоскости, так как согласно (IX.193) радиус сходимости этого ряда

$$R^4 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+4}} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+3)(n+4) = \infty.$$

Умножив в табл. 94 колонку коэффициентов c_n или $\dot{c}_n$ соответственно на колонку значений x^n или x^{n-1}, мы находим $u(x)$ и $u'(x)$, после чего вычисляем

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Так, например, при $x = \pm 1$ имеем:

$$u(+1) = \sum c_n = -0{,}032546473899;$$

$$u(-1) = \sum (-1)^n c_n = +1{,}86883354451;$$

$$u'(+1) = \sum \dot{c}_n = -1{,}077755510753;$$

$$u'(-1) = \sum (-1)^n \dot{c}_n = -0{,}43462930332$$

и, соответственно,

$$y(+1) = -33{,}114355616; \quad y(-1) = +0{,}23256715645.$$

Вычислив для контроля результатов эти же значения по формуле (IX.188), получаем

$$y(+1) = -33{,}1143557; \quad y(-1) = +0{,}23256717,$$

что дает полное совпадение в пределах точности вычислений коэффициентов b_n и величины R в табл. 93.

Замечание. Если исходное дифференциальное уравнение (IX.104) линейно, то и определяемая им рекуррентная формула (IX.113), за исключением некоторых особых случаев, будет также линейной. Это позволяет для каждого фиксированного значения x находить с максимальной простотой сумму исходного ряда. Так, например, представив ряды (IX.192) и (IX.194) в виде

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' A_n(x), \quad \text{где } A_n(x) = c_n x^n, \tag{IX.196}$$

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(x), \quad \text{где } \dot{A}_n(x) = \dot{c}_n x^{n-1}, \tag{IX.197}$$

каждый последующий член этих рядов можно вычислять при фиксированном x по рекуррентным формулам:

$$A_{n+4}(x) = -\frac{x^4 A_n(x)}{(n+3)(n+4)}; \quad A_0 = +1; \quad A_1 = -x; \quad A_2 = A_3 = 0; \tag{IX.198}$$

$$\dot{A}_{n+4}(x) = -\frac{x^4 \dot{A}_n(x)}{n(n+3)}; \quad \dot{A}_1 = -1; \quad \dot{A}_2 = \dot{A}_3 = 0; \quad \dot{A}_4 = -\frac{x^3}{3}, \tag{IX.199}$$

которые непосредственно вытекают из (IX.193) и (IX.195).

В табл. 95 выполнены с девятью значащими цифрами все вычисления по формулам (IX.196)—(IX.199) для определения $u(x)$ и $u'(x)$ при $x = \pm 0{,}25$; $x = \pm 0{,}50$; $x = \pm 0{,}75$, по которым затем вычисляем соответствующие

$$y(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Присоединив сюда начальное значение $y(0) = +1$ и вычисленные ранее $y(\pm 1{,}00)$, мы при помощи субтабулирования, изложенного в § 80 гл. VI, можем построить с заданным шагом таблицу значений $y(x)$ на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Этим же путем можно построенную таблицу значений $y(x)$ распространить на любой конечный интервал, вычисляя по формулам (IX.196)—(IX.199) необходимое количество узловых точек, хотя при $|x| > 1$ быстрота сходимости рядов (IX.196), (IX.197) будет уменьшаться.

Полюсы каждого конкретного решения $y = y(x)$ проще всего определять как нули функции u, т. е. как корни уравнения

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{IX.200}$$

В табл. 96 приведены все вычисления, необходимые для определения с 10 значащими цифрами первого отрицательного полюса

$$x = -2{,}223378382$$

Таблица 56

$y = -\frac{u'(x)}{u(x)}$			$x = \pm 0{,}25;\quad x^4 = 0{,}00390625$		$x = \pm 0{,}50;\quad x^4 = 0{,}06250000$		$x = \pm 0{,}75;\quad x^4 = 0{,}31640625$	
n	$(n+3)\times(n+4)$	$n(n+3)$	$A_n(x)$	$\dot{A}_n(x)$	$A_n(x)$	$\dot{A}_n(x)$	$A_n(x)$	$A_n(x)$
0	12	—	+1,000000000	—	+1,000000000	—	+1,000000000	—
1	20	4	∓0,250000000	−1,000000000	∓0,500000000	−1,000000000	∓0,750000000	−1,000000000
4	56	28	−0,000325521	∓0,005208333	−0,005208333	∓0,041666667	−0,026367188	∓0,140625000
5	72	40	±0,000048828	+0,000976563	±0,001562500	+0,015625000	±0,011865234	+0,079101563
8	132	88	+0,000000023	±0,000000727	+0,000005813	±0,000093006	+0,000148978	±0,001589094
9	156	108	∓0,000000003	−0,000000095	∓0,000001356	−0,000024414	∓0,000052142	−0,000625706
12	240	180	—	—	−0,000000003	∓0,000000066	−0,000000357	∓0,000005714
13	272	208	—	—	±0,000000001	+0,000000014	±0,000000106	+0,000001833
16								±0,000000010
17								−0,000000003
$\sum_n = u(+x);\ u'(+x) =$			+0,749723327	−1,004231138	+0,496358622	−1,025973127	+0,235594631	−1,060563923
$\sum_n = u(-x);\ u'(-x) =$			+1,249625677	−0,993815926	+1,493236332	−0,942825673	+1,711968235	−0,782480703
			$y(+0{,}25) =$	+1,33946898	$y(+0{,}50) =$	+2,06699971	$y(+0{,}75) =$	+4,50164725
			$y(-0{,}25) =$	+0,795290897	$y(-0{,}50) =$	+0,631397491	$y(-0{,}75) =$	+0,457064966

Таблица 96

$y' = y^3 + x^2$; $y_0 = 1$			$x = -2{,}2$; $x^4 = 23{,}4256$		$x = -2{,}2234$; $x^4 = 24{,}43826700$	
n	$(n+3)\times(n+4)$	$n(n+3)$	$A_n(x)$	$\dot{A}_n(x)$	$A_n(x)$	$\dot{A}_n(x)$
0	12	—	+1,00000	—	+1,0000000000	—
1	20	4	+2,20000	−1,00000	+2,2234000000	−1,0000000
4	56	28	−1,95213	+3,54933	−2,0365222500	+3,6637982
5	72	40	−2,57682	+5,85640	−2,7168021424	+6,1095668
8	132	88	+0,81660	−2,96947	+0,8887334732	−3,1977457
9	156	108	+0,83838	−3,42974	+0,9221380020	−3,7326806
12	240	180	−0,14492	+0,79047	−0,1615386811	+0,8880382
13	272	208	−0,12589	+0,74392	−0,1444580430	+0,8846319
16	380	304	+0,01415	−0,10287	+0,0167543343	−0,1205673
17	420	340	+0,01084	−0,08378	+0,0129790597	−0,0992372
20	552	460	−0,00087	+0,00793	−0,0010774918	+0,0096923
21	600	504	−0,00060	+0,00577	−0,0007552041	+0,0071329
24	756	648	+0,00004	−0,00040	−0,0000477030	−0,0005149
25	812	700	+0,00002	−0,00027	+0,0000307598	−0,0003459
28	992	868		+0,00001	−0,0000015420	+0,0000194
29	1056	928		+0,00001	−0,0000009258	+0,0000121
32	1260				+0,0000000380	−0,0000005
33	1332				+0,0000000214	−0,0000003
36					−0,0000000007	
37					−0,0000000004	
$\sum_n = u(x)$; $u'(x) =$			+0,07880	+3,36731	−0,0000728899	+3,3717994
			$u(x) : u'(x)$	+0,0234	$u(x) : u'(x) =$	−0,000021618

решения $y = y(x)$ задачи Коши (IX.186), рассмотренной в примере 1. Уточнение значений корней уравнения (IX.200) выполнялось по формуле Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}, \qquad \text{(IX.201)}$$

исходя из $x_0 = -2{,}0$, для которого

$$u(-2{,}0) \approx +0{,}73; \quad u'(-2{,}0) \approx +3{,}0,$$

так что

$$x_1 = -2{,}0 - \frac{0{,}73}{3{,}02} = -2{,}2;$$

$$x_2 = -2{,}2 - \frac{u(-2{,}2)}{u'(-2{,}2)} = -2{,}2 - \frac{0{,}07880}{3{,}36731} = 2{,}2234;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{u(x_2)}{u'(x_2)} = -2{,}2234 + \frac{0{,}0000728899}{3{,}3717994} = -2{,}223378382.$$

Аналогично для первого положительного полюса $x = x^*$, исходя из значения $x_0 = 1{,}0$, согласно формуле (IX.201) получаем

$$x_1 = 1{,}0 - \frac{u(1{,}0)}{u'(1{,}0)} = 1{,}0 - \frac{0{,}03255}{1{,}07776} = 0{,}9680,$$

после чего, выполнив еще два приближения, находим, что с 12 десятичными знаками

$$x = x^* = 0{,}968106539311.$$

Таким образом, все цифры вычисленного в табл. 93 (другим методом) значения

$$x = R = 0{,}969810654$$

верные.

Нули для решения уравнения Риккати, в соответствии с формулой (IX.178), проще всего определять как нули функции $u'(x)$, т. е. как корни уравнения

$$u'(x) = 0, \qquad \text{(IX.202)}$$

которые уточняем по методу Ньютона.

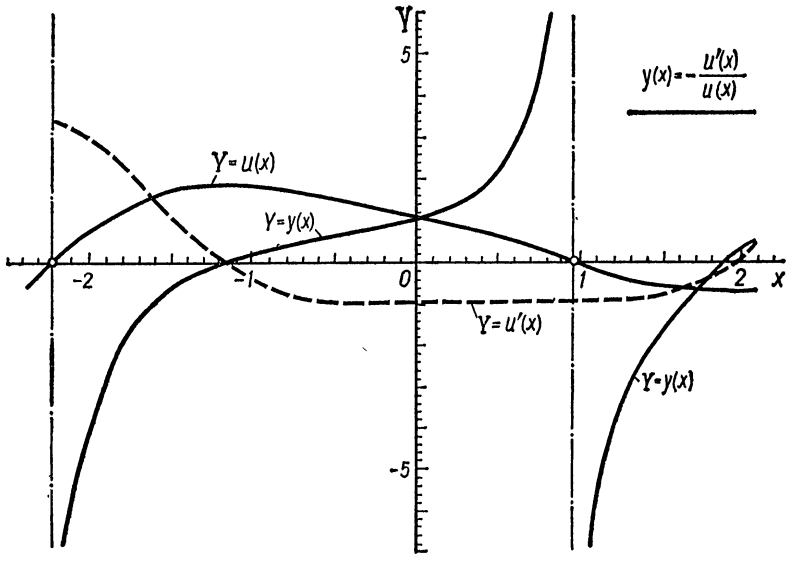


Рис. 241.

В частности, для примера 1 формула Ньютона согласно (IX.191) принимает следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u'(x_n)}{u''(x_n)} = x_n + \frac{u'(x_n)}{x_n^2 \cdot u(x_n)}. \qquad \text{(IX.203)}$$

Графики функций $y(x)$, $u(x)$, $u'(x)$ для этого примера представлены на рис. 241, а на рис. 242 график искомой функции распространен на сегмент $[-4; +4]$.

Отметим попутно, что более точные значения первых пяти полюсов для уравнения Риккати (IX.186) будут следующие:

$$x = -3{,}3449074716591;$$
$$x = -2{,}2233783825262113;$$
$$x = +0{,}969810653931080907;$$
$$x = +2{,}651806921116737922;$$
$$x = +3{,}645776312779421937,$$

и в этих результатах все цифры, кроме, быть может, последней, верные.

Упражнение 3. Вычислить для уравнения

$$y' = y^2 + x^2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = +1$$

по формулам (IX.196)—(IX.199) с семью значащими цифрами значения функций $u(x)$, $u'(x)$ и $y(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ для $x = \pm 1{,}25$; $x = \pm 1{,}50$; $x = \pm 1{,}75$; $x = \pm 2{,}00$ и, кроме того, определить для $y(x)$ второй положительный полюс.

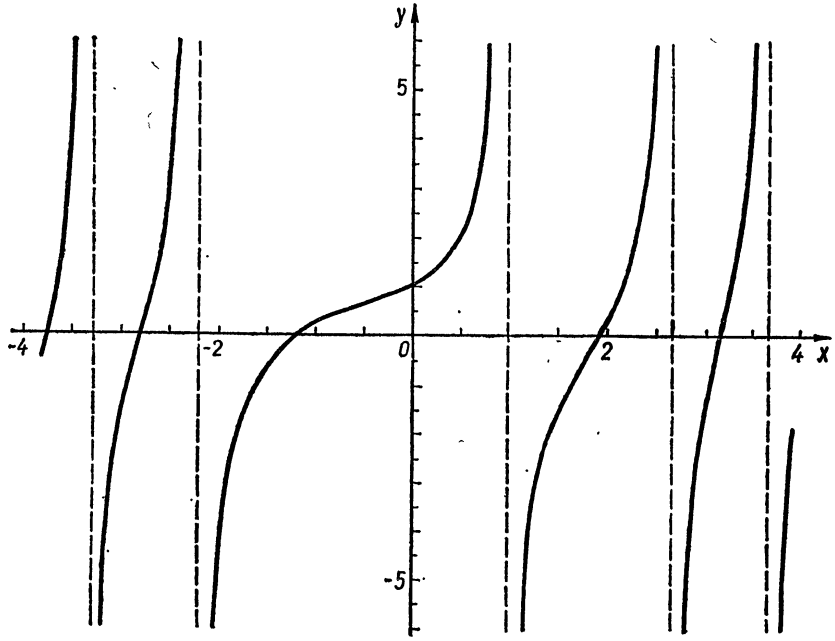


Рис. 242.

Мы рассмотрели так подробно решение уравнения $y' = y^2 + x^2$ для того, чтобы иметь возможность сопоставить различные пути и оценить их эффективность. Полученные результаты легко распространить и на уравнение

$$y' = y^2 - x^2,$$

для чего надо только заменить x на ix.

Кроме того, уравнения

$$y' = y^2 \pm x^2$$

чаще, чем другие уравнения Риккати, встречаются в литературе*, и читатель легко сможет сопоставить результаты, полученные при помощи рядов, с результатами, полученными другими методами (см., например, [43,стр.293]; [55, стр. 89—91]; [65, стр. 187]; [86, стр. 44, 61, 66—68, 73, 78]; [91, стр.16]; [108, стр. 298]).

При решении каждого конкретного уравнения Риккати, как мы уже подчеркивали, наиболее эффективной является подстановка (IX. 178), которая приводит

* Отметим попутно, что еще И. Бернулли в статье «Общий способ построения всех дифференциальных уравнений первого порядка», опубликованной в 1694 г. в «Acta Eruditorum», излагая метод изоклин, в качестве одного из двух иллюстративных примеров рассмотрел решение уравнения $a^2y' = y^2 + x^2$.

его к линейному уравнению второго порядка. Для иллюстрации рассмотрим еще один пример, который мы заимствуем из книги С. А. Чаплыгина [159, стр. 93—97].

Пример 3. Решить задачу Коши

$$y' = -y^2 + 1 + x; \quad x_0 = 0; \quad y(0) = +1 \tag{IX.204}$$

и определить с восемью значащими цифрами значение $y(x)$ в точках $x = \pm 1{,}0$.

Решение. В данном случае $P = -1$; $Q = 0$; $R = 1 + x$, поэтому подстановка

$$y = +\frac{u'}{u} \tag{IX.205}$$

приводит (IX.204) к линейному уравнению

$$u'' = (1 + x)\,u; \quad u(0) = u'(0) = 1. \tag{IX.206}$$

Решение уравнения (IX.206) ищем в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x); \quad A_n(x) = c_n x^n, \tag{IX.207}$$

коэффициенты которого определяются рекуррентной формулой

$$\ddot{c}_{n+2} = c_n + c_{n-1},$$

или после очевидных преобразований

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-1} + c_n}{(n+1)(n+2)}; \quad c_0 = c_1 = 1; \quad c_2 = \frac{1}{2}; \quad n \geqslant 1. \tag{IX.208}$$

Коэффициент

$$c_2 = \frac{u''(0)}{2!} = \frac{1}{2}$$

находим, положив в (IX.206) $x = 0$, $u(0) = 1$.

В табл. 97 определены с восемью верными знаками (счет мы вели с одной запасной цифрой) до $n = 20$ включительно коэффициенты c_n и $\dot{c}_{n+1} = (n+1)\,c_{n+1}$, необходимые для вычисления производной

$$u' = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{c}_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{A}_{n+1}(x); \quad \dot{A}_{n+1}(x) = \dot{c}_{n+1} x^n. \tag{IX.209}$$

Ряды (IX.207) и (IX.209) сходятся во всей комплексной плоскости, так как их радиус сходимости $R^* = \infty$.

Умножив коэффициенты c_n и $\dot{c}_{n+1}$ на соответствующие значения x^n, вычисляем $u(x)$, $u'(x)$, а затем по (IX.205) $y(x)$. В частности, при $x = \pm 1$ имеем

$$u(+1) = \sum\nolimits_n = \sum c_n = 3{,}02060024;$$
$$u(-1) = \sum (-1)^n c_n = 0{,}26210488;$$
$$u'(+1) = \sum \dot{c}_{n+1} = 3{,}83903703;$$
$$u'(-1) = \sum (-1)^n \dot{c}_{n+1} = 0{,}63826514$$

и тогда

$$y(+1) = 1{,}2709517; \quad y(-1) = 2{,}4351517.$$

Так как все коэффициенты c_n положительные, то функция $u(x)$ может обратиться в нуль только при отрицательных значениях x. Следовательно, все полюсы $y(x)$ расположены на отрицательной полуоси. Определим первый из них. Для этого, исходя из значения $x_0 = -1$, по формуле (IX.201) находим

$$x_1 = -1 - \frac{0{,}262}{0{,}608} = -1{,}41.$$

В табл. 97 найдены значения функций $u(x)$ и $u'(x)$ для $x = \pm 1{,}41$ по вычисленным степеням x^n и для контроля как сумма членов $A_n(x) = c_n x^n$ и $\dot{A}_{n+1}(x)$ рядов (IX.207) и (IX.209), вычисленных непосредственно по рекуррентным формулам

$$A_{n+2}(x) = \frac{(xA_{n-1} + A_n)\,x^2}{(n+1)(n+2)}; \quad A_0 = 1; \quad A_1 = x; \quad A_2 = \frac{x^2}{2}; \qquad \text{(IX.210)}$$

$$\dot{A}_{n+2}(x) = \frac{x^2[nx\dot{A}_{n-1} + (n-1)\dot{A}_n]}{n(n^2-1)}; \quad \dot{A}_1 = 1; \quad \dot{A}_2 = x; \quad \dot{A}_3 = x^2, \qquad \text{(IX.211)}$$

которые легко получить из формулы (IX.208).

Продолжив этот процесс и выполнив еще два уточнения по формуле (IX.201), находим первый отрицательный полюс решения $y(x)$:

$$x = -1{,}40831599.$$

Разделив ряд (IX.209) на ряд (IX.207), мы можем согласно (IX.205) получить ряд для самого решения $y = y(x)$:

$$y = \frac{1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{11}{120}x^5 + \cdots}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \cdots} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{7}{60}x^5 + \cdots,$$

радиус сходимости которого будет

$$R = 1{,}40831599.$$

По вычисленным в табл. 97 $u(\pm 1{,}41)$ и $u'(\pm 1{,}41)$ находим также, что

$$y(+1{,}41) = \frac{7{,}497966614}{5{,}252964494} = +1{,}42737812; \quad y(-1{,}41) = -593{,}8223.$$

Полученные результаты полностью согласуются с результатами С. А. Чаплыгина и, в частности, с найденным им приближенным значением

$$y(+1) = 1{,}2707.$$

Упражнения

4. Вычислить с пятью значащими цифрами $u(x)$, $u'(x)$, $y(x)$ для $x = \pm 0{,}25$; $\pm 0{,}50$; $\pm 0{,}75$; $\pm 1{,}25$; $\pm 1{,}50$, а также построить графики этих функций.

5. По образцу примера 1 построить непосредственно по уравнению (IX.204) ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{R}{R+x}\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right\}$$

и определить радиус его сходимости.

Таблица 97

$y' = -y^2 + 1 + x;\quad y = \frac{u'}{u};\quad u'' = (1+x)\,u;\quad c_{n+2} = \frac{c_{n-1} + c_n}{(n+1)(n+2)}$					$x = \pm 1{,}4100;\quad x^2 = 1{,}9881$	
n	$(n+1)\times(n+2)$	c_n	$\dot{c}_{n+1} = (n+1)\,c_{n+1}$	x^n	$A_n(x) = c_n x^n$	$\dot{A}_{n+1}(x)$
0	—	1,000000000	1,00000000	+1,00000000	+1,000000000	+1,000000000
1	6	1,000000000	1,00000000	±1,41000000	±1,410000000	±1,410000000
2	12	0,500000000	1,00000000	+1,98810000	+0,994050000	+1,988100000
3	20	0,333333333	0,50000000	±2,80322100	±0,934407000	±1,401610500
4	30	0,125000000	1,20833333	+3,95254161	+0,494067701	+0,823446169
5	42	$0{,}416666667 \cdot 10^{-1}$	$0{,}91666667 \cdot 10^{-1}$	±5,57308367	±0,232211820	±0,510866003
6	56	$0{,}152777778 \cdot 10^{-1}$	$0{,}27777778 \cdot 10^{-1}$	+7,85804797	+0,120053511	+0,218279110
7	72	$0{,}396825397 \cdot 10^{-2}$	$0{,}81349206 \cdot 10^{-2}$	±11,07984764	±0,043967649	±0,090133681
8	90	$0{,}101686508 \cdot 10^{-2}$	$0{,}24057540 \cdot 10^{-2}$	+15,6225851	+0,015886061	+0,037584096
9	110	$0{,}267305996 \cdot 10^{-3}$	$0{,}55390212 \cdot 10^{-3}$	±22,0278450	±0,005888175	±0,012201270
10	132	$0{,}553902116 \cdot 10^{-4}$	$0{,}12841711 \cdot 10^{-3}$	+31,0592614	+0,001720379	+0,003988531
11	156	$0{,}116742825 \cdot 10^{-4}$	$0{,}29336019 \cdot 10^{-4}$	±43,7935586	±0,000511258	±0,001284729
12	182	$0{,}244466824 \cdot 10^{-5}$	$0{,}55887078 \cdot 10^{-5}$	+61,7489176	+0,000150956	+0,000345097
13	210	$0{,}429900603 \cdot 10^{-6}$	$0{,}10860731 \cdot 10^{-5}$	±87,0659738	±0,000037430	±0,000094560
14	240	$0{,}775766524 \cdot 10^{-7}$	$0{,}20532635 \cdot 10^{-6}$	+122,763023	+0,000009524	+0,000025207
15	272	$0{,}136884231 \cdot 10^{-7}$	$0{,}33831817 \cdot 10^{-7}$	±173,095862	±0,000002369	±0,000005856
16	306	$0{,}211448856 \cdot 10^{-8}$	$0{,}57040672 \cdot 10^{-8}$	+244,065165	+0,000000516	+0,000001392
17	342	$0{,}335533366 \cdot 10^{-9}$	$0{,}92958304 \cdot 10^{-9}$	±344,131883	±0,000000115	±0,000000320
18	380	$0{,}516435022 \cdot 10^{-10}$	$0{,}13611233 \cdot 10^{-9}$	+485,225955	+0,000000025	+0,000000066
19		$0{,}716380680 \cdot 10^{-11}$	$0{,}20377730 \cdot 10^{-10}$	±684,168597	±0,000000005	±0,000000014
20		$0{,}101888650 \cdot 10^{-11}$				+0,000000003
$\sum_n (+) =$		3,02060024	3,83903703	$\sum_n (+) =$	+5,252964494	+7,497966614
$\sum_n (-) =$		0,26210488	0,63826514	$\sum_n (-) =$	−0,001087148	+0,645572748

В заключение отметим, что решением уравнения Риккати может быть только *мероморфная функция*, т. е. *функция, которая, за исключением бесконечно удаленной точки, не имеет других особенностей, кроме полюсов* [26, гл. I. § 11].

§ 113. Системы уравнений

Рассмотрим решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_j^{(\nu_j)} = f_j\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, \ldots, y_r, y_r', \ldots, y_r^{(\nu_r-1)}\right) \qquad \text{(IX.212)}$$

при начальных условиях

$$y_j(x_0) = y_{j0};\ y_1'(x_0) = y_{j0}^{(1)};\ \ldots;\ y_j^{(\nu_j-1)}(x_0) = y_{j0}^{(\nu_j-1)};\quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

где относительно функций f_j будем предполагать, что они аналитичны по всем своим аргументам.

Решение этой задачи для системы r уравнений любого порядка при помощи степенных рядов не приводит к каким-либо принципиальным трудностям и выполняется тем же путем, что и в случае одного уравнения. Более того, во многих случаях оказывается целесообразным перейти от одного уравнения к эквивалентной ему системе, решение которой выполняется проще. Поэтому все дальнейшее изложение проведем на примерах.

Пример 1. Решить задачу Коши для системы двух нелинейных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} y' &= z^2 + x;\quad x_0 = 0;\quad y(0) = 1;\\ z' &= y^2;\quad z(0) = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IX.213)}$$

Решение. Будем искать функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$ в виде степенных рядов с одним и тем же центром $x_0 = 0$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n;\quad z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \qquad \text{(IX.214)}$$

Тогда для определения коэффициентов a_n и b_n согласно (IX.213) получаем следующие рекуррентные формулы:

$$a_{n+1} = b_n^{(2)} + \gamma_n;\quad b_{n+1} = a_n^{(2)},$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1,\\ 0 \text{ при } n \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда, заменив a_{n+1} и b_{n+1} по формуле (IX.111) и учтя, что согласно начальным условиям

$$a_0 = y(0) = 1;\quad b_0 = z(0) = 0,$$

приходим к расчетным формулам

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{b_n^{(2)} + \gamma_n}{n+1};\quad b_{n+1} = \frac{a_n^{(2)}}{n+1};\\ a_0 &= 1;\\ b_0 &= 0; \end{aligned} \qquad \gamma_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 1,\\ 0 \text{ при } n \neq 1. \end{cases} \qquad \text{(IX.215)}$$

Коэффициенты $a_n^{(2)}$ и $b_n^{(2)}$ для рядов

$$y^2 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}^2 \quad \text{и} \quad z^2 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right\}^2$$

находим по формуле (IX.124) § 110.

Все вычисления, необходимые для определения с семью значащими цифрами коэффициентов a_n и b_n для $n \leqslant 15$ и $n = 50 - 55$, приведены в табл. 98. В этой же таблице вычислены и величины

$$R_n(a) = \frac{a_n}{a_{n+1}}; \qquad R_n(b) = \frac{b_n}{b_{n+1}}, \tag{IX.216}$$

Таблица 98

$y' = z^2 + x$; $y(0) = a_0 = 1$; $a_{n+1} = \dfrac{b_n^{(2)} + \gamma_n}{n+1}$; $b_{n+1} = \dfrac{a_n^{(2)}}{n+1}$

$z' = y^2$; $z(0) = b_0 = 0$;

n	a_n	$a_n^{(2)}$	b_n	$b_n^{(2)}$	γ_n	$\frac{a_n}{a_{n+1}}$	$\frac{b_n}{b_{n+1}}$
0	1,0000000	1,0000000	0	0	0	—	—
1	0	0	1,0000000	0	1	—	—
2	0,5000000	0,0000000	0	1,000000	0	—	—
3	0,3333333	0,6666667	0,3333333	0	0	—	—
4	0	0,2500000	0,1666667	0,6666667	0	—	—
5	0,1333333	0,6000000	0,05000000	0,3333333	0	—	—
6	$0{,}5555555 \cdot 10^{-1}$	0,2222222	0,1000000	0,2111111	0	1,8421	3,1500
7	$0{,}3015873 \cdot 10^{-1}$	0,1936508	$0{,}3174603 \cdot 10^{-1}$	0,3111111	0	0,7755	1,3115
8	$0{,}3888889 \cdot 10^{-1}$	0,2222222	$0{,}2420635 \cdot 10^{-1}$	0,1246032	0	2,8089	0,9804
9	$0{,}1384480 \cdot 10^{-1}$	0,09488537	$0{,}2469136 \cdot 10^{-1}$	0,1317460	0	1,0509	2,6022
10	$0{,}1317460 \cdot 10^{-1}$	0,10312168	$0{,}9488537 \cdot 10^{-2}$	0,10638008	0	1,3623	1,0121
11	$0{,}9670916 \cdot 10^{-2}$	0,07392738	$0{,}9374698 \cdot 10^{-2}$	0,05569665	0	2,0836	1,5217
12	$0{,}4641388 \cdot 10^{-2}$	0,04281599	$0{,}6160615 \cdot 10^{-2}$	0,05645369	0	1,0688	1,8705
13	$0{,}4342592 \cdot 10^{-2}$	0,04086051	$0{,}3293538 \cdot 10^{-2}$	0,03564722	0	1,7055	1,1285
14	$0{,}2546230 \cdot 10^{-2}$	0,02510361	$0{,}2918608 \cdot 10^{-2}$	0,02431792	0	1,5706	1,7439
15	$0{,}1621196 \cdot 10^{-2}$	—	$0{,}1673574 \cdot 10^{-2}$	—	0	1,2657	1,4813
...	.....	.....	.....	.....	...	.....	.....
50	$0{,}1612568 \cdot 10^{-8}$	—	$0{,}1612475 \cdot 10^{-8}$	—	0	1,4870	1,4871
51	$0{,}1084419 \cdot 10^{-8}$	—	$0{,}1084331 \cdot 10^{-8}$	—	0	1,4877	1,4872
52	$0{,}7289106 \cdot 10^{-9}$	—	$0{,}7291184 \cdot 10^{-9}$	—	0	1,4870	1,4876
53	$0{,}4901871 \cdot 10^{-9}$	—	$0{,}4901205 \cdot 10^{-9}$	—	0	1,4874	1,4870
54	$0{,}3295671 \cdot 10^{-9}$	—	$0{,}3295979 \cdot 10^{-9}$	—	0	1,4874	1,4874
55	$0{,}2215657 \cdot 10^{-9}$	—	$0{,}9210903 \cdot 10^{-9}$	—	0		

значения которых при $n = 50 - 55$ дают возможность установить (с тремя десятичными знаками) их пределы и тем самым определить, что радиус сходимости рядов (IX.214) будет

$$R_a = R_b = R \approx 1{,}487,$$

и, следовательно, точка

$$x = R$$

есть особая точка решений системы (IX.213).

Результаты, полученные в табл. 98, можно распространить на более широкий интервал при помощи аналитического продолжения. Для этого, подставив в (IX.214) значения $x = \pm\frac{1}{2}$, по известным a_n и b_n вычисляем

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{15} \frac{a_n}{2^n} = +1{,}1721354;$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{15}\frac{a_n}{(-2)^n}=+1{,}0799328;$$

$$z\left(+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{15}\frac{b_n}{2^n}=+0{,}5556151;$$

$$z\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{15}\frac{b_n}{(-2)^n}=-0{,}5314458.$$

Приняв найденные значения

$$x_0=\pm\frac{1}{2};\ y_0=y(x_0)=y\left(\pm\frac{1}{2}\right);\ z_0=z(x_0)=z\left(\pm\frac{1}{2}\right)$$

в качестве новых начальных условий в задаче (IX.213), мы по рекуррентным формулам, аналогичным формулам (IX.215), вычисляем коэффициенты степенных рядов*

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^*\left(x-\frac{1}{2}\right)^n;\quad z=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^*\left(x-\frac{1}{2}\right)^n;\quad x_0=+\frac{1}{2};\qquad \text{(IX.217)}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{**}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n;\quad z=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{**}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n;\quad x_0=-\frac{1}{2},\qquad \text{(IX.218)}$$

каждый из которых является аналитическим продолжением соответствующего ряда (IX.214).

При этом если остальные особые точки достаточно удалены от исследуемой, то картина будет становиться более четкой по мере приближения центра нового ряда $x_0=x_0^*$ к этой точке. Так, в данном примере, взяв $x_0=x_0^*=+1$, для которого

$$a_0^*=y_0=y(+1)=2{,}144759;\ b_0^*=z_0=(+1)=1{,}767125,$$

уже при $n=19-21$ получаем

$$a_{19}^*=1753532;\quad a_{20}^*=3598414;\quad a_{21}^*=7384282;$$

$$b_{19}^*=1753602;\quad b_{20}^*=3598535;\quad b_{21}^*=7384496;$$

$$R_{19}^*(a)=\frac{a_{19}^*}{a_{20}^*}=0{,}4873069;\quad R_{20}^*(a)=\frac{a_{20}^*}{a_{21}^*}=0{,}4873072;$$

$$R_{19}^*(b)=\frac{b_{19}^*}{b_{20}^*}=0{,}4873100;\quad R_{20}^*(b)=\frac{b_{20}^*}{b_{21}^*}=0{,}4873095;$$

так что с шестью значащими цифрами радиус сходимости этих рядов

$$R^*=\frac{R_{20}^*(a)+R_{20}^*(b)}{2}=0{,}487308.$$

* При переходе к новому центру x_0 в системе (IX.213) надо независимое переменное x заменить тождественно равной величиной $(x-x_0)+x_0$ и в соответствии с этим внести необходимые изменения в рекуррентные формулы (IX.215).

Возвращаясь к исходным рядам (IX.214), находим

$$R = x_0^* + R^* = 1{,}487308,$$

и, следовательно, более точное значение для искомой особой точки будет

$$x = R = 1{,}487308.$$

Эти же результаты можно получить, перейдя в системе (IX.213) к новым искомым функциям:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}, \quad z(x) = \frac{1}{v(x)},$$

что читателю полезно выполнить в виде упражнения. В последнем случае нули функций $u(x)$ и $v(x)$ (которые легко определить, как только найдем достаточное число коэффициентов рядов для $u(x)$ и $v(x)$) будут особыми точками функций $y(x)$ и $z(x)$, что и определит радиус сходимости рядов (IX.214) или их аналитических продолжений. Однако в данном конкретном примере в связи с тем, что начальное условие $z(0) = 0$ приводит для функции $v(x)$ к условию $v(0) = \infty$, надо при помощи аналитического продолжения предварительно перейти от центра $x_0 = 0$ к новому центру, например к $x_0 = 0{,}5$ или $x_0 = 1$.

Более подробно по указанной выше методике данный пример рассмотрел Н. И. Синявский [148, стр. 332], который, в частности, определил, что первый положительный нуль функций $u(x)$ и $v(x)$ есть

$$x^{(0)} = 1{,}487309.$$

Упражнения

1. Вычислить с шестью значащими цифрами коэффициенты a_n^* и b_n^* рядов (IX.217) до $n = 22$ включительно и определить затем для $x = +1$ значения искомых функций $y(+1)$ и $z(+1)$.

2. По найденным в предыдущем упражнении значениям $y_0^* = y(+1)$ и $z_0^* = z(+1)$ построить ряд с центром в точке $x_0^* = +1$ и определить (с теми же шестью знаками) его радиус сходимости.

Система (IX.213) рассматривалась ранее С. Г. Михлиным и Х. Л. Смолицким [91, стр. 18—19], которые, ограничиваясь грубым приближением, получили

$$y(x) \approx y_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}; \quad z(x) \approx z_2(x) = x,$$

что совпадает с результатами, приведенными в табл. 98.

Пример 2. Решить, переходя к системе уравнений, задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка

$$4y''' = y'^2 + \sin y + e^x;$$
$$x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = y''(0) = \frac{1}{2}. \tag{IX.219}$$

Решение. Введем две вспомогательные функции

$$z = \sin y; \quad v = \cos y. \tag{IX.220}$$

Тогда, учтя, что

$$z' = (\sin y)' = y' \cos y = y'v; \quad v' = (\cos y)' = -y' \sin y = -y'z,$$

приходим к системе, эквивалентной исходному уравнению,

$$4y''' = y'^2 + z + e^x; \quad z' = y'v; \quad v' = -y'z, \tag{IX.221}$$

$$a_{n+3} = \frac{\dot{a}^{(2)}_{n+1} + b_n + \gamma_n}{4N_n}; \quad b_{n+1} = \frac{[\dot{a}_{n+1} c_n]}{n+1};$$

n	a_n	$\dot{a}_{n+1}$	$a^{(2)}_{n+1}$	b_n
0	1,0000000	0,5000000	0,2500000	+0,8414710
1	0,5000000	0,5000000	0,5000000	+0,2171512
2	0,2500000	0,2614339	0,5114339	+0,2989170·10^{-1}
3	0,8714462·10^{-1}	0,7375628·10^{-1}	0,3351902	—0,6935574·10^{-1}
4	0,1843907·10^{-1}	0,2169428·10^{-1}	0,1637982	—0,6769126·10^{-1}
5	0,4338857·10^{-2}	0,5406264·10^{-2}	0,6566533·10^{-1}	—0,3355051·10^{-1}
6	0,9010440·10^{-3}	0,1148113·10^{-2}	0,2333761·10^{-1}	—0,1180253·10^{-1}
7	0,1640162·10^{-3}	0,2407628·10^{-3}	0,7415815·10^{-2}	—0,2461697·10^{-2}
8	0,3009535·10^{-4}	0,5769629·10^{-4}	0,2166904·10^{-2}	+0,2839639·10^{-3}
9	0,6410699·10^{-5}	0,1789073·10^{-4}	0,6054052·10^{-3}	+0,6108010·10^{-3}
10	0,1789073·10^{-5}	0,6876860·10^{-5}	0,1694933·10^{-3}	+0,3817575·10^{-3}
11	0,6251691·10^{-6}	0,2771368·10^{-5}	0,5037300·10^{-4}	+0,1705428·10^{-3}
12	0,2308640·10^{-6}	0,1044558·10^{-5}	0,1647450·10^{-4}	+0,6047250·10^{-4}
13	0,8035058·10^{-7}			
14	0,2529085·10^{-7}			
15	0,7046620·10^{-8}			

где в соответствии с заданными начальными условиями

$$x_0 = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = y''(0) = \frac{1}{2},$$

$$z(0) = \sin y_0 = \sin 1 = 0{,}8414710;$$

$$v(0) = \cos y_0 = \cos 1 = 0{,}5403023.$$

Будем коэффициенты ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n, \qquad \text{(IX.222)}$$

равного произведению двух степенных рядов, обозначать при помощи символа

$$C_n = [A_n B_n],$$

числовое значение которого определяется по формуле Коши* (VIII.64) § 99:

$$[A_n B_n] = \sum_{j=0}^{n} A_j B_{n-j} = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + A_2 B_{n-2} + \cdots + A_n B_0, \qquad \text{(IX.223)}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots.$$

* Формулу (IX.223) легко запомнить: первый ее член равен $A_0 B_n$, а последний — $A_n B_0$, причем сумма индексов у этих членов постоянна и равна n. Сумма индексов всех остальных членов $A_j B_{n-j}$ также постоянна и равна n, но при этом индекс j пробегает все значения от 0 до n.

Таблица 99

$c_{n+1} = -\frac{[\dot{a}_{n+1}b_n]}{n+1}$; $N_n = (n+1)(n+2)(n+3)$; $\dot{a}_{n+1} = (n+1)\,a_{n+1}$; $\gamma_{n+1} = \frac{\gamma_n}{n+1}$

γ_n	$4N_n$	$[\dot{a}_{n+1}b_n]$	c_n	$[\dot{a}_{n+1}c_n]$	n
1,00000000	24	+0,4207355	+0,5403023	+0,2701512	0
1,00000000	96	+0,5558111	—0,4207355	+0,05978340	1
0,50000000	240	+0,6700105	—0,2779056	—0,2080672	2
0,16666667	480	+0,1129584	—0,1233368	—0,2707650	3
$0{,}41666667\cdot10^{-1}$	840	—0,02252834	—0,02823961	—0,1677526	4
$0{,}83333333\cdot10^{-2}$	1344	—0,05613818	+0,004505668	—0,07081521	5
$0{,}13888889\cdot10^{-2}$	2016	—0,04241364	+0,009356363	—0,01723188	6
$0{,}19841270\cdot10^{-3}$	2880	—0,02172627	+0,006019091	+0,002271711	7
$0{,}24801587\cdot10^{-4}$	3960	—0,008344566	+0,002715784	+0,005497209	8
$0{,}27557319\cdot10^{-5}$	5280	—0,002202300	+0,0009271740	+0,003817575	9
$0{,}27557319\cdot10^{-6}$	6864	—0,0001305499	+0,0002202300	+0,001875971	10
$0{,}25052108\cdot10^{-7}$	8736		+0,00001186817	+0,0007256700	11
$0{,}20876758\cdot10^{-8}$	10920				12

В таком случае, выражая искомые функции y, z, v и заданную функцию $f(x) = e^x$ рядами

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n; \qquad v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n;$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n; \quad \gamma_n = \frac{1}{n!} = \frac{\gamma_{n-1}}{n},$$

получаем для определения коэффициентов a_n, b_n, c_n следующие рекуррентные формулы

$$a_{n+3} = \frac{\dot{a}^{(2)}_{n+1} + b_n + \gamma_n}{4N_n}; \quad b_{n+1} = \frac{[\dot{a}_{n+1}c_n]}{n+1}; \quad c_{n+1} = -\frac{[\dot{a}_{n+1}b_n]}{n+1}, \quad \text{(IX.224)}$$

где

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad b_0 = \sin 1; \quad c_0 = \cos 1;$$

$$N_n = (n+1)(n+2)(n+3).$$

Коэффициенты b_{n+1} и c_{n+1} определяем по формулам (IX.224) в один прием, без промежуточных записей. Для этого по уже найденным a_{n+1}, b_n, c_n вычисляем согласно (IX.223) величины $[\dot{a}_{n+1}b_n]$ или $[\dot{a}_{n+1}c_n]$ и полученный результат делим на $n+1$.

Все вычисления до $n = 15$ включительно, выполненные с семью значащими цифрами, приведены в табл. 99.

В табл. 100 по найденным коэффициентам a_n и $\dot{a}_{n+1}$ вычислены значения искомой функции $y(x)$ и ее первой производной $y'(x)$ для $x = \pm0{,}25$; $x = \pm0{,}50$; $x = \pm0{,}75$; $x = \pm1{,}00$, а на рис. 243 построены их графики на сегменте $[-1; +1]$.

Таблица 100

n	a_n	$\dot{a}_{n+1}$	$\dddot{4a}_{n+3}$	$x^n=(0{,}75)^n$	$x^n=(0{,}50)^n$	$x^n=(0{,}25)^n$
0	1,0000000	0,5000000	2,0914709	1,0000000	1,0000000	1,0000000
1	0,5000000	0,5000000	1,7701507	0,7500000	0,5000000	0,2500000
2	0,2500000	0,2614339	1,0413257	0,5625000	0,2500000	0,0625000
3	0,0871446	0,0737563	0,4325011	0,4218750	0,1250000	0,0156250
4	0,0184391	0,0216913	0,1377736	0,3164063	0,0625000	0,0039063
5	0,0043389	0,0054063	0,0404482	0,2373047	0,0312500	0,0009766
6	0,0009010	0,0011481	0,0129240	0,1779785	0,0156250	0,0002441
7	0,0001640	0,0002408	0,0051525	0,1334839	0,0078125	0,0000610
8	0,0000301	0,0000577	0,0024757	0,1001129	0,0039063	0,0000153
9	0,0000064	0,0000179	0,0012190	0,0750847	0,0019531	
10	0,0000008	0,0000069	0,0005515	0,0563135	0,0009766	
11	0,0000006	0,0000028	0,0002209	0,0422351		
12	0,0000002	0,0000010		0,0316763		
13	0,0000001	0,0000004		0,0237572		
14		0,0000001		0,0178179		
$y(+1)=1{,}8610268$;	$y(+x)=\sum a_n x^n=$			1,5594389	1,3246966	1,1420631
$y(-1)=0{,}6777176$;	$y(-x)=\sum a_n(-x)^n=$			0,7338066	0,8026367	0,8893314
$y'(+1)=1{,}3637665$;	$y'(+x)=\sum \dot{a}_{n+1}x^n=$			1,0615638	0,8261229	0,6425824
$y'(-1)=0{,}2049175$;	$y'(-x)=\sum \dot{a}_{n+1}(-x)^n=$			0,2466988	0,3073421	0,3902669

Кроме того, в табл. 100 выполнен числовой контроль результатов непосредственно по исходному дифференциальному уравнению (IX.219). С этой целью для какого-либо допустимого значения аргумента, например для $x=0{,}25$, воспользовавшись таблицами [14; 136] и вычисленными в табл. 100 $y(x)=1{,}1420631$ (*рад*) $=65°{,}435396=65°\,26'\,7'',43$; $y'(x)=0{,}6425824$, определяем (найдя предварительно $\log\sin y=\bar{1},95879943$):

$$\sin y=0{,}9094932,$$
$$y'^2=0{,}4129121,$$
$$e^{0{,}25}=1{,}2840254.$$

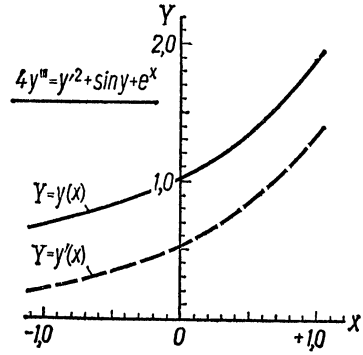


Рис. 243.

Подставив эти величины в правую часть уравнения (IX.219), имеем

$$y'^2+\sin y+e^x=2{,}6064307,$$

что в пределах точности вычислений совпадает со значением

$$4y'''(x)\big|_{x=0{,}25}=2{,}6064305,$$

которое получим, перемножив в табл. 100 колонку коэффициентов $\dddot{4a}_{n+3}$ на колонку степеней $x^n=(0{,}25)^n$. При этом для того, чтобы свести к минимуму ошибки округления, величины

$$\dddot{4a}_{n+3}=4(n+1)(n+2)(n+3)\,a_{n+3}$$

вычисляем не по коэффициентам a_n, а непосредственно по рекуррентной формуле (IX.224)

$$4N_n a_{n+3} = 4\dddot{a}_{n+3} = \dot{a}^{(2)}_{n+1} + b_n + \gamma_n,$$

взяв все необходимые величины из табл. 99.

Выполненный числовой контроль не является полным, поскольку в этих вычислениях участвует лишь ограниченное число коэффициентов, и притом не со всеми своими значащими цифрами, но этот контроль гарантирует от грубых ошибок. Надежность численного контроля легко повысить, выполнив его для нескольких различных значений (положительных и отрицательных) аргумента x. Более подробно вопрос контроля вычислений будет рассмотрен в § 116.

Упражнение 3. Продолжить вычисления в табл. 99 до $n = 20$ и полученные результаты проверить численно по исходному уравнению (IX.219) при $x = \pm 0{,}75$.

Решение, полученное для сегмента $[-1; +1]$, легко распространить на более широкий участок действительной оси. Для этого надо только построить последовательность степенных рядов, центры которых расположены на действительной оси, что требует вычисления с заданной точностью начальных условий для каждого нового ряда и последующего определения необходимого числа коэффициентов этого ряда. Процесс аналитического продолжения при помощи последовательности степенных рядов можно осуществить и в комплексной области вдоль заданного луча или вдоль любой заданной кривой. При этом такой процесс можно осуществлять до тех пор, пока не приблизимся к особой точке, о чем будет сигнализировать очень быстрый рост модулей коэффициентов очередного степенного ряда. Так, в рассматриваемом примере первые две особые точки, лежащие на действительной оси, будут: $x \approx -11{,}0$ и $x \approx 4{,}3$, а график искомой функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$ для расширенного интервала представлен на рис. 244. К этим вопросам мы еще вернемся в дальнейшем.

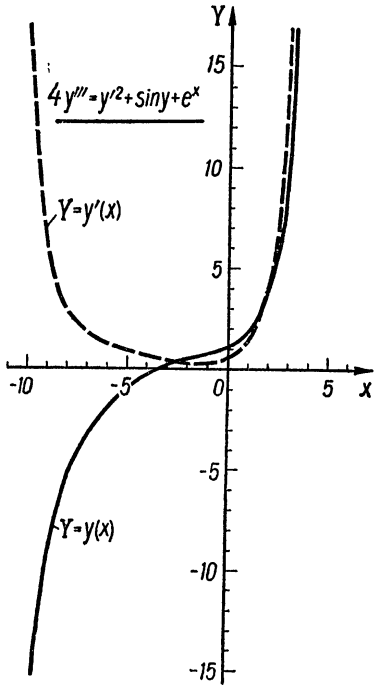


Рис. 244.

§ 114. Краевые задачи

Применим разработанный метод к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений или их систем. Так как краевую задачу можно обычным путем свести к решению эквивалентной задачи Коши, то изложить этот вопрос лучше всего на примерах.

Пример 1. Решить следующую краевую задачу для нелинейного уравнения второго порядка:

$$\frac{5}{2} y'' = y^2 + xe^x; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = 1{,}75. \tag{IX.225}$$

Решение. В отличие от задачи Коши, когда все начальные условия задаются в одной точке $x = x_0$, в данном случае необходимо найти такое решение уравнения (IX.225), которое проходило бы через две заданные точки, а именно — через точки

$$x = 0; \quad y = 1 \text{ и } x = 1; \quad y = 1{,}75.$$

Поэтому, приняв одно из краевых условий (например, первое $x = x_0 = 0$; $y_0 = 1$) в качестве начального условия и представив искомую и заданную функции рядами с центром $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n; \quad \gamma_0 = 0; \quad \gamma_{n+1} = \frac{1}{n!}, \tag{IX.226}$$

мы для коэффициентов a_n получаем обычным путем рекуррентную формулу

$$\frac{5}{2}\ddot{a}_{n+2} = a_n^{(2)} + \gamma_n; \quad a_0 = y_0 = 1,$$

или

$$a_{n+2} = \frac{a_n^{(2)} + \gamma_n}{2{,}5\,(n+1)(n+2)}; \quad a_0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{IX 227}$$

Для вычислений по формуле (IX.227) необходимо еще знать коэффициент a_1, который легко определить из второго граничного условия. Действительно, подставив значение $x = 1$ в ряд для искомой функции (IX.226), согласно второму краевому условию имеем

$$y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1.75. \tag{IX.228}$$

Условие (IX.228) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным a_1, так как все остальные коэффициенты будут определяться рекуррентной формулой (IX.227) через $a_0 = 1$ и a_1. Уравнение (IX.228) решаем одним из известных методов, но при этом надо иметь в виду, что по формуле (IX.227) проще всего находить числовые значения коэффициентов a_n, соответствующие данному фиксированному значению a_1, а не определять их в явном виде, как полиномы от независимой переменной a_1. Поэтому для решения уравнения (IX.228) наиболее подходящим является метод линейной аппроксимации, который изложен в § 86 гл. VII.

В табл. 101 приведены все вычисления для первых двух проб $a_1 = 0{,}3$ и $a_1 = 0{,}358$, а также окончательные результаты (с восемью десятичными знаками) для

$$a_1 = 0{,}35954570,$$

при котором

$$y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1{,}74999998,$$

так что условие (IX.228) удовлетворяется в пределах точности вычислений. Найденное решение, а также решение, соответствующее первой пробе $a_1 = 0{,}3$, представлены на рис. 245.

Так как уравнение (IX.228) является трансцендентным, то краевая задача (IX.225) может иметь не одно решение. Другие корни этого уравнения (если они существуют) можно найти тем же путем, взяв новый ряд проб для a_1 и вычислив соответствующие им $\sum a_n$.

Пример 2. Решить нелинейную краевую задачу второго порядка, которую мы заимствовали из монографии Л. Коллатца [55, стр. 102 и 157]:

$$y'' = \frac{3}{2}y^2; \quad y(0) = 4; \quad y(1) = 1. \tag{IX.229}$$

Таблица 101

$a_{n+2} = \frac{-\{a_n^{(2)} + \gamma_n\}}{2{,}5\,(n+1)\,(n+2)}$			$a_1 = 0{,}3$		$a_1 = 0{,}358$		$a_1 = 0{,}35954570$	
n	$2{,}5(n+1)\times$ $\times(n+2)$	γ_n	a_n	$a_n^{(2)}$	a_n	$a_n^{(2)}$	a_n	$a_n^{(2)}$
0	5	0	1,000	1,000	1,00000	1,00000	1,00000000	1,00000000
1	15	1,000000000	0,300	0,600	0,35800	0,71600	0,35954570	0,71909140
2	30	1,000000000	0,200	0,490	0,20000	0,52816	0,20000000	0,52927311
3	50	0,500000000	0,107	0,334	0,11440	0,37200	0,11460609	0,37303046
4	75	0,166666667	0,050		0,05094	0,22379	0,05097577	0,22436379
5	105	0,041666667	0,017		0,01744	0,11711	0,01746061	0,11741989
6	140	0,008333333			0,00521	0,05637	0,00521374	0,05650812
7	180	0,001388889			0,00151	0,02538	0,00151511	0,02544789
8	225	0,000198413			0,00046	0,01067	0,00046315	0,01070201
9	275	0,000024802			0,00015		0,00014909	0,00421246
10	330	0,000002756			0,00005		0,00004845	0,00157307
11	390	0,000000276					0,00001541	0,00056799
12	455	0,000000025					0,00000378	0,00020151
13	525	0,000000002					0,00000146	0,00007080
14	600						0,00000044	0,00002465
15	680						0,00000013	0,00000849
16							0,00000004	
17							0,00000001	
$y(1) = \sum a_n =$			1,674	—	1,74816	—	1,74999998	—

Решение. Рекуррентной формулой (IX.113) для уравнения (IX.229) будет

$$\ddot{a}_{n+2} = \frac{3}{2}\,a_n^{(2)}, \quad \text{или} \quad a_{n+2} = \frac{3a_n^{(2)}}{2\,(n+1)\,(n+2)}. \tag{IX.230}$$

В этом примере в качестве начального условия лучше использовать условие $y(1) = 1$ и решение искать в виде ряда с центром $x_0 = 1$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n; \quad a_0 = y(1) = 1. \tag{IX.231}$$

Тогда подставив в ряд (IX.231) значение $x = 0$, согласно первому краевому условию $y(0) = 4$ получаем уравнение для определения коэффициента a_1:

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \Big|_{x=0} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 4. \tag{IX.232}$$

Для того чтобы всесторонне исследовать краевую задачу (IX.229), зададимся при фиксированном $a_0 = 1$ рядом значений a_1 и вычислим по формулам (IX.230) и (IX.232) соответствующие им значения $y(0) = y_0$.

Результаты приведены на рис. 246 и в первых трех колонках табл. 102, где N есть количество членов ряда (IX.231), которое обеспечивает точность результатов с семью значащими цифрами. Таким образом, краевая задача (IX.229) имеет два действительных решения для всех значений $y(0) = y_0$, если

$y_0 > -3{,}707\ldots$, и вообще не имеет действительных решений или имеет только одно решение, если $y_0 \leqslant -3{,}707\ldots$. Соответствующие значения a_1 находим по заданному y_0 при помощи интерполяции (или непосредственно) по табл. 102 и, в частности, для $y(0) = 4$ имеем

$$a_1 = y'(1) = -1 \text{ и } a_1 = y'(1) = +34{,}96906. \tag{IX.233}$$

В этой же табл. 102 приведены до $n = 25$ коэффициенты a_n для искомого первого решения, соответствующего $a_1 = -1$, и значение суммы (IX.232) для

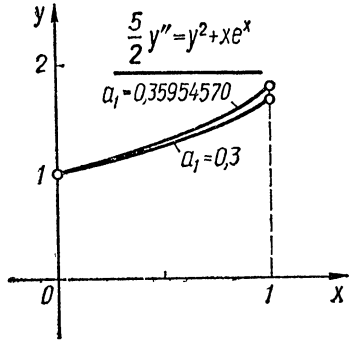


Рис. 245.

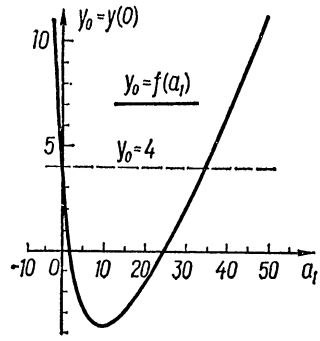


Рис. 246.

всех рассмотренных n. Продолжив эти вычисления до $k = n = 38$, мы и найдем с семью значащими цифрами, что при $a_1 = -1$

$$y(0) = \sum_{k=0}^{38} (-1)^k a_k = 4{,}000000.$$

Выделив из первого решения особенность, убеждаемся, что в точке $x = -1$ оно имеет полюс второго порядка и что ему можно придать следующий замкнутый вид:

$$y = \frac{4}{(1+x)^2}. \tag{IX.234}$$

Второе решение дает ряд (IX.231) при $a_0 = 1$; $a_1 = 34{,}96906$ (рис. 247).

Полученные результаты полностью совпадают с результатами Л. Коллатца, однако его предположение, что степенной ряд для второго решения есть расходящийся [55, стр. 158], в действительности не оправдывается. Более подробно решение примера 2 рассмотрено в [148, стр. 346—350].

Упражнение 1. Проверить дифференцированием, что решение (IX.234) действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (IX.229).

Пример 3. Решить нелинейную краевую задачу [55, стр. 114]

$$y'' = -(1 + e^y); \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 1, \tag{IX.235}$$

в которой неизвестная функция находится под знаком экспоненциала.

Решение. Вводя вспомогательную функцию

$$z = e^y = \sum b_n (x - x_0)^n; \quad z' = (e^y)' = y' e^y = y' z,$$

заменяем уравнение (IX.235) эквивалентной системой

$$y'' = -(1 + z); \quad z' = y' z. \tag{IX.236}$$

Таблица 102

$$y'' = \frac{3}{2}y^2; \quad y = \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n; \quad a_{n+2} = \frac{3a_n^{(2)}}{2(n+1)(n+2)}$$

a_1	y_0	N	n	a_n	$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k a_k$
−2	+6,582266	46	0	+1,0000000	+1,000000
−1	+4,000000	38	1	−1,0000000	+2,000000
0	+1,997032	28	2	+0,7500000	+2,750000
+1	+0,444444	38	3	−0,5000000	+3,250000
+2	−0,754320	46	4	+0,3125000	+3,562500
+3	−1,672510	55	5	−0,1875000	+3,750000
+4	−2,366334	64	6	+0,1093750	+3,859375
+5	−2,879370	75	7	$-0{,}6250000 \cdot 10^{-1}$	+3,921875
+6	−3,245710	86	8	$+0{,}3515625 \cdot 10^{-1}$	+3,957031
+7	−3,492257	100	9	$-0{,}1953125 \cdot 10^{-1}$	+3,976563
+8	−3,640390	115	10	$+0{,}1074219 \cdot 10^{-1}$	+3,987304
+9	−3,706221	133	11	$-0{,}5859375 \cdot 10^{-2}$	+3,993164
+10	−3,706521	156	12	$+0{,}3173828 \cdot 10^{-2}$	+3,996338
+11	−3,649439	184	13	$-0{,}1708984 \cdot 10^{-2}$	+3,998047
+12	−3,545036	220	14	$+0{,}9155274 \cdot 10^{-3}$	+3,998962
+13	−3,400712	268	15	$-0{,}4882813 \cdot 10^{-3}$	+3,999451
+14	−3,222529	336	16	$+0{,}2593994 \cdot 10^{-3}$	+3,999710
+15	−3,015467	385	17	$-0{,}1373291 \cdot 10^{-3}$	+3,999847
+20	−1,667766	—	18	$+0{,}7247925 \cdot 10^{-4}$	+3,999920
+25	+0,016010	—	19	$-0{,}3814697 \cdot 10^{-4}$	+3,999958
+30	+1,919542	—	20	$+0{,}2002716 \cdot 10^{-4}$	+3,999978
+35	+4,013552	—	21	$-0{,}1049042 \cdot 10^{-4}$	+3,999988
+40	+6,310694	—	22	$+0{,}5483627 \cdot 10^{-5}$	+3,999994
+45	+8,847347	—	23	$-0{,}2861023 \cdot 10^{-5}$	+3,999997
			24	$+0{,}1490116 \cdot 10^{-5}$	+3,999998
			25	$-0{,}7748604 \cdot 10^{-6}$	+3,999999

Тогда приняв первое краевое условие в качестве начального условия, т. е. представив искомые функции рядами с центром в точке $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad a_0 = y(0) = 0; \\ z &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n; \quad b_0 = z(0) = e^{y(0)} = 1, \end{aligned} \tag{IX.237}$$

для определения коэффициентов a_n и b_n согласно (IX.236) получаем следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} &a_{n+2} = -\frac{b_n + \gamma_n}{(n+1)(n+2)}; \quad b_{n+1} = \frac{[a_{n+1} b_n]}{n+1}; \\ &a_0 = 0; \quad b_0 = 1; \quad \gamma_0 = 1; \quad \gamma_n = 0 \text{ при } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{IX.238}$$

Коэффициент a_1, необходимый для начала рекуррентного процесса, определяем из второго граничного условия $y(1)=1$, которое в соответствии с (IX.237), (IX.238) приводит к уравнению

$$y(1)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big|_{x=1}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n=1 \qquad \text{(IX.239)}$$

с одним неизвестным a_1.

Уравнение (IX.239) решаем при помощи метода линейной аппроксимации. Взяв в качестве первых двух проб $a_1=a_1^{(I)}=2{,}5$ и $a_1=a_1^{(II)}=2{,}482$, которым соответствует

$$\sum a_n=+1{,}0181 \text{ и } \sum a_n=+1{,}006525,$$

определяем по ним согласно формуле (VII.17) § 86 более точное третье приближение

$$a_1=a_1^{(III)}=2{,}471853; \quad \sum a_n=+0{,}999974.$$

Все необходимые вычисления выполнены в табл. 103, причем для второй пробы мы привели только a_n и $[a_{n+1}b_n]$. Воспользовавшись еще раз формулой (VII.17), по второй и третьей пробам находим окончательное значение (с шестью десятичными знаками)

$$a_1=a_1^{(IV)}=2{,}471893,$$

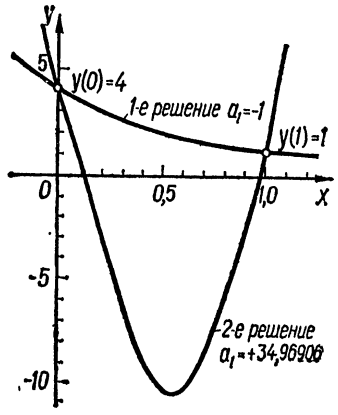


Рис. 247.

так что для завершения примера остается только вычислить по найденному a_1 все остальные коэффициенты a_n.

Упражнение 2. Вычислить с тремя десятичными знаками $y(1)=\sum a_n$ для $a_1=2{,}472$.

В примерах 1—3 мы ограничились рассмотрением только краевых задач для уравнений второго порядка, когда заданы значения искомой функции на концах интервала. Задачи с другими типами краевых условий, так же как и краевые задачи для уравнений более высокого порядка, решаются аналогично и не приводят к каким-либо принципиальным трудностям, хотя объем вычислений может существенно возрасти. Так, например, в случае уравнений более высокого порядка часть краевых условий может привести к системам трансцендентных уравнений для определения нескольких начальных коэффициентов.

Полученные системы решаем методом, изложенным в § 88 и 89. При этом надо по возможности максимальное число условий использовать в качестве начальных, которые не приводят к уравнениям, а непосредственно определяют собой a_0, a_1, a_2, ...

При решении краевых задач при помощи степенных рядов наиболее простые результаты получаются для линейных уравнений. В этом случае уравнения для определения неизвестных коэффициентов могут быть получены в явном виде. Не имея возможности изложить этот вопрос во всей его общности, мы рассмотрим в следующем параграфе только один из наиболее важных классов краевых задач, а именно — класс задач, в которых определяются так называемые собственные значения.

Таблица 103

$y'' + 1 + e^y = 0$
$y(0) = a_0 = 0$
$y(1) = 0$

$y^\circ = -(1+z)$; $z' = y'z$;
$y = \sum a_n x^n$; $z = \sum b_n x^n$; $a_{n+2} = -\dfrac{b_n + \gamma_n}{(n+1)(n+2)}$; $b_{n+1} = \dfrac{[\dot a_{n+1} b_n]}{n+1}$; $a_0 = 0$; $b_0 = 1$; $\dot a_{n+1} = (n+1)\, a_{n+1}$

n	$(n+1)\times(n+2)$	γ_n	$a_1 = a_1^{(I)} = 2{,}5$				$a_1 = a_1^{(II)} = 2{,}482$		$a_1 = a_1^{(III)} = 2{,}471853$				n
			a_n	b_n	$\dot a_{n+1}$	$[a_{n+1} b_n]$	a_n	$[\dot a_{n+1} b_n]$	a_n	b_n	$\dot a_{n+1}$	$[\dot a_{n+1} b_n]$	
0	2	1	0	+1,0000	+2,5000	+2,5000	0	+2,482000	0	+1,000000	+2,471853	+2,471853	0
1	6	0	+2,5000	+2,5000	−2,0000	+4,5000	+2,482000	+0,160324	+2,471853	−2,471853	−2,000000	+4,110057	1
2	12	0	−1,0000	+2,1250	−1,2500	−0,9375	−1,000000	−1,042038	−1,000000	+2,055029	−1,235928	−1,099904	2
3	20	0	−0,4167	−0,3125	−0,7084	−8,8647	−0,413667	−8,795987	−0,411976	−0,366635	−0,695008	−8,756366	3
4	30	0	−0,1771	−2,2162	+0,0780	−9,2647	−0,173347	−8,978854	−0,171252	−2,189092	+0,091660	−8,819291	4
5	42	0	+0,0156	−1,8529	+0,4434	−0,6762	+0,017367	−0,415088	+0,018332	−1,763858	+0,437810	−0,272000	5
6	56	0	+0,0739	−0,1127	+0,3087	+7,9986	+0,073300	+7,961142	+0,072970	−0,045333	+0,293979	+7,936937	6
7	72	0	+0,0441	+1,1427	+0,0160	+8,6738	+0,042756	+8,351882	+0,041997	+1,133848	+0,006480	+8,172199	7
8	90	0	+0,0020	+1,0842	−0,1431	+2,1200	+0,001235	+1,808800	+0,000810	+1,021525	−0,141732	+1,638897	8
9	110	0	−0,0159	+0,2356	−0,1200	−4,5953	−0,015796	−4,627882	−0,015748	+0,182100	−0,113500	−4,641637	9
10	132	0	−0,0120	−0,4595	−0,0231	−5,9314	−0,011600	−5,695870	−0,011350	−0,464164	−0,018205	−5,563126	10
11	156	0	−0,0021	−0,5392	+0,0420	−2,2859	−0,018270	−2,023500	−0,001655	−0,505739	+0,042192	−1,879331	11
12	182	0	+0,0035	−0,1905	+0,0455	+1,9925	+0,003506	+2,063118	+0,003516	−0,156611	+0,042146	+2,099494	12
13	210	0	+0,0035	+0,1533	+0,0140	+3,2491	+0,003319	+3,235878	+0,003242	+0,161500	+0,012054	+3,160478	13
14	240	0	+0,0010	+0,2321	−0,0105	+1,7131	+0,000927	+1,554822	+0,000861	+0,225748	−0,011535	+1,455725	14
15	272	0	−0,0007	+0,1142	−0,0160	−0,6181	−0,000756	−0,704684	−0,000769	+0,097048	−0,015056	−0,743412	15
16	306	0	−0,0010	−0,0386	−0,0068	−1,6575	−0,000963	−1,614603	−0,000941	−0,046463	−0,006069	−1,580376	16
17	342	0	−0,0004	−0,0975			−0,000381	−0,979534	−0,000357	−0,092953	+0,002736	−0,920908	17
18	380	0	+0,0001				+0,000144	+0,143540	+0,000152	−0,051162	+0,005168	+0,173909	18
19	420	0	+0,0003				+0,000278	+0,725692	+0,000272	+0,009153	+0,002700	+0,713882	19
20	462	0					+0,000143	+0,541950	+0,000135	+0,035694	−0,000462	+0,511126	20
21	506	0					−0,000018	+0,031224	−0,000022	+0,024339	−0,001694	+0,011272	21
22	552	0					−0,000079	−0,296489	−0,000077	+0,000512	−0,001104	−0,294348	22
23	600	0					−0,000051	−0,272489	−0,000048	−0,012798	−0,000024	−0,257794	23
24	650	0					−0,000003		−0,000001	−0,010741	+0,000525	−0,046698	24
25	702	0					+0,000021		+0,000021	−0,001868	+0,000442	+0,110543	25
26	756	0					+0,000017		+0,000017	+0,004252	+0,000081	+0,120512	26
27	812	0							+0,000003	+0,004463			27
28									−0,000006				28
29									−0,000005				29
$y(1) = \sum a_n =$			+1,0181;		$y(1) = \sum a_n =$		+1,006525;	$\sum a_n =$	+0,999974				

§ 115. Определение собственных значений. Задача Штурма — Лиувилля

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка*

$$[p(x)\,y']' + [q(x) + \lambda\rho(x)]\,y = 0 \qquad \text{(IX.240)}$$

с однородными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= 0, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX.241)}$$

где $p(x) > 0$; $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$; $|\beta_0| + |\beta_1| = 0$; $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — непрерывные функции, а λ — параметр.

Очевидно, что функция $y \equiv 0$ есть решение дифференциального уравнения (IX.240), удовлетворяющее краевым условиям (IX.241). Однако обычно представляют интерес нетривиальные решения краевой задачи (IX.240)—(IX.241).

Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения однородной краевой задачи, называются *характеристическими значениями данной краевой задачи, фундаментальными*, или *характеристическими числами*, а также *собственными значениями*. Последнее название получило наибольшее распространение. Соответствующие нетривиальные решения $y(x, \lambda)$ называются *фундаментальными* или *собственными функциями*.

Задача отыскания собственных значений и собственных функций для уравнения (IX.240) носит название *задачи Штурма—Лиувилля* (Jacques Charles François Sturm, 1803—1855; Joseph Liouville, 1809—1882). Кроме задачи Штурма—Лиувилля, которая является наиболее распространенной задачей данного класса, часто возникает необходимость в определении собственных значений и для других типов дифференциальных уравнений.

Задачи на определение собственных значений возникают чаще всего в математической физике в связи с самыми разными вопросами. Например, они могут появиться в связи с уравнением теплопроводности

$$V_t' = L(V); \quad L(u) = P_0(x)\,u'' + P_1(x)\,u' + P_2(x)\,u,$$

если мы разыскиваем частные решения вида

$$V = u(x)\,e^{-\lambda t},$$

или в связи с волновым уравнением

$$V_{tt}'' = L(V),$$

если мы разыскиваем частные решения вида

$$V = u(x)\cos\sqrt{\lambda}\,t.$$

Наконец, такие задачи могут появиться после разделения переменных в более общих дифференциальных уравнениях в частных производных.

Поэтому, как справедливо считают многие авторы (см., напр., [86, стр. 245; 118, стр. 154]), определение собственных значений является одной из наиболее важных и вместе с тем наиболее трудных задач, связанных с численным решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для определения собственных значений разработано большое число различных методов, но все они довольно трудоемки и позволяют находить, главным образом, первые два-три собственных значения. Дальнейшие подробности, касающиеся этого вопроса, читатель найдет в книгах [1, 35, 47, 55, 86, 108, 118, 119, 125, 182, 184], в которых приведена также подробная библиография, насчитывающая многие сотни названий.

---

* Уравнение вида (IX.240) называется *самосопряженным*.

Решение задачи об определении собственных значений можно существенно упростить, если воспользоваться степенными рядами. При этом расчетные формулы получаются настолько простыми, что даже при ручном счете можно определить три—пять первых собственных значений с любой наперед заданной степенью точности.

Пример 1. Решить простейшую задачу Штурма—Лиувилля:

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{IX.242}$$

при краевых условиях

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{IX.243}$$

Решение. Будем искать решение $y = y(x, \lambda)$ для заданного уравнения в виде степенного ряда с центром в точке $x_0 = 0$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad a_0 = y(0) = 0; \quad a_1 = 1, \tag{IX.244}$$

коэффициенты которого согласно (IX.242) будут определяться рекуррентной формулой

$$a_{n+2} = -\lambda \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{IX.245}$$

Ввиду однородности задачи искомое решение $y = y(x, \lambda)$ определено с точностью до постоянного множителя. Поэтому в формулах (IX.244) и (IX.245), не нарушая общности, мы можем положить $a_1 = 1$. Тогда, подставив в (IX.245) $a_0 = 0$, находим, что все четные коэффициенты

$$a_{2\nu} = 0; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

а из $a_1 = 1$ получаем последовательно

$$a_3 = -\frac{\lambda}{3!}; \quad a_5 = +\frac{\lambda^2}{5!}; \quad a_7 = -\frac{\lambda^3}{7!}; \ldots;$$

$$a_{2\nu+1} = (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{(2\nu+1)!}; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

так что искомым решением будет ряд

$$y = x - \frac{\lambda}{3!}x^3 + \frac{\lambda^2}{5!}x^5 - \frac{\lambda^3}{7!}x^7 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{1/2}}\left(\lambda^{1/2}x - \frac{\lambda^{3/2}x^3}{3!} + \frac{\lambda^{5/2}x^5}{5!} - \frac{\lambda^{7/2}x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Выполнив суммирование ряда, стоящего в скобках, придаем этому решению окончательный вид

$$y = y(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\, x. \tag{IX.246}$$

Положив в (IX.246) $x = 1$ и воспользовавшись вторым краевым условием, получаем уравнение для определения собственных значений:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \tag{IX.247}$$

откуда

$$\lambda_k = (k\pi)^2; \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{IX.248}$$

так как только при этих значениях λ_k искомое решение (IX.246) обратится в нуль на обоих концах заданного сегмента, т. е. в точках $x = 0$ и $x = 1$.

Таким образом, искомые собственные значения определяются формулой (IX.248), а соответствующие им собственные функции получим из (IX.246), положив $\lambda = \lambda_k$:

$$y = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x; \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{IX.249}$$

В рассматриваемом простейшем примере, просуммировав искомый ряд, мы получили решение задачи Штурма—Лиувилля в замкнутом виде. Однако для более сложных случаев, которые чаще всего и встречаются на практике, редко удается просуммировать в замкнутом виде полученный ряд, поэтому решим данный пример также численным путем, не прибегая к точному решению (IX.246), а воспользовавшись только рекуррентной формулой (IX.245). Для этого подставим найденные по формуле (IX.245) коэффициенты

$$a_{2\nu} = 0; \quad a_{2\nu+1} = (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{(2\nu+1)!} \tag{IX.250}$$

непосредственно в ряд (IX.244) и, положив в нем $x = 1$, согласно второму краевому условию получим для определения собственных значений $\lambda = \lambda_k$ следующее уравнение:

$$f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{2\nu+1}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3!} + \frac{\lambda^2}{5!} - \frac{\lambda^3}{7!} + \cdots = 0. \tag{IX.251}$$

Уравнение (IX.251) будем решать по методу Ньютона, уточняя нулевое приближение $\lambda_k^{(0)}$ для каждого из рассматриваемых значений $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, по формуле

$$\lambda_k^{(n+1)} = \lambda_k^{(n)} - \varepsilon_n(\lambda_k); \quad \varepsilon_n(\lambda_k) = \frac{f(\lambda_k^{(n)})}{f'(\lambda_k^{(n)})}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{IX.252}$$

где согласно (IX.251)

$$f'(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_{2\nu+1}(\lambda)\}' = -\frac{1}{3!} + \frac{2\lambda}{5!} - \frac{3\lambda^2}{7!} + \ldots, \tag{IX.253}$$

причем дифференцирование выполняется по параметру λ, который мы здесь рассматриваем как аргумент, определяющий собой все последующие коэффициенты

$$a_{2\nu+1} = a_{2\nu+1}(\lambda).$$

Величину $f(\lambda)$ для каждого фиксированного значения параметра λ проще всего определить, вычислив необходимое количество нечетных коэффициентов непосредственно по рекуррентной формуле

$$a_{2\nu+1}(\lambda) = -\lambda \frac{a_{2\nu-1}(\lambda)}{2\nu(2\nu+1)}; \quad a_1(\lambda) \equiv 1; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{IX.254}$$

которую получим, положив в (IX.245) $n = 2\nu - 1$.

Величины $\{a_{2\nu+1}(\lambda)\}'$, определяющие собой $f'(\lambda)$, вычисляем по найденным $a_{2\nu+1}(\lambda)$ согласно формуле

$$\{a_{2\nu+1}(\lambda)\}' = \frac{\nu}{\lambda} a_{2\nu+1}(\lambda), \tag{IX.255}$$

которую получим, продифференцировав по λ (IX.250):

$$\{a_{2\nu+1}(\lambda)\}' = (-1)^{\nu} \frac{\nu \cdot \lambda^{\nu-1}}{(2\nu+1)!} = \frac{\nu}{\lambda} a_{2\nu+1}(\lambda).$$

Переходим к определению первого собственного значения $\lambda = \lambda_1$. Из (IX.251) ясно, что все корни этого уравнения могут быть только положительными и наименьший из них должен удовлетворять неравенству

$$\lambda_1 > 3! = 6,$$

так как при $\lambda = \lambda_1 \leqslant 6$ все последующие члены $a_{2\nu+1}(\lambda)$ будут монотонно убывать и сумма ряда будет строго положительной. При любом отрицательном значении $\lambda = -\gamma$, $\gamma > 0$ из (IX.251) вытекает, что

$$f(\lambda) = 1 + \frac{\gamma}{3!} + \frac{\gamma^2}{5!} + \frac{\gamma^3}{7!} + \cdots > 1,$$

и, следовательно, отрицательные значения λ не могут быть корнями уравнения (IX.251).

Поэтому, взяв в качестве нулевого приближения

$$\lambda_1^{(0)} = 10$$

и вычислив с четырьмя десятичными знаками для него

$$f(\lambda_1^{(0)}) = -0{,}0065, \quad f'(\lambda_1^{(0)}) = -0{,}0497, \quad \varepsilon_0(\lambda_1) = +0{,}13,$$

согласно формуле (IX.252) находим первое приближение:

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(0)} - \varepsilon_0(\lambda_1) = 10{,}00 - 0{,}13 = 9{,}87.$$

По первому приближению, повторив эти вычисления, получаем второе приближение, а затем третье:

$$\lambda_1^{(2)} = 9{,}869604; \quad \lambda_1^{(3)} = 9{,}869604401089.$$

В каждом из них все вычисленные знаки верные, так как точное значение для λ_1 согласно (IX.248) есть

$$\lambda_1 = \pi^2 = 9{,}86960440108935 \ldots$$

Аналогичным путем, отправляясь от нулевых приближений $\lambda_2^{(0)} = 40$ и $\lambda_3^{(0)} = 90$, находим соответственно после трех и двух приближений

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(3)} = 39{,}47841760436; \quad \lambda_3 = \lambda_3^{(2)} = 88{,}82644,$$

точные значения которых

$$\lambda_2 = 4\pi^2 = 39{,}4784176043574 \ldots; \quad \lambda_3 = 9\pi^2 = 88{,}8264396098 \ldots.$$

Все необходимые для определения $\lambda_1 = \lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2 = \lambda_2^{(3)}$ вычисления, выполненные по формулам (IX.251) — (IX.255), приведены в табл. 104.

Таким образом, в данном примере формула Ньютона (IX.252) в каждом шаге позволяет примерно удвоить число верных знаков, а при определении каждого последующего собственного значения λ_k:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5 < \cdots,$$

благодаря квадратичному росту множителя

$$2\nu(2\nu + 1),$$

число рассматриваемых членов ряда (IX.251) увеличивается всего на четыре — шесть членов (при $k \leqslant 10$). Так как вычисление каждого последующего $a_{2\nu+1}$ по формуле (IX.254) выполняется в один прием и требует только умножения на

$y'' + \lambda y = 0$		$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)} = 10$		$\lambda_1^{(1)} = 9{,}87$	
ν	$2\nu(2\nu+1)$	$a_{2\nu+1}$	$\{a_{2\nu+1}\}'$	$a_{2\nu+1}(\lambda_1)$	$\{a_{2\nu+1}(\lambda_1)\}'$
0	0	+1,0000	0	+1,00000000	0
1	6	−1,6667	−0,1667	−1,64500000	−0,166667
2	20	+1,8333	+0,1667	+0,81180750	+0,164500
3	42	−0,1984	−0,0595	−0,19077476	−0,057986
4	72	+0,0276	+0,0110	+0,02615204	+0,010599
5	110	−0,0025	−0,0013	−0,00234655	−0,001189
6	156	+0,0002	+0,0001	+0,00014846	+0,000090
7	210			−0,00000698	−0,000005
8	272			+0,00000025	
9	342			−0,00000001	
10	420				
11	506				
12	600				
13	702				
14	812				
15	930				
16	1056				
$\sum_{2\nu+1} =$		−0,0065	−0,0497	−0,00002005	−0,050657
		$\varepsilon_0(\lambda_1) = +0{,}13$		$\varepsilon_1(\lambda_1) = +0{,}000396$	
		$\lambda_1^{(1)} = 10 - 0{,}13 =$		$\lambda_1^{(2)} = 9{,}869604$	
		$= 9{,}87$			

одно и то же число λ и последующего деления на $2\nu(2\nu+1)$, то для определения первых пяти собственных значений задачи (IX.242) — (IX.243) с шестью-семью верными цифрами потребуется 2—3 рабочих дня при ручном счете и несколько минут при работе на ЭВМ.

Упражнение 1. Вычислить по $\lambda_1^{(2)} = 9{,}8696$ третье приближение для λ_1, а также λ_3 с семью значащими цифрами.

Ход решения данной задачи останется тем же и при других краевых условиях. Так, например, определим собственные значения для уравнения (IX.242) при краевых условиях

$$y(0) = 0; \quad y'(1) = 0. \tag{IX.256}$$

В данном случае коэффициенты ряда (IX.244) будут определяться той же рекуррентной формулой (IX.245), но из второго краевого условия (IX.256) для определения собственных значений вместо (IX.251) получим теперь следующее уравнение*:

$$f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \dot{a}_{2\nu+1}(\lambda) = 0, \tag{IX.257}$$

* Отметим, что здесь необходимо различать два символа: $\dot{a}_{n+1} = (n+1)\,a_{n+1}$ — коэффициенты ряда для производной от искомого решения $y' = y'(x) = \frac{dy}{dx}$ и $\{a_n(\lambda)\}' = \frac{da_n(\lambda)}{d\lambda}$ — производную по параметру λ от коэффициентов искомого ряда $y = y(x, \lambda)$.

Таблица 104

$\lambda_2 = \lambda_2^{(0)} = 40$		$\lambda_2^{(1)} = 39{,}5$		$\lambda_2^{(2)} = 39{,}4784$	
$a_{2\nu+1}$	$\{a_{2\nu+1}\}'$	$a_{2\nu+1}(\lambda_2)$	$\{a_{2\nu+1}(\lambda_2)\}'$	$a_{2\nu+1}(\lambda_2)$	$\{a_{2\nu+1}(\lambda_2)\}'$
+1,0000	0	+1,00000000	0	+1,000000000000	0
−6,6667	−0,1667	−6,58333333	−9,166667	−6,579733333333	−0,166666667
+13,3333	+0,6667	+13,00208333	+0,658333	+12,987867221333	+0,657973333
−12,6984	−0,9524	−12,22814980	−0,928720	−12,208100412159	−0,927704802
+7,0547	+0,7055	+6,70849885	+0,679342	+6,693837101547	+0,678227801
−2,5653	−0,3207	−2,40896095	−0,304932	−2,402381623906	−0,304265323
+0,6578	+0,0987	+0,60996127	+0,092652	+0,607962709623	+0,092399293
−0,1253	−0,0219	−0,11473081	−0,020332	−0,114292357312	−0,020265424
+0,0184	+0,0037	+0,01666128	+0,003374	+0,016588527202	+0,003361540
−0,0022	−0,0005	−0,00192433	−0,000438	−0,001914878691	−0,000436540
+0,0002	+0,0001	+0,00018098	+0,000046	+0,000179991302	+0,000045592
		−0,00001413	−0,000004	−0,000014043021	−0,000003913
		+0,00000093		+0,000000923993	+0,000000281
		−0,00000005		−0,000000051963	−0,000000017
				+0,000000002526	+0,000000001
				−0,000000000107	
				+0,000000000004	
+0,0065	+0,0123	+0,00027324	+0,012654	−0,000000222962	+0,012665155
$\varepsilon_0(\lambda_2) = +0{,}52$		$\varepsilon_1(\lambda_2) = +0{,}02159$		$\varepsilon_2(\lambda_2) = -0{,}00001760436$	
$\lambda_2^{(1)} = 40 - 0{,}5 =$		$\lambda_2^{(2)} = 39{,}47841 \approx$		$\lambda_2^{(3)} = 39{,}47841760436$	
$= 39{,}5$		$\approx 39{,}4784$			

где согласно (IX.111) и (IX.250)

$$\dot{a}_{2\nu+1}(\lambda) = (2\nu+1)\, a_{2\nu+1}(\lambda) = (-1)^{\nu}\frac{\lambda^{\nu}}{(2\nu)!}. \qquad \text{(IX.258)}$$

Подставив это значение в (IX.257), имеем

$$f(\lambda) = \sum \dot{a}_{2\nu+1}(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2!} + \frac{\lambda^2}{4!} - \frac{\lambda^3}{6!} + \cdots = \cos\sqrt{\lambda} = 0, \qquad \text{(IX.259)}$$

откуда и находим искомые собственные значения

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{2k+1}{2}\pi, \text{ или } \lambda_k = \frac{(2k+1)^2}{4}\pi^2;\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad \text{(IX.260)}$$

Далее, задача Штурма—Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0;\quad y(-1) = y(+1) = 0 \qquad \text{(IX.261)}$$

будет иметь своим решением ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n = (x+1) - \frac{\lambda}{3!}(x+1)^3 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,(x+1) \qquad \text{(IX.262)}$$

с коэффициентами a_n, определяемыми формулой (IX.250), так как в данном примере величина коэффициентов искомого ряда не зависит от выбора его центра x_0.

Тогда из (IX.262) согласно второму краевому условию имеем

$$y(x, \lambda)|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin 2\sqrt{\lambda} = 0,$$

и, следовательно, собственными значениями будут

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2; \quad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{IX.263}$$

Численное решение в этом случае можно осуществить по тем же формулам (IX.251) — (IX.255), в которых надо только коэффициенты $a_{2\nu+1}$ заменить на коэффициенты

$$A_{2\nu+1}(\lambda) = 2^{2\nu+1} a_{2\nu+1}(\lambda). \tag{IX.264}$$

Таким образом, полученные ранее результаты можно распространить на данный случай, разделив прежние λ_k на 4:

$$\lambda_1^{(2)} = 2{,}467401; \quad \lambda_2^{(3)} = 9{,}86960440109; \quad \lambda_3^{(2)} = 22{,}20661,$$

что в пределах точности вычислений совпадает с точными значениями

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2{,}467401100 \ldots; \quad \lambda_2 = \pi^2 = 9{,}869604401089 \ldots;$$

$$\lambda_3 = \frac{9\pi^2}{4} = 22{,}066099 \ldots.$$

Пример (IX.261) впервые был рассмотрен в мемуаре В. Ритца [125, т. IV, стр. 570; 148, стр. 363] для иллюстрации разработанного им вариационного метода решения некоторых задач математической физики. Применив этот метод к задаче об определении собственных значений, Ритц во втором приближении получил уравнение

$$4\lambda^3 - 450\lambda^2 + 8910\lambda - 19305 = 0,$$

корни которого и дают приближенные значения искомых λ_k:

$$\lambda_1^{(2)} = 2{,}467401108 \ldots; \quad \lambda_3^{(2)} = 23{,}301 \ldots,$$

т. е. во втором приближении первое собственное значение определено весьма точно, а третье имеет погрешность равную 5%.

Пример 2. Определить первые пять собственных значений для уравнения

$$y'' + \lambda x y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{IX.265}$$

при тех же граничных условиях, что и в примере 1.

Решение. Будем искать решение однородного уравнения (IX.265) в виде ряда с центром в точке $x_0 = 0$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = 0, \tag{IX.266}$$

коэффициенты которого в соответствии с формулой (IX.169) определяем следующей рекуррентной формулой:

$$\ddot{a}_{n+2} + \lambda a_{n-1} = 0.$$

Заменив согласно (IX.111) $\ddot{a}_{n+2} = (n+1)(n+2)\,a_{n+2}$ и выполнив сдвиг на единицу в индексах, получаем

$$a_{n+3} = -\frac{\lambda a_n}{(n+2)(n+3)};\ a_0 = a_2 = 0;\ a_1 = 1;\ n \geqslant 0. \qquad \text{(IX.267)}$$

В таком случае

$$a_3 = 0;\ a_4 = -\frac{\lambda}{3\cdot 4};\ a_5 = a_6 = 0;\ a_7 = -\frac{\lambda a_4}{6\cdot 7} = \frac{\lambda^2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7};\ \ldots,$$

или в общем виде

$$a_{3\nu} = a_{3\nu+2} \equiv 0;\ a_1 = 1,\ a_{3\nu+1} = (-1)^\nu \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3\nu-1)\,\lambda^\nu}{(3\nu+1)!}. \qquad \text{(IX.268)}$$

Подставив эти значения в ряд (IX.266) и положив в нем $x = 1$, согласно второму краевому условию получаем уравнение для определения собственных значений $\lambda = \lambda_k$:

$$f(\lambda) = y(x,\ \lambda)\,|_{x=1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{3\nu+1}(\lambda) =$$

$$= 1 - \frac{2\lambda}{4!} + \frac{2\cdot 5\lambda^2}{7!} - \frac{2\cdot 5\cdot 8\lambda^3}{10!} + \ldots = 0. \qquad \text{(IX.269)}$$

Уравнение (IX.269) решаем по формуле Ньютона (IX.252), учтя, что в данном примере

$$f'(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \{a_{3\nu+1}(\lambda)\}' =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{2\lambda}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \frac{3\lambda^2}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10} + \ldots; \qquad \text{(IX.270)}$$

$$a_{3\nu+1}(\lambda) = -\frac{\lambda a_{3\nu-2}}{3\nu(3\nu+1)};\ a_1(\lambda) \equiv 1;\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots; \qquad \text{(IX.271)}$$

$$\{a_{3\nu+1}(\lambda)\}' = \frac{\nu}{\lambda} a_{3\nu+1}(\lambda), \qquad \text{(IX.272)}$$

так как, дифференцируя по λ (IX.268), имеем

$$\{a_{3\nu+1}(\lambda)\}' = (-1)^\nu \nu \frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3\nu-1)\,\lambda^{\nu-1}}{(3\nu+1)!} = \frac{\nu}{\lambda} a_{3\nu+1}(\lambda). \qquad \text{(IX.273)}$$

Формулу (IX.271), по которой удобнее всего вычислять коэффициенты $a_{3\nu+1}(\lambda)$, получаем, положив в (IX.267)

$$n = 3\nu - 2.$$

Наименьший положительный корень $\lambda = \lambda_1$ уравнения (IX.269) должен удовлетворять неравенству

$$\lambda_1 > \frac{4!}{2} = 12.$$

Поэтому, взяв в качестве нулевого приближения

$$\lambda_1^{(0)} = 15$$

и вычислив по формулам (IX.269) — (IX.272) соответствующие ему $f(\lambda_1^{(0)}) =$

$= +0{,}128$; $f'(\lambda_1^{(0)}) = -0{,}037$; $\varepsilon_0(\lambda_1) = -3{,}5$, согласно формуле Ньютона (IX.252) находим первое приближение:

$$\lambda_1^{(1)} = 15{,}0 + 3{,}5 = 18{,}5.$$

Все дальнейшие вычисления, необходимые для определения первого собственного значения с 14 значащими цифрами, приведены в табл. 105.

$y'' + \lambda xy = 0$; $\lambda_1^{(1)} = 18{,}5$			$\lambda_1 = \lambda_1^{(2)} = 18{,}95$		$\lambda_1 = \lambda_1^{(3)} = 18{,}95627$	
ν	$a_{3\nu+1}$	$\{a_{3\nu+1}\}'$	$a_{3\nu+1}(\lambda_1)$	$\{a_{3\nu+1}(\lambda_1)\}'$	$a_{3\nu+1}(\lambda_1)$	$\{a_{3\nu+1}(\lambda_1)\}'$
0	+1,0000	0	+1,00000000	0	+1,00000000000000	0
1	−1,5417	−0,0833	−1,57916667	−0,0833333	−1,57968916666667	−0,083333333
2	+0,6791	+0,0734	+0,71250496	+0,0751984	+0,71297653236687	+0,075223294
3	−0,1396	−0,0226	−0,15002188	−0,0237502	−0,15017084056900	−0,023765884
4	+0,0166	+0,0036	+0,01822381	+0,0038467	+0,01824794230739	+0,003850534
5	−0,0013	−0,0004	−0,00143892	−0,0003797	−0,00144130383885	−0,000380165
6	+0,0001		+0,00007973	+0,0000252	+0,00007988814246	+0,000025286
7			−0,00000327	−0,0000012	−0,00000327788138	−0,000001210
8			+0,00000010		+0,00000010356067	+0,000000044
9					−0,00000000259672	−0,000000001
10					+0,00000000005293	
11					−0,00000000000089	
12					+0,00000000000001	
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
$\sum =$	+0,0132	−0,0293	+0,00017786	−0,0283939	−0,00000012512318	−0,028381435
	$\varepsilon_1(\lambda_1) = -0{,}45$		$\varepsilon_2(\lambda_1) = -0{,}006264$		$\varepsilon_3(\lambda_1) = +0{,}000004408628$	
	$\lambda_1^{(2)} = 18{,}95$		$\lambda_1^{(3)} = 18{,}956264$		$\lambda_1^{(4)} = 18{,}956265591372$	

Для второго собственного значения, взяв $\lambda_2^{(0)} = 80$ и ограничившись еще тремя приближениями, получаем последовательно

$$f(\lambda_2^{(0)}) = -0{,}0142; \quad f'(\lambda_2^{(0)}) = +0{,}00763;$$

$$\lambda_2^{(1)} = 80 + \frac{0{,}0142}{0{,}00763} = 81{,}9;$$

$$f(\lambda_2^{(1)}) = +0{,}0000993; \quad f'(\lambda_2^{(1)}) = +0{,}007401; \quad \lambda_2^{(2)} = 81{,}8866;$$

$$f(\lambda_2^{(2)}) = +0{,}0000001230400; \quad f'(\lambda_2^{(2)}) = +0{,}0074022945;$$

$$\varepsilon_2(\lambda_2) = +0{,}00001662187; \quad \lambda_2^{(3)} = \lambda_2^{(2)} - \varepsilon_2 = 81{,}88658337813.$$

Вычисление всех коэффициентов $a_{3\nu+1}(\lambda)$ и $\{a_{3\nu+1}(\lambda)\}'$, по которым находим $f(\lambda)$ и $f'(\lambda)$ для $\lambda_2 = \lambda_2^{(2)}$ (и для второго приближения третьего собственного значения $\lambda_3 = \lambda_3^{(2)} = 189{,}2209$), выполнено в последних колонках табл. 105. Аналогичным путем (ограничиваясь шестью-семью значащими цифрами) находим четвертое и пятое собственное значение и в результате получаем

Таблица 105

$\lambda_2 = \lambda_2^{(2)} = 81{,}8866$		$\lambda_3 = \lambda_3^{(2)} = 189{,}2209$	
$a_{3\nu+1}(\lambda_2)$	$\{a_{3\nu+1}(\lambda_2)\}'$	$a_{3\nu+1}(\lambda_3)$	$\{a_{3\nu+1}(\lambda_3)\}'$
+1,0000000000000	0	+1,00000000000000	0
−6,8238833333333	−0,8333333333	−15,76840833333333	−0,083333333333
+13,3043953562698	+0,3249468254	+71,04077181906746	+0,750876587302
−12,1050188975636	−0,4434798452	−149,35998644776202	−2,368025727303
+6,3540951311361	+0,3103850999	+181,16686576688034	+3,829743242251
−2,1679801931887	−0,1323769819	−142,83565579411787	−3,774307903476
+0,5190892599052	+0,0380347402	+79,02775246038947	+2,505888698143
−0,0920053129657	−0,0078649888	−32,36732131067556	−1,197390188795
+0,0125566704345	+0,0012267375	+10,20762278165868	+0,431564284142
−0,0013600833984	−0,0001494842	−2,55488831958460	−0,121519318829
+0,0001197554895	+0,0000146246	+0,51982609379708	+0,027471917415
−0,0000087400801	−0,0000011741	−0,08766632185 18	−0,005096334253
+0,0000005373089	+0,0000000787	+0,01245372300454	+0,000789789479
−0,0000000282041	−0,0000000045	−0,00151057992004	−0,000103781025
+0,0000000012788	+0,0000000002	+0,00015826871959	+0,000011709922
−0,0000000000506		−0,00001446751187	−0,000001146875
+0,0000000000018		+0,00000116392671	+0,000000098418
−0,0000000000001		−0,00000008304648	−0,000000007461
		+0,00000000529095	+0,000000000503
		−0,00000000030283	−0,000000000030
		+0,00000000001566	+0,000000000002
		−0,00000000000073	
		+0,00000000000003	
+0,0000001230400	+0,0074022945	+0,00000011431000	−0,003433213800
$\varepsilon_2(\lambda_2) = +0{,}00001662187$		$\varepsilon_2(\lambda_3) = -0{,}00003329533$	
$\lambda_2^{(3)} = 81{,}88658337813$		$\lambda_3^{(3)} = 189{,}22093329533$	

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(4)} = 18{,}956265591372; \quad \lambda_2^{(3)} = 81{,}88658337813;$$

$$\lambda_3^{(3)} = 189{,}22093329533; \quad \lambda_4^{(2)} = 340{,}9669; \quad \lambda_5^{(2)} = 537{,}162,$$

на чем и заканчиваем решение поставленной задачи.

Упражнения

2. Выполнить по образцу табл. 105 все вычисления, необходимые для определения λ_3 и λ_4 с шестью значащими цифрами.

3. Определить с шестью значащими цифрами первые два собственных значения для следующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$y'' + \lambda x^2 y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Пример 3. Определить первые пять собственных значений и соответствующие им собственные функции для такой задачи Штурма—Лиувилля:

$$y'' + \lambda y \operatorname{sh} x = 0; \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{IX.274}$$

Решение. Представив заданную и искомую функции в виде рядов с центром в точке $x_0 = 0$:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n; \quad \gamma_{2\nu} = 0; \quad \gamma_{2\nu+1} = \frac{1}{(2\nu+1)!}; \tag{IX.275}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = 1, \tag{IX.276}$$

для коэффициентов $a_n = a_n(\lambda)$ из уравнения (IX.274) находим следующую рекуррентную формулу:

$$a_{n+2} = -\lambda \frac{[\gamma_n a_n]}{(n+1)(n+2)}; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = 1. \tag{IX.277}$$

Тогда, воспользовавшись вторым краевым условием и положив $x = 1$ в (IX.276), получаем уравнение для определения собственных значений:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) = 0. \tag{IX.278}$$

Уравнение (IX.278) решаем методом линейной аппроксимации (см. § 86), так как в данном примере производные $\{a(\lambda)\}'$ вычислить довольно сложно и поэтому методом Ньютона пользоваться нецелесообразно.

В табл. 106 вычислены первые две пробы для первого собственного значения

$$\lambda_1^{(1)} = 18{,}5; \quad \lambda_1^{(2)} = 18{,}0,$$

для которых согласно (IX.277) и (IX.278) получим соответственно

$$\sum a_n(\lambda_1^{(1)}) = -0{,}02123; \quad \sum a_n(\lambda_1^{(2)}) = -0{,}00667.$$

Воспользовавшись формулой (VII.17) § 86, по этим данным определяем третью пробу

$$\lambda_1^{(3)} = 17{,}77, \text{ для которой } \sum a_n(\lambda_1^{(3)}) = +0{,}0002046,$$

после чего на основании трех проб определяем с семью значащими цифрами

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(4)} = 17{,}77678; \quad \sum a_n(\lambda_1^{(4)}) = +0{,}000000112,$$

более точное значение которого будет $\lambda_1 = \lambda_1^{(5)} = 17{,}7767834$.

Аналогичным путем находим (с шестью-семью значащими цифрами) остальные четыре собственных значения:

$$\lambda_2 = 76{,}43702; \quad \lambda_3 = 176{,}4669; \quad \lambda_4 = 317{,}880; \quad \lambda_5 = 500{,}717.$$

При этом в процессе вычисления всех коэффициентов $a_n = a_n(\lambda)$ записывать произведения $[\gamma_n a_n]$ нет надобности, так как, найдя эту величину, переносим ее в установочный счетчик, умножаем на λ и, разделив результат на соответствующее $(n+1)(n+2)$, получаем очередной коэффициент $a_{n+2}(\lambda)$. В табл. 106

Таблица 106

$y'' + \lambda y \operatorname{sh} x = 0$			$\lambda = \lambda_1^{(1)} = 18{,}5$		$\lambda = \lambda_1^{(2)} = 18{,}0$		$\lambda_1^{(3)} = 17{,}77$	$\lambda_1^{(4)} = 17{,}77678$
n	$(n+1)\times(n+2)$	γ_n	$a_n(\lambda)$	$[\gamma_n a_n]$	$a_n(\lambda)$	$[\gamma_n a_n]$	$a_n(\lambda)$	$a_n(\lambda)$
0	2	0	0	0	0	0	0	0
1	6	1,0000000000	+1,00000	0	+1,00000	0	+1,0000000	+1,000000000
2	12	0	0	+1,00000	0	+1,00000	0	0
3	20	0,1666666667	0	0	0	0	0	0
4	30	0	−1,54167	+0,16667	−1,50000	+0,16667	−1,4808333	−1,481398333
5	42	0,0083333333	0	−0,54167	0	−1,50000	0	0
6	56	0	−0,10278	+0,00833	−0,10000	+0,00833	−0,0987222	−0,098759889
7	72	0,0001984127	+0,67907	−0,35973	+0,64286	−0,35000	+0,6265335	+0,627011721
8	90	0	−0,00275	+0,67927	−0,00268	+0,64306	−0,0026443	−0,002645354
9	110	0,0000027557	+0,09243	−0,03273	+0,08750	−0,03185	+0,0852782	+0,085343262
10	132	0	−0,13963	+0,20561	−0,12861	+0,19465	−0,1237447	−0,123886406
11	156	0,0000000251	+0,00550	−0,14125	+0,00521	−0,13019	+0,0050787	+0,005082595
12	182	0	−0,02882	+0,02656	−0,02654	+0,02515	−0,0255381	−0,025067315
13	210	0,0000000002	+0,01675	−0,05214	+0,01502	−0,04802	+0,0142732	+0,014294836
14	240	0	−0,00270	+0,01857	−0,00249	+0,01675	−0,0023934	−0,002396114
15	272	0	+0,00459	−0,00867	+0,00412	−0,00799	+0,0039101	+0,003916036
16	306	0	−0,00143	+0,00745	−0,00126	+0,00669	−0,0011813	−0,001183455
17	342	0	+0,00059	−0,00215	+0,00053	−0,00192	+0,0005019	+0,000502623
18	380	0	−0,00045	+0,00150	−0,00039	+0,00134	−0,0003688	−0,000369451
19	420	0	+0,00012	−0,00072	+0,00010	−0,00063	+0,0000944	+0,000094625
20	462	0	−0,00007	+0,00026	−0,00006	+0,00023	−0,0000596	−0,000059678
21	506	0	+0,00003		+0,00003		+0,0000250	+0,000025060
22	552	0	−0,00001				−0,0000082	−0,000008230
23	600	0					+0,0000046	+0,000004626
24	650	0					−0,0000015	−0,000001476
25	702	0					+0,0000006	+0,000000637
26	756	0					−0,0000003	−0,000000265
27	812	0					+0,0000001	+0,000000087
28	870	0						−0,000000039
29	930	0						+0,000000013
30	992	0						−0,000000005
31								+0,000000002
32								−0,000000001
$\sum a_n x^n \Big\|_{x=1} = \sum a_n =$			−0,02123		−0,00667		+0,0002046	+0,000000112

Для первых двух проб мы привели величины $[\gamma_n a_n]$ для большей наглядности и для того, чтобы читатель смог себя проконтролировать при дублировании этой таблицы.

Формула (IX.277) позволяет также определять коэффициенты $a_n(\lambda)$ в общем виде. В табл. 107 выполнены все вычисления, необходимые для определения первых 17 коэффициентов $a_n(\lambda)$, так что ряд (IX.276) мы можем представить теперь в явном виде:

$$y(x, \lambda) = x - \frac{\lambda}{12}x^4 - \frac{\lambda}{180}x^6 + \frac{\lambda^2}{504}x^7 - \frac{\lambda}{6720}x^8 + \frac{7\lambda^2}{25920}x^9 - \frac{\lambda(1+10\lambda^2)}{453600}x^{10} + \frac{107\lambda^2}{6652800}x^{11} - \frac{\lambda(1+218\lambda^2)}{47900160}x^{12} + \cdots . \quad \text{(IX.279)}$$

Однако с дальнейшим ростом n вычисление коэффициентов $a_n(\lambda)$ будет все более усложняться, поэтому собственные значения проще определять, задаваясь фиксированными числовыми значениями λ и вычисляя соответствующие им коэффициенты $a_n(\lambda)$, как мы и поступили в рассмотренных выше примерах. При больших значениях λ величину $y(1; \lambda) = \sum a_n(\lambda)$ более целесообразно находить при помощи аналитического продолжения исходного ряда, что более подробно изложено при определении собственных значений для нелинейных дифференциальных уравнений в [148, § 47].

Таблица 107

n	$(n+1)\times(n+2)$	γ_n	$a_n(\lambda)$	$[\gamma_n a_n]$
0	2	0	0	0
1	6	1	$+1$	0
2	12	0	0	$+1$
3	20	$\frac{1}{3!}$	0	0
4	30	0	$-\frac{1}{12}\lambda$	$+\frac{1}{6}$
5	42	$\frac{1}{5!}$	0	$-\frac{1}{12}\lambda$
6	56	0	$-\frac{1}{180}\lambda$	$+\frac{1}{5!}\lambda$
7	72	$\frac{1}{7!}$	$+\frac{10}{7!}\lambda^2$	$-\frac{7}{3\cdot 5!}\lambda$
8	90	0	$-\frac{6}{8!}\lambda$	$+\frac{1}{7!}(1+10\lambda^2)$
9	110	$\frac{1}{9!}$	$+\frac{98}{9!}\lambda^2$	$-\frac{107}{3\cdot 4\cdot 7!}\lambda$
10	132	0	$-\frac{8}{10!}(\lambda+10\lambda^3)$	$+\frac{1}{9!}(1+218\lambda^2)$
11	156	$\frac{1}{11!}$	$+\frac{642}{11!}\lambda^2$	$-\frac{1}{5\cdot 9!}(163\lambda+40\lambda^3)$
12	182	0	$-\frac{10}{12!}(\lambda+218\lambda^3)$	$+\frac{1}{3\cdot 11!}(3+9296\lambda^2)$
13	210	$\frac{1}{13!}$	$+\frac{22}{13!}(163\lambda^2+40\lambda^4)$	$-\frac{1}{12!}(1418\lambda+3940\lambda^3)$
14	240	0	$-\frac{4}{14!}(3\lambda+9296\lambda^3)$	$+\frac{1}{7\cdot 13!}(7+257204\lambda^2+6160\lambda^4)$
15			$+\frac{13}{15!}(1418\lambda^2+3940\lambda^4)$	
16			$-\frac{2}{16!}(7\lambda+257204\lambda^3+6160\lambda^5)$	

После того как найдено необходимое количество собственных значений λ_k, соответствующие им собственные функции

$$y = y(x, \lambda_k)$$

определяются очень легко, для чего надо только в ряде (IX.276) взять коэффициенты $a_n = a_n(\lambda_k)$, соответствующие найденным λ_k. Этот же результат можно получить, положив $\lambda = \lambda_k$ в ряде (IX.279). На рис. 248 представлены графики

первых пяти собственных функций для примеров 2 и 3. Координаты точек, по которым были построены эти графики, вычислены при помощи рядов (IX.266) — (IX.267) и (IX.276) — (IX.277), сходящихся во всей комплексной плоскости.

Для задач Штурма—Лиувилля имеет место следующая теорема сравнения [119, т. I, стр. 186—187].

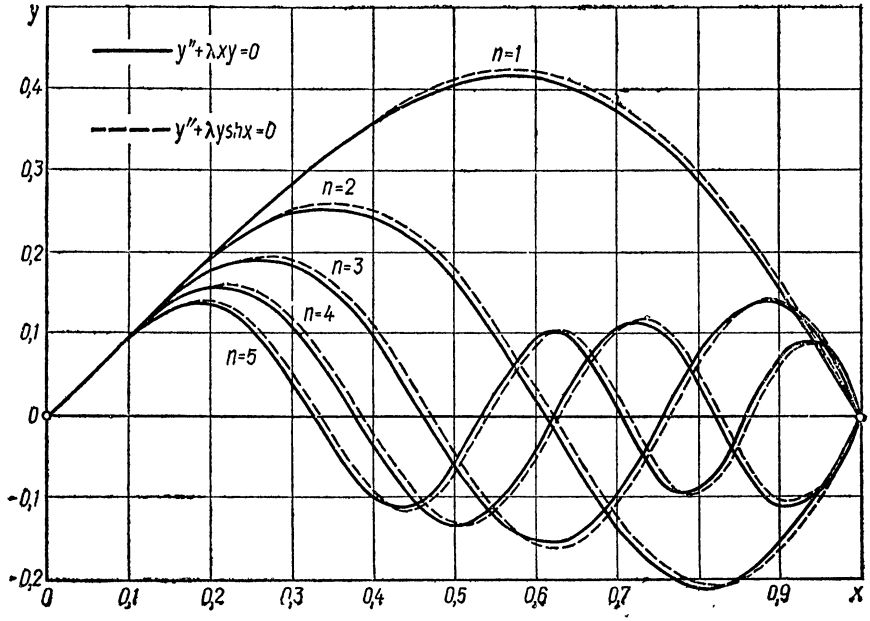


Рис. 248.

Пусть даны два уравнения

$$[q(x)\,y']' - P(x)\,y = 0 \qquad \text{(IX.280)}$$

и

$$[q_1(x)\,z']' - P_1(x)\,z = 0, \qquad \text{(IX.281)}$$

где функции $q'(x)$, $q_1'(x)$, $P(x)$, $P_1(x)$ *непрерывны,* $q(x) > 0$, $q_1(x) > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$

$$q(x) \geqslant q_1(x), \quad P(x) \geqslant P_1(x), \qquad \text{(IX.282)}$$

причем ни в какой части отрезка $[a, b]$ *не выполняются одновременно равенства*

$$q(x) \equiv q_1(x), \quad P(x) \equiv P_1(x),$$

а также не выполняется равенство

$$P(x) \equiv P_1(x) \equiv 0.$$

Пусть $y(x)$, $z(x)$ *являются соответственно решениями уравнений (IX.280) и (IX.281), определенными при* $a \leqslant x \leqslant b$. *Предположим, что если* $y(a) \neq 0$, *то*

$$\frac{q(a)\,y'(a)}{y(a)} \geqslant \frac{q_1(a)\,z'(a)}{z(a)} \qquad \text{(IX.283)}$$

(а потому $z(a) \neq 0$*); если же* $y(a) = 0$, *то на* $z(a)$ *не накладываются никакие условия.*

Тогда если $y(x)$ имеет в полуоткрытом промежутке $a < x \leqslant b$ m нулей, то $z(x)$ имеет в этом промежутке не меньше m нулей, из которых, по крайней мере, один меньше первого нуля $y(x)$.

Для примеров 2 и 3 все условия теоремы сравнения выполнены. Поэтому соответствующие собственные значения для примера 3 будут строго меньше собственных значений, найденных для примера 2, чем мы и воспользовались при выборе первоначальных проб в примере 3.

§ 116. Уравнение Дуффинга

При исследовании различных колебательных процессов и, в частности, колебаний маятника без учета сопротивления среды вопрос сводится к интегрированию нелинейного уравнения второго порядка

$$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x, \tag{IX.284}$$

которое называется *уравнением Дуффинга* [47, стр. 716—717; 119, т. II, стр. 343—347].

Постоянные α и β, входящие в уравнение (IX.284), являются его параметрами, значения которых определяют собой характер колебаний. При $\beta = 0$ колебания называются *свободными*, при $\beta \neq 0$ — *вынужденными*.

Для того чтобы решить уравнение Дуффинга при помощи степенных рядов, вводим две вспомогательные функции

$$z = \sin y, \quad v = \cos y,$$

которые связаны между собой следующими дифференциальными соотношениями:

$$z' = (\sin y)' = y' \cos y = y'v; \quad v' = (\cos y)' = -y' \sin y = -y'z. \tag{IX.285}$$

Заменяя $\sin y$ функцией z, приводим уравнение (IX.284) к эквивалентной системе:

$$y'' = \beta \sin x - \alpha^2 z; \quad z' = y'v; \quad v' = -y'z. \tag{IX.286}$$

В таком случае, представляя искомые функции y, z, v и заданную функцию

$$f(x) = \beta \sin x;$$

$$\sin x = \sin [x_0 + (x - x_0)] = \sin x_0 \cos (x - x_0) + \cos x_0 \sin (x - x_0) =$$
$$= \sin x_0 \left[1 - \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots\right] + \cos x_0 \left[(x - x_0) - \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots\right]$$

рядами с центром в точке $x = x_0$:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n; \quad z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n; \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n; \tag{IX.287}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (x - x_0)^n; \quad \gamma_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{\sin x_0}{(2\nu)!}; \quad \gamma_{2\nu+1} = (-1)^\nu \frac{\cos x_0}{(2\nu+1)!};$$
$$\nu = 0, 1, 2, \dots, \tag{IX.288}$$

получаем следующие рекуррентные формулы:

$$\ddot{a}_{n+2} = \beta\gamma_n - \alpha^2 b_n; \quad b_{n+1} = \frac{[\dot{a}_{n+1} c_n]}{n+1}; \quad c_{n+1} = -\frac{[\dot{a}_{n+1} b_n]}{n+1};$$

$$\dot{a}_{n+2} = \frac{\ddot{a}_{n+2}}{n+1}; \quad a_{n+2} = \frac{\dot{a}_{n+2}}{n+2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{IX.289}$$

Формулы (IX.289) позволяют по известным $a_0 = y(x_0)$, $a_1 = y'(x_0)$, $b_0 = \sin a_0$, $c_0 = \cos a_0$ вычислить любое количество дальнейших коэффициентов a_n, b_n, c_n и тем самым построить общее решение для уравнения Дуффинга.

Действительно, коэффициенты

$$b_0 = z(x_0) = \sin y(x_0) = \sin a_0 \text{ и } c_0 = v(x_0) = \cos y(x_0) = \cos a_0 \quad \text{(IX.290)}$$

однозначно определяются коэффициентом a_0, так что (при фиксированных α, β и x_0) коэффициенты ряда $y = \sum a_n (x - x_0)^n$ будут зависеть от двух произвольных постоянных, в качестве которых мы взяли $a_0 = y(x_0)$ и $a_1 = y'(x_0)$. Так как уравнение Дуффинга есть уравнение второго порядка, то в состав его общего решения и должны входить только две произвольные постоянные. Задавшись определенными $a_0 = y(x_0)$ и $a_1 = y'(x_0)$, т. е. начальной ординатой $y_0 = y(x_0)$ и уклоном $k = y'(x_0)$ в точке (x_0, y_0), получаем частное решение уравнения Дуффинга.

В свою очередь, придавая параметрам α и β различные значения, мы можем исследовать, как влияют эти параметры на характер колебательного процесса, описываемого уравнением (IX.284). Таким образом, формулы (IX.287) — (IX.289) позволяют для уравнения Дуффинга легко решать как задачу Коши, так и краевые задачи различного типа. В последнем случае рассматриваемую краевую задачу надо при помощи методики, изложенной в предыдущем параграфе, предварительно свести к эквивалентной задаче Коши.

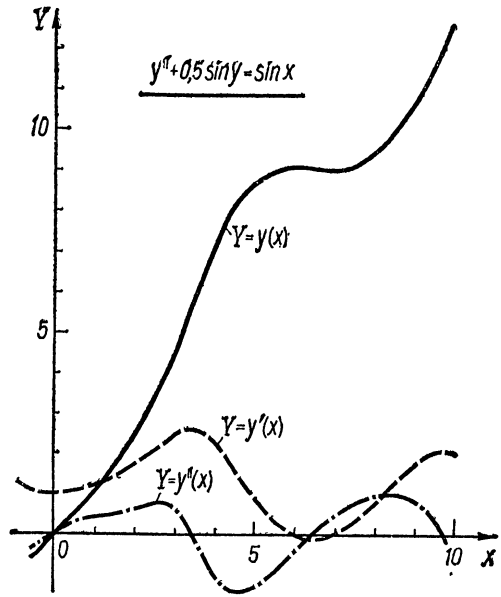


Рис. 249.

Пример 1. Решить задачу Коши для уравнения Дуффинга при $\alpha^2 = 0{,}5$, $\beta = 1$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Решение. Подставив заданные значения параметров α и β в рекуррентные формулы (IX.289) и выбрав в качестве центра исходного ряда точку $x_0 = 0$, получаем необходимые расчетные формулы. Все вычисления, выполненные с семью десятичными знаками, приведены в табл. 108. Таким образом, для рассматриваемой задачи Коши искомое решение можно представить в виде ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{160} x^5 + 0{,}0006696 x^7 - 0{,}0000277 x^9 - \ldots . \quad \text{(IX.291)}$$

Задаваясь различными значениями аргумента x, вычисляем соответствующие значения функции $y = y(x)$, по которым строим ее график (рис. 249).

Все четные коэффициенты ряда (IX.291) равны нулю:

$$a_{2\nu} = 0; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

(что читателю полезно доказать в общем виде), поэтому искомая функция $y = y(x)$ является нечетной и построенный на рис. 249 график легко распространить на отрицательную полуось.

Таблица 108

Исходный ряд: $\alpha^2 = 0{,}5;\ \beta = 1;\ x_0 = 0;\ a_0 = b_0 = 0;\ c_0 = 1;\ a_1 = y'(x_0) = 1;$

$$\ddot{a}_{n+2} = \gamma_n - 0{,}5b_n;\ b_{n+1} = \frac{[\dot{a}_{n+1}c_n]}{n+1};\ c_{n+1} = -\frac{[\dot{a}_{n+1}b_n]}{n+1};\ \dot{a}_{n+2} = \frac{\ddot{a}_{n+2}}{n+1};\ a_{n+2} = \frac{\dot{a}_{n+2}}{n+2}$$

n	$\ddot{a}_{n+2}$	$\dot{a}_{n+1}$	b_n	$[\dot{a}_{n+1}b_n]$	c_n	$[\dot{a}_{n+1}c_n]$	γ_n	$a_n \equiv a_n^1$
0	0	+1,0000000	0	0	+1,0000000	+1,0000000	0	0
1	+0,5000000	0	+1,0000000	+1,0000000	0	0	+1,0000000	+1,0000000
2	0	+0,2500000	0	0	−0,5000000	−0,2500000	0	0
3	−0,1250000	0	−0,0833333	+0,1666667	0	0	−0,1666667	+0,0833333
4	0	−0,0312500	0	0	−0,0416667	−0,1979167	0	0
5	+0,0281250	0	−0,0395833	−0,0916667	0	0	+0,0083333	−0,0062500
6	0	+0,0046875	0	0	+0,0152778	+0,0251736	0	0
7	−0,0019965	0	+0,0035962	+0,0009921	0	0	−0,0001984	+0,0006696
8	0	−0,0002496	0	0	−0,0001240	+0,0024042	0	0
9	−0,0001308	0	+0,0002671	+0,0017630	0	0	+0,0000028	−0,0000277
10	0	−0,0000131	0	0	−0,0001763	−0,0007683	0	0
11	+0,0000349	0	−0,0000698	−0,0002932	0	0	−0,00000003	−0,0000012
12	0	+0,0000029	0	0	+0,0000244	+0,0000757		0
13	−0,0000029	0	+0,0000058	+0,0000107	0	0		+0,0000002
14	0	−0,0000002	0	0	−0,0000008	+0,0000053		0
15	−0,0000002	0	+0,0000004	+0,0000044	0	0		0,0000000
16	0	0,0000000	0	0	−0,0000003	−0,0000023		
17	+0,0000001		−0,0000001		0			
$\sum_n =$	+0,4010296	+1,2231775	+0,8808830	—	+0,4733341	—	+0,8414710	1,0777242

Дифференцируя ряд (IX.291) или пользуясь вычисленными в той же табл. 108 коэффициентами $\dot{a}_{n+1}$ и $\ddot{a}_{n+2}$ (что дает более точные результаты), находим первую и вторую производные искомой функции:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1} x^n = 1 + 0{,}25x^2 - 0{,}03125x^4 + 0{,}0046875x^6 - \ldots, \quad \text{(IX.292)}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2} x^n = 0{,}5x - 0{,}125x^3 + 0{,}028125x^5 - \ldots. \quad \text{(IX.293)}$$

На рис. 249 построены также графики первой и второй производной $y'(x)$, $y''(x)$, что позволяет полнее изучить искомую функцию, в частности определить ее экстремальные точки и точки перегиба.

Упражнение 1. Продублировать табл. 108, выполняя вычисления с четырьмя десятичными знаками и приняв во внимание, что величины

$$\dot{b}_{n+1} = [\dot{a}_{n+1} c_n[\text{ и } \dot{c}_{n+1} = -[\dot{a}_{n+1} b_n],$$

определяющие собой коэффициенты рядов для производных вспомогательных функций

$$z' = y'v; \quad v' = -y'z,$$

вычисляются согласно формулам

$$[\dot{a}_{n+1} c_n] = \dot{a}_1 c_n + \dot{a}_2 c_{n-1} + \ldots + \dot{a}_{n+1} c_0;$$

$$[\dot{a}_{n+1} b_n] = \dot{a}_1 b_n + \dot{a}_2 b_{n-1} + \ldots + \dot{a}_{n+1} b_0.$$

Остановимся более подробно на очень важном и принципиальном вопросе обеспечения заданной точности результатов при решении дифференциальных уравнений методом рядов. С этой целью продолжим решение примера 1 и построим алгоритм, который автоматически обеспечивает любую наперед заданную точность вычислений. В основу этого алгоритма положим аналитическое продолжение рассматриваемой функции* и построим для уравнения (IX.284) последовательность рядов

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n; \quad a_n \equiv a_n^{[k]}; \quad x_0 \equiv x_0^{[k]}; \quad k = \text{I, II, III, } \ldots \quad \text{(IX.294)}$$

с центрами в точках $x_0 = x_0^{\text{I}}$, $x = x_0^{\text{II}}$, $x = x_0^{\text{III}}$, ... (рис. 250). Исходный ряд (IX.291) будем считать ***рядом I.***

Для того чтобы при аналитическом продолжении обеспечить необходимую точность результатов, последовательность центров $x_0^{[k]}$ надо выбрать так, чтобы при фиксированном числе членов N очередного $(k+1)$-го ряда заданная точность была гарантирована. Контролем является повторное вычисление значений $y(x)$ и $y'(x)$ в соответствующей точке x, для которой эти значения были уже вычислены в предыдущем шаге при помощи k-го ряда. Число членов очередного ряда должно быть таким, чтобы значения $y(x)$ и $y'(x)$, вычисленные при помощи k-го и $(k+1)$-го рядов, в контрольной точке совпадали с заданной точностью.

* Более подробно об аналитическом продолжении сказано в [147, § 30].

Так, в рассматриваемом примере вычисленные в табл. 108 коэффициенты позволяют при $x = 1$ определить с семью верными знаками:

$$y(1) = \sum_{n=0}^{17} a_n x^n \big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{17} a_n = 1{,}0777243;$$

$$y'(1) = \sum_{n=0}^{17} \dot{a}_{n+1} x^n \big|_{x=1} = \sum_{n=0}^{17} \dot{a}_{n+1} = 1{,}2231775.$$

Найденные $y(1)$ и $y'(1)$ принимаем в качестве начальных значений для ***ряда II*** с центром в точке $x_0 = x_0^{II} = 1$ и, повторив в табл. 109 вычисления по тем же расчетным формулам (IX.288) — (IX.289), определяем искомые коэффициенты $a_n \equiv a_n^{II}$ этого ряда.

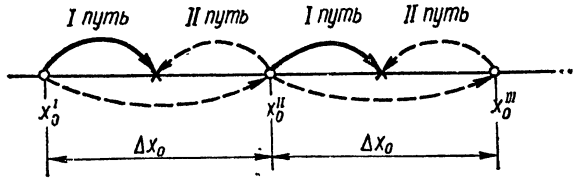


Рис. 250.

Для проверки результатов возьмем в качестве контрольной точки $x = 0{,}5$ и сопоставим значения $y(x)$ и $y'(x)$, вычисленные при помощи ряда II, с теми значениями, которые уже были найдены согласно исходному ряду (IX.291) и ряду (IX.292) с точностью большей, чем при $x_0 = x_0^{II} = 1$, так как степенные ряды (при фиксированном числе членов) обеспечивают тем большую точность, чем меньше значение аргумента. Выполнив указанный контроль, получаем

$$y(0{,}5) = \sum_{n=0}^{9} a_n^I x^n \big|_{x=0,5} = \sum_{n=0}^{9} \frac{a_n^I}{2^n} = 0{,}5102265;$$

$$y'(0{,}5) = \sum_{n=0}^{9} \dot{a}_n^I x^n \big|_{x=0,5} = \sum_{n=0}^{9} \frac{\dot{a}_{n+1}^I}{2^n} = 1{,}0606191$$

и, соответственно, воспользовавшись коэффициентами из табл. 109,

$$y(0{,}5) = \sum_{n=0}^{9} a_n^{II} (x-1)^n \big|_{x=0,5} = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{a_n^{II}}{2^n} = 0{,}5102265;$$

$$y'(0{,}5) = \sum_{n=0}^{9} \dot{a}_{n+1}^{II} (x-1)^n \big|_{x=0,5} = \sum_{n=0}^{9} (-1)^n \frac{\dot{a}_{n+1}^{II}}{2^n} = 1{,}0606191.$$

Как видим, результаты совпали с требуемой точностью, что и подтверждает правильность выбора шага $\Delta x_0 = 1$ при числе членов $N = 17$. Сравнив последнюю строку $\sum_n$ в табл. 108 со строкой $n = 0$ в табл. 109, видим, что, пользуясь изложенной методикой, мы автоматически получаем исходные данные для очеред-

Таблица 109

$y'' = \beta \sin x - \alpha^2 \sin y$; $\alpha^2 = 0{,}5$; $\beta = 1$;

Ряд II: $a_n \equiv a_n^{II}$; $x_0 \equiv x_0^{II} = 1$; $a_0 = 1{,}0777243$; $a_1 = \dot{a}_0 = 1{,}2231775$; $b_0 = \sin a_0 = 0{,}8808829$;

$c_0 = \cos a_0 = 0{,}4733342$; $\gamma_{2\nu} = (-1)^\nu \frac{\sin 1}{(2\nu)!}$; $\gamma_{2\nu+1} = (-1)^\nu \frac{\cos 1}{(2\nu+1)!}$; $\sin 1 = 0{,}8414710$; $\cos 1 = 0{,}5403023$

n	$\ddot{a}_{n+2}$	$\dot{a}_{n+1}$	b_n	$[\dot{a}_{n+1} b_n]$	c_n	$[\dot{a}_{n+1} c_n]$	γ_n	$a_n \equiv a_n^{II}$
0	+0,4010295	+1,2231775	+0,8808829	+1,0774762	+0,4733342	+0,5789718	+0,8414710	+1,0777243
1	+0,2508164	+0,4010295	+0,5789718	+1,0614454	−1,0774762	−1,1281237	+0,5403023	+1,2231775
2	−0,1387046	+0,1254082	−0,5640618	−0,3472930	−0,5307227	−1,0219079	−0,4207355	+0,2005148
3	+0,0802676	−0,0462349	−0,3406360	−0,6109834	+0,1157643	−0,2282440	−0,0900504	+0,0418027
4	+0,0635918	+0,0200669	−0,0570610	−0,2862309	+0,1527458	+0,2260185	+0,0350613	−0,0115587
5	−0,0180993	+0,0127184	+0,0452037	+0,0385913	+0,0572462	+0,1547320	+0,0045025	+0,0040134
6	−0,0140630	−0,0030166	+0,0257887	+0,0516528	−0,0064319	+0,0031118	−0,0011687	+0,0021197
7	−0,0003295	−0,0020090	+0,0004445	+0,0016672	−0,0073790	−0,0136158	−0,0001072	−0,0004309
8	+0,0008719	−0,0000412	−0,0017020	−0,0057347	−0,0002084	+0,0016161	+0,0000209	−0,0002511
9	−0,0000883	+0,0000969	+0,0001796	+0,0008041	+0,0006372	+0,0039665	+0,0000015	−0,0000046
10	−0,0001986	−0,0000088	+0,0003966	+0,0023436	−0,0000804	+0,0002912	−0,0000002	+0,0000097
11	−0,0000132	−0,0000181	+0,0000265	+0,0005462	−0,0002131	−0,0009679	0,0000000	−0,0000008
12	+0,0000403	−0,0000011	−0,0000807	−0,0002808	−0,0000455	−0,0003458		−0,0000015
13	+0,0000133	+0,0000031	−0,0000266	−0,0001432	+0,0000216	+0,0000541		−0,0000001
14	−0,0000019	+0,0000009	+0,0000039	+0,0000104	+0,0000102	+0,0000473		+0,0000002
15	−0,0000016	−0,0000001	+0,0000032	+0,0000164	−0,0000007	−0,0000052		+0,0000001
16	+0,0000002	−0,0000001	−0,0000003	−0,0000029	−0,0000010	−0,0000078		0,0000000
17	+0,0000002	0,0000000	−0,0000005		+0,0000002			
$\sum_n =$	+0,6251312	+1,7311715	+0,5683325	—	−0,8227992	—	+0,9092975	2,5371147

ного ряда*. Поэтому, вычислив в свою очередь сумму коэффициентов $a_n \equiv \equiv a_n^{II}$, т. е. величину $\sum_n = \sum a_n (x-1)^n |_{x=2} = \sum a_n$, а также сумму коэффициентов a_{n+1}, b_n, c_n, γ_n, получим в последней строке $\sum_n$ табл. 109 все необходимые значения для ***ряда III*** с центром в точке $x_0 = x_0^{III} = 2$.

Таблица 110

$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x$; $\alpha^2 = 0{,}5$; $\beta = 1$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

x	y	y'	y''	$\sin y$	$\sin x$
0,0	0,0000000	+1,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,5	0,5102265	+1,0606191	+0,2352381	+0,4883749	+0,4794255
1,0	1,0777243	+1,2231775	+0,4010295	+0,8808829	+0,8414710
1,5	1,7440988	+1,4508538	+0,5049847	+0,9850207	+0,9974950
2,0	2,5371146	+1,7311717	+0,6251311	+0,5683327	+0,9092974
2,5	3,4872241	+2,0815630	+0,7678676	−0,3387909	+0,5984721
3,0	4,6239812	+2,4555444	+0,6391673	−0,9960946	+0,1411200
3,5	5,9051774	+2,6013047	−0,1662483	−0,3690698	−0,3507832
4,0	7,1409125	+2,2594791	−1,1349814	+0,7563577	−0,7568025
4,5	8,1077582	+1,5811242	−1,4615157	+0,9679712	−0,9775301
5,0	8,7197214	+0,8820541	−1,2829627	+0,6480769	−0,9589243
5,5	9,0148666	+0,3301756	−0,9048043	+0,3985280	−0,7055403
6,0	9,0854582	−0,0094786	−0,4458384	+0,3328457	−0,2794155
6,5	9,0449446	−0,1128512	+0,0297371	+0,3707657	+0,2151200
7,0	9,0108312	+0,0119970	+0,4558737	+0,4022258	+0,6569866
7,5	9,0883768	+0,3246466	+0,7729539	+0,3300921	+0,9380000
8,0	9,3563013	+0,7622088	+0,9551466	+0,0684232	+0,9893582

Данный процесс можно продолжать до тех пор, пока числовой контроль не покажет расхождений в результатах, больших, чем допустимые. В таком случае надо либо увеличить число рассматриваемых членов ряда N, либо уменьшить шаг Δx_0. В табл. 110 приведены для сегмента $[0; 8]$ окончательные результаты, полученные при помощи аналитического продолжения, причем, начиная с $x_0 = 3$ мы перешли к шагу $\Delta x_0 = 0{,}5$.

Упражнение 2. Продублировать табл. 109 с четырьмя десятичными знаками, а затем с той же точностью, взяв необходимые начальные данные из табл. 110, выполнить еще один шаг аналитического продолжения при $x_0 = 8$ и $\Delta x_0 = 1$.

Пример 2. Решить задачу Коши для уравнения Дуффинга при $\alpha^2 = 0{,}5$, $\beta = -1{,}0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1{,}5$ и построить шестизначную таблицу для искомой функции и ее производной на сегменте $[0; 20]$.

Решение. Все вычисления в данном случае выполняются вполне аналогично примеру 1. Окончательные результаты приведены в табл. 111 и на рис. 251, на котором масштаб по оси Oy взят в два раза большим, чем по оси Ox.

Вычисления по изложенной выше методике легко выполняются на ЭВМ и, например, составление табл. 111 потребовало всего нескольких минут машинного времени. Поэтому, придавая параметрам α и β, а также начальному уклону $y_0' = y'(0)$ ряд значений, легко изучить, как эти величины влияют на характер ко

* В табл. 108 и 109 все вычисления фактически были выполнены с двумя запасными знаками, поэтому из-за неучтенных ошибок округления полученные результаты частично различаются между собой на одну единицу последнего десятичного знака.

Таблица 111

$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x$; $\alpha^2 = 0{,}5$; $\beta = -1$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1{,}5$

x	$y(x)$	$y'(x)$	x	$y(x)$	$y'(x)$
0,0	0,000000	+1,500000	10,0	—0,664122	—1,353966
0,5	+0,714431	+1,289996	10,5	—1,209943	—0,788075
1,0	+1,233757	+0,745132	11,0	—1,426196	—0,064773
1,5	+1,431603	+0,031392	11,5	—1,274630	+0,659343
2,0	+1,262116	—0,700517	12,0	—0,791320	+1,235496
2,5	+0,753265	—1,297862	12,5	—0,091955	+1,496550
3,0	+0,016907	—1,581205	13,0	+0,634363	+1,339132
3,5	—0,755671	—1,438279	13,5	+1,187733	+0,828401
4,0	—1,361345	—0,938413	14,0	+1,431240	+0,127540
4,5	—1,662358	—0,246647	14,5	+1,309141	—0,610351
5,0	—1,599505	+0,496707	15,0	+0,839365	—1,235905
5,5	—1,177582	+1,166893	15,5	+0,121855	—1,570828
6,0	—0,471761	+1,601176	16,0	—0,660058	—1,484400
6,5	+0,355381	+1,632036	16,5	—1,299269	—1,022479
7,0	+1,089463	+1,244785	17,0	—1,647185	—0,347129
7,5	+1,556605	+0,595814	17,5	—1,635235	+0,396163
8,0	+1,670188	—0,145487	18,0	—1,259971	+1,084442
8,5	+1,416972	—0,851305	18,5	—0,585641	+1,562133
9,0	+0,847134	—1,385964	19,0	+0,237118	+1,654373
9,5	+0,087537	—1,583745	19,5	+0,995982	+1,317574
10,0	—0,664122	—1,353966	20,0	+1,507676	+0,693135

лебательного процесса, описываемого уравнением (IX.284). На рис. 252 представлены еще четыре различных частных решения уравнения Дуффинга. При помощи метода степенных рядов можно также показать, что при $\beta = 0$ решение будет выражаться через эллиптические функции и поэтому будет периодическим.

В инженерной практике иногда нелинейные дифференциальные уравнения линеаризируют, для того чтобы получить результаты в первом приближении. Какую при этом надо соблюдать осторожность, проиллюстрируем на примере уравнения

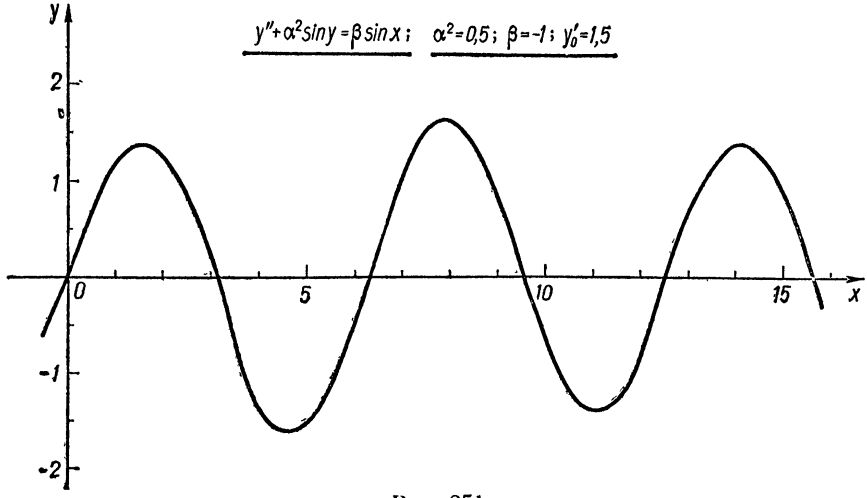


Рис. 251.

Дуффинга, которое при помощи приближенного равенства $\sin y \approx y$ можно свести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$y'' + \alpha^2 y = \beta \sin x. \tag{IX.295}$$

Воспользовавшись результатами § 107 — 108, легко найти, что при $\alpha^2 = \frac{1}{2}$; $\beta = 1$ уравнение (IX.295) имеет следующее общее решение:

$$y = C_1 \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\, x + C_2 \cos \sqrt{\frac{1}{2}}\, x - 2 \sin x. \tag{IX.296}$$

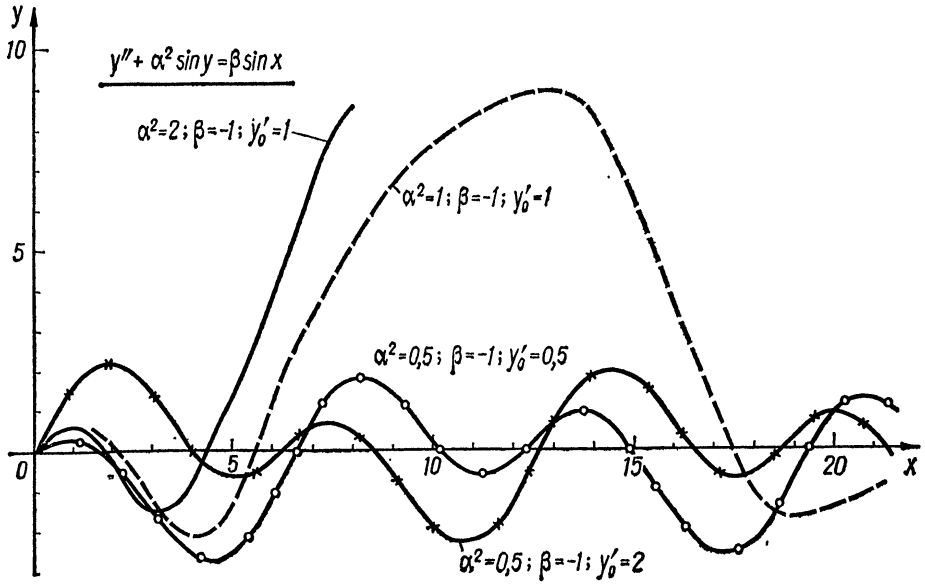


Рис. 252.

Подставив в (IX.296) начальные условия $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$, получаем частное решение уравнения (IX.295):

$$y = 3\sqrt{2} \sin \sqrt{\frac{1}{2}}\, x - 2\sin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3!} x^3 - \frac{1}{4 \cdot 4!} x^5 + \cdots, \tag{IX.297}$$

которое и является линеаризированным решением уравнения Дуффинга, рассмотренного в примере 1. Сопоставление точного решения уравнения Дуффинга с решением (IX.297), выполненное на рис. 253, показывает, что в данном конкретном примере линеаризация дает удовлетворительные результаты только для малых значений аргумента x.

Кроме уравнения (IX.284), которое с целью уточнения называют также *специальным уравнением Дуффинга*, рассматривают еще *обобщенное уравнение Дуффинга* [47, стр. 716]

$$y'' + \alpha^2 \sin y = \beta F(x). \tag{IX.298}$$

Все изложенное выше остается справедливым и для уравнения (IX.298) с единственным добавлением, что теперь в качестве коэффициентов γ_n надо взять коэффициенты Тейлора для заданной функции $F(x)$, т. е. коэффициенты, которые получим, разложив функцию $F(x)$ в степенной ряд с центром в точке $x = x_0$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (x - x_0)^n.$$

§ 117. Примеры простейших задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям

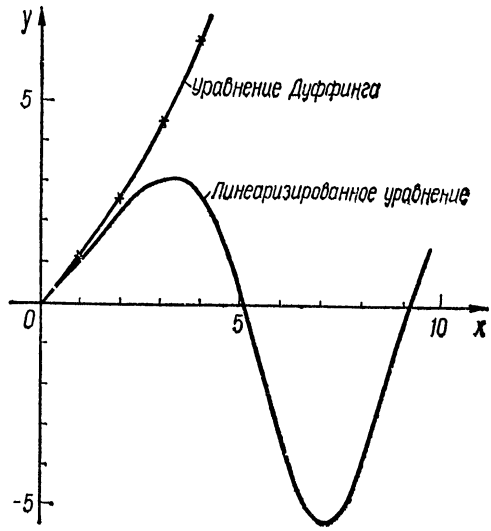


Рис. 253.

Дифференциальные уравнения имеют исключительно важное значение для решения технических задач, для физики, геометрии, астрономии и вообще для естествознания. Так, например, Ньютон, исследуя дифференциальные уравнения движения небесных тел, получил законы движения планет, установленные ранее эмпирическим путем Кеплером. Проанализировав на основании дифференциальных уравнений небесной механики возмущения в движении планеты Уран и выполнив огромную вычислительную работу, английский астроном Дж. К. Адамс и французский астроном У. Ж. Леверье (директор Парижской астрономической обсерватории с 1854 г.) независимо один от другого определили точные координаты на небосводе предполагаемой новой, восьмой по удаленности от Солнца, планеты. По координатам, полученным от Леверье, 23 сентября 1846 г. эту планету открыл немецкий астроном И. Г. Галле, что явилось триумфом математических методов, так как среди «океана звезд» была обнаружена едва различимая в телескопы того времени светящаяся точка, удаленная примерно на 4494 миллиона километров от Солнца с периодом вращения равным 165 земным годам. Русский астроном М. А. Ковальский в 1851 г. построил теорию движения новой зауранової планеты с учетом влияния других планет и составил таблицы для точного вычисления ее местоположения. Эту планету назвали Нептуном. Дальнейшие наблюдения за движением Нептуна позволят ответить на возникший в последнее время вопрос: существует ли, кроме открытой в 1930 г. планеты Плутон, десятая планета или нет?

В настоящее время дифференциальные уравнения находят все новые применения. Конструирование и расчет ускорителей элементарных частиц, вычисление орбит искусственных спутников Земли и Луны, а также межпланетных ракет, расчет на вибрацию и прочность турбин, самолетов, кораблей и автомобилей, расчет на устойчивость плотин и высотных зданий, электротехника, радиотехника, электронная оптика, изучение волн цунами и сейсмических волн, радиоактивный распад, определение скорости химических реакций, многие биологические проблемы, оптимальное планирование и экономика — все это области приложений дифференциальных уравнений.

Не имея возможности в данной книге остановиться более подробно на этих очень важных и интересных вопросах, по каждому из которых написаны сотни статей и десятки монографий, мы вынуждены ограничиться рассмотрением самых простейших примеров.

Пример 1. *Радиоактивный распад* [101, стр. 6—7]. Закон радиоактивного распада состоит в том, что число распадов пропорционально общему количеству нераспавшихся к данному моменту времени ядер. Пусть известно, что в некоторый момент $t = t_0$ имелось y_0 граммов радиоактивного вещества. Требуется определить его количество в произвольный момент времени t.

Пусть $y(t)$ — количество нераспавшегося к данному моменту времени t вещества. Скорость распада измеряется величиной $\left(-\frac{dy}{dt}\right)$. Так как она пропорциональна y, то мы и приходим к искомому дифференциальному уравнению

$$-y' = ky, \text{ или } \frac{dy}{dt} = -ky, \tag{IX.299}$$

где k — величина постоянная.

Подчеркнем, что в уравнении (IX.299) скорость распада $\frac{dy}{dt}$ должна быть величиной отрицательной, так как в результате радиоактивного процесса количество исходного вещества непрерывно уменьшается.

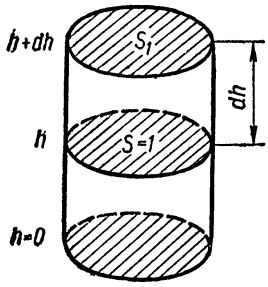


Рис. 254.

Пример 2. *Барометрическая формула* [125, т. I, стр. 116—117]. Атмосферное давление является, очевидно, функцией высоты h над поверхностью земли. Рассмотрим вертикальный цилиндрический столб воздуха с площадью поперечного сечения, равной единице (рис. 254). Образуем два поперечных сечения S и S_1 на высотах h и $h + dh$ от основания соответственно. При переходе от сечения S к сечению S_1 давление p уменьшится (если $dh > 0$) на величину, равную весу воздуха, заключенного в части объема между ними. Ввиду малости приращения $\Delta h = dh$ мы можем приближенно считать плотность ρ воздуха в этом слое постоянной. Следовательно, объем $V = S \cdot dh = dh$, а искомый вес $\rho V = \rho dh$. Итак, уменьшение p (при $dh > 0$) равно ρdh:

$$dp = -\rho dh.$$

Согласно закону Бойля—Мариотта плотность ρ пропорциональна давлению p: $\rho = cp$, где c — постоянная, и мы окончательно получаем дифференциальное уравнение

$$dp = -cpdh,$$

или

$$\frac{dp}{dh} = -cp. \tag{IX.300}$$

Пример 3. *Закон охлаждения* [125, т. I, стр. 117]. Положим, что некоторое тело, нагретое до высокой температуры, помещают в среду, имеющую постоянную температуру $\theta = 0°$. Тело будет охлаждаться и его температура θ будет функцией времени t, отсчитываемого от момента помещения тела в охлаждающую среду*. Ньютон сформулировал закон, согласно которому количество тепла dQ, отданного телом за время dt, можно приближенно считать пропорциональным dt и разности температур $d\theta$ тела и среды в момент времени t:

$$dQ = c_1 \theta dt, \text{ где } c_1 \text{ — постоянная.}$$

Обозначив буквой k теплоемкость тела, имеем

$$dQ = -kd\theta,$$

* Масса среды должна быть значительно больше массы охлаждаемого тела. Поэтому в течение всего процесса охлаждения температуру среды можем считать неизменной.

где мы пишем знак «—», так как $d\theta$ в рассматриваемом случае есть величина отрицательная, поскольку температура понижается. Сравнивая эти два выражения для dQ, получаем

$$d\theta = -c\theta dt, \text{ где } c = \frac{c_1}{k},$$

или

$$\frac{d\theta}{dt} = -c\theta. \tag{IX.301}$$

В тех случаях, когда теплоемкость k есть величина постоянная, постоянной будет также и величина $c = \frac{c_1}{k}$, так что уравнение (IX.301) будет линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В более общих случаях, когда теплоемкость охлаждаемого тела изменяется в зависимости от его температуры, величина c будет функцией от θ, и тогда уравнение (IX.301) будет нелинейным.

Пример 4. *Химическая реакция первого порядка**. Пусть некоторое вещество, масса которого есть a, вступает в химическую реакцию. Обозначим буквой ζ часть массы, прореагировавшей к моменту времени t, отсчитываемому от начала реакции. Очевидно, что ζ есть функция от t. Для некоторых реакций можно приближенно считать, что количество вещества $d\zeta$, прореагировавшее за промежуток времени от момента t до момента $t + dt$, при малом dt пропорционально dt и количеству вещества, не вступившего в реакцию к моменту t:

$$d\zeta = c(a - \zeta)\, dt, \text{ или } \frac{d\zeta}{dt} = c(a - \zeta),$$

где c — постоянный коэффициент.

Преобразуем это дифференциальное уравнение, введя вместо ζ новую функцию $z = a - \zeta$, где z — масса, вступившая в реакцию к моменту времени t. Принимая во внимание, что a есть постоянная, получим

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{d\zeta}{dt},$$

и дифференциальное уравнение химической реакции первого порядка может быть переписано в виде

$$\frac{dz}{dt} = -cz. \tag{IX.302}$$

Уравнения (IX.299)—(IX.302) идентичны по форме и выражают то свойство, что производная пропорциональна самой функции, а коэффициент пропорциональности является отрицательной величиной. Воспользовавшись результатами § 104, находим, что общим решением уравнения (IX.299) является

$$y = Ce^{-kt}, \tag{IX.303}$$

где C есть произвольная постоянная. Определим ее физическое значение. Подставив $t = 0$ в (IX.303), получим

$$C = y(0) = y_0,$$

т. е. C есть количество радиоактивного вещества в начальный момент $t = t_0$. Постоянная k характеризует собой так называемый *период полураспада*, т. е. то время τ, в течение которого количество радиоактивного вещества уменьшится

* Кроме химических реакций первого порядка существуют также реакции второго порядка, в которых скорость течения реакции пропорциональна произведению масс непрореагировавших веществ. Более подробно об этом сказано в курсе В. И. Смирнова [125, т. I, стр. 117 и 217], откуда мы заимствовали примеры 2—4.

вдвое. Например, для радия (точнее, для изотопа радия Ra^{224}) период полураспада τ равен 1622 годам.

Аналогично общим решением уравнения (IX.300) будет

$$p = p_0 e^{-ch}, \tag{IX.304}$$

где $p_0 = p(0)$ есть давление атмосферы при $h = 0$, т. е. на поверхности земли.

Многие нестационарные процессы могут быть описаны с достаточной для практики точностью дифференциальным уравнением вида

$$y' = ky;\ k > 0, \tag{IX.305}$$

общее решение которого

$$y = y_0 e^{kt};\ y_0 = y(t)\,|_{t=0}. \tag{IX.306}$$

Уравнение (IX.305) отличается от уравнения (IX. 299) только знаком при коэффициенте k, так что в данном случае величина y будет с течением времени увеличиваться, а не уменьшаться. Например, при погружении батискафа в глубину океана давление на его поверхность будет расти по экспоненциальному закону (IX.306). Нагревание однородного тела, помещенного в высокотемпературную среду, масса которой значительно превышает массу нагреваемого тела, протекает, в первом приближении, согласно уравнению (IX.305). Единственное отличие от примера 3 будет состоять в том, что в данном случае разность температур будет не положительной, а отрицательной.

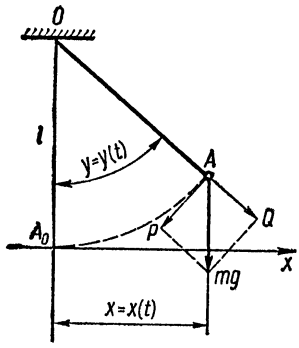


Рис. 255.

Как известно из биологии, бактерии размножаются простым делением, которое в благоприятных условиях происходит каждые 20—30 минут. Поэтому до тех пор, пока внешняя среда не начнет оказывать вредное влияние на бактерии, увеличение их числа будет происходить по экспоненциальному закону (IX.306).

Пример 5. *Математический маятник* [101, стр. 7—8]. Математическим маятником называется материальная точка, обладающая массой m, подвешенная на нерастяжимой нити, длину которой мы обозначим через l (рис. 255). Предположим, что колебания маятника происходят в одной и той же плоскости — в плоскости чертежа. Силой, которая стремится вернуть маятник в положение равновесия OA_0, является сила тяжести mg, действующая на материальную точку. Положение маятника в любой момент времени t будет определяться углом $y = y(t)$, на который он отклоняется от вертикали OA_0. В качестве положительного направления отсчета угла y примем направление против движения часовой стрелки. Дуга $A_0A = ly$ есть путь, пройденный материальной точкой от положения равновесия A_0 до A. Скорость движения v направлена вдоль касательной к окружности и будет иметь следующее численное значение:

$$v = l\frac{dy}{dt}. \tag{IX.307}$$

Для того чтобы составить уравнение движения, разложим силу тяжести mg на две составляющие Q и P, первая из которых направлена вдоль радиуса OA, а вторая — по касательной к окружности. Составляющая Q не может изменить численного значения скорости v, так как ее действие будет уничтожено сопротивлением нерастяжимой нити OA. Изменить значение скорости v может только составляющая P. Она действует всегда в сторону положения равновесия A_0, т. е. в сторону убыли $y(t)$, если угол $y(t)$ положительный, и в сторону роста $y(t)$,

когда $y(t)$ отрицательный. Численное значение составляющей P равно $(-mg\sin y)$, и поэтому уравнение движения маятника будет

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin y.$$

Приняв во внимание (IX.307) и сократив обе части уравнения на m, получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin y. \qquad \text{(IX.308)}$$

Обозначив постоянную величину $\frac{g}{l}$ через α^2, видим, что свободные колебания математического маятника описываются однородным уравнением Дуффинга

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha^2\sin y = 0, \quad \text{где} \quad \alpha^2 = \frac{g}{l},$$

т. е. уравнением (IX.284), в котором надо положить $\beta = 0$, а независимую переменную обозначить буквой t. Если же на точку A будет действовать периодическая сила $f(t) = \beta\sin t$, то вынужденные колебания математического маятника будут описываться неоднородным уравнением Дуффинга (IX.284), которое было рассмотрено в § 116.

Пример 6. *Простейший колебательный контур* [101, стр. 9—10]. Рассмотрим колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C, катушки индуктивности L и сопротивления R. Пусть в некоторый момент времени t между обкладками конденсатора источником питания создана разность потенциалов E, после чего источник питания отключается (рис. 256). При $L = 0$ по проводу, соединяющему обкладки конденсатора, потечет ток и будет течь до тех пор, пока потенциалы обкладок не сравняются. При $L \neq 0$ в контуре возникнут электрическое колебания. Чтобы вывести закон этих колебаний, обозначим через $V = V(t)$ разность потенциалов на обкладках конденсатора в момент t, а через $I = I(t)$ — силу тока в момент t. По известным законам физики произведение $I \cdot R$ в каждый момент времени равно полной электродвижущей силе, а последняя складывается из электродвижущей силы $\{-V(t)\}$ конденсатора и электродвижущей силы самоиндукции $\left(-L\frac{dI}{dt}\right)$. Поэтому

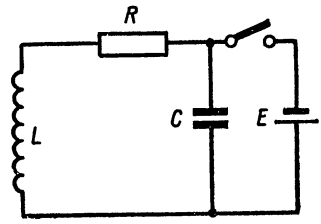


Рис. 256.

$$IR = -V - L\frac{dI}{dt}. \qquad \text{(IX.309)}$$

Обозначим через $Q(t)$ заряд конденсатора в момент t. Тогда сила тока в цепи будет равна в каждый момент производной $\frac{dQ}{dt}$. Разность потенциалов $V(t)$ на обкладках конденсатора равна $\frac{1}{C}\cdot Q(t)$. Поэтому

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt}$$

и равенство (IX.309) можно переписать в виде

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V = 0. \qquad \text{(IX.310)}$$

Таким образом, колебания в простейшем электрическом контуре описываются линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого легко найти по методу, изложенному в § 107.

Пример 7. *Колебания груза на рессоре* [102, т. 2, гл. XIII, § 26]. Пусть груз, масса которого равна m, покоится на упругой рессоре (рис. 257). Отклонение груза от положения равновесия обозначим через y. Отклонение вниз будем считать положительным, вверх — отрицательным. В положении равновесия сила веса уравновешивается упругостью пружины. Предположим, что сила, стремящаяся вернуть груз в положение равновесия, — так называемая *восстанавливающая сила* — пропорциональна отклонению, т. е. равна $(-ky)$, где k — некоторая постоянная для данной рессоры величина, которую называют *жесткостью рессоры**.

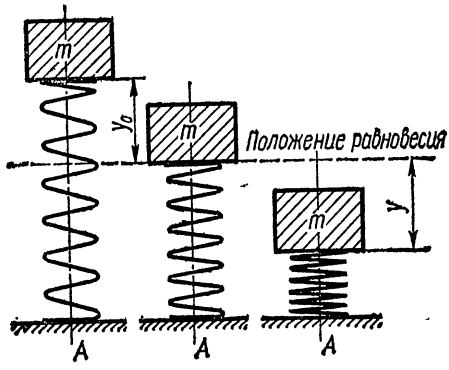


Рис. 257.

Предположим, что движению груза m препятствует сила сопротивления, направленная в сторону, противоположную направлению движения, и пропорциональная скорости движения груза относительно нижней точки рессоры, т. е. сила

$$-\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}, \text{ где } \lambda = \text{const} > 0. \tag{IX.311}$$

Такой силой в реальных условиях является сопротивление среды (жидкости или газа), в которой совершается движение, а также трение в узлах агрегата или машины, которую мы условно изобразили грузом m. Называется эта сила *амортизирующей*.

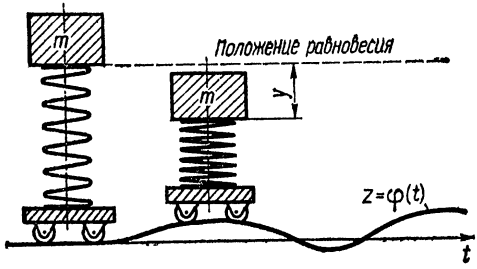


Рис. 258.

Напишем дифференциальное уравнение движения груза на рессоре. На основании закона Ньютона будем иметь

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda \frac{dy}{dt}, \tag{IX.312}$$

где k и λ — положительные константы. Таким образом, мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Это уравнение можно переписать так:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{IX.312'}$$

где

$$p = \frac{\lambda}{m}; \; q = \frac{k}{m}.$$

Предположим далее, что нижняя точка рессоры A в свою очередь совершает вертикальные движения по закону $z = \varphi(t)$. Например, это будет иметь место в случае турбоагрегата, установленного на упругом фундаменте, который под действием внешних сил совершает вынужденные колебания. Другим примером может служить тележка, шарнирно соединенная с нижним концом рессоры A, которая вместе с грузом перемещается по неровной дороге (рис. 258).

* Рессоры, у которых восстанавливающая сила пропорциональна отклонению, называются рессорами с *линейной характеристикой*. В реальных условиях чаще встречаются рессоры с *нелинейной характеристикой*, в связи с чем и соответствующие дифференциальные уравнения колебаний будут нелинейными.

В этом случае восстанавливающая сила будет равна не $(-ky)$, а $\{-k[y+\varphi(t)]\}$, сила сопротивления будет $\{-\lambda[y'+\varphi'(t)]\}$ и вместо уравнения (IX.312) мы получим уравнение

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\lambda\frac{dy}{dt}+ky=-k\varphi(t)-\lambda\varphi'(t), \tag{IX.313}$$

или

$$y''+py'+qy=f(t), \tag{IX.313'}$$

где

$$f(t)=-\frac{k\varphi(t)+\lambda\varphi'(t)}{m}.$$

Итак, мы пришли к неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка.

Уравнение (IX.312') называют *уравнением свободных колебаний*, уравнение (IX.313') — *уравнением вынужденных колебаний*. Уравнение (IX.313') тождественно совпадает с уравнением (IX.63), которое было рассмотрено в § 107 и 108.

Подчеркнем также, что уравнения (IX.310) и (IX.312) отличаются одно от другого только обозначениями. Таким образом, колебания, совершаемые в электрическом контуре, и колебания механической системы описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. Данный факт имеет принципиальное значение и широко используется при электромоделировании различных технических задач. Более подробная литература, посвященная этому важному и успешно развивающемуся разделу прикладной математики, приведена в [148, § 61].

Пример 8. *Свободное падение* [66, т. I, стр. 337—338]. Свободное падение материальной точки по вертикали, которую мы принимаем за ось y, описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=g, \text{ или } y''=g;\ g=\text{const}. \tag{IX.314}$$

Отсюда следует

$$y'=gt+v_0, \tag{IX.315}$$

где v_0 есть постоянная интегрирования, значение которой получим, полагая $t=0$. Тогда $y'(0)=v_0$, т. е. v_0 есть скорость материальной точки в начальный момент отсчета времени — *начальная скорость*.

В результате вторичного интегрирования получаем

$$y(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0, \tag{IX.316}$$

где y_0 есть также постоянная интегрирования, значение которой находим, снова полагая $t=0$, т. е. $y_0=y(0)$ суть координата точки в начальный момент — *начальная координата*.

Обратно, можно выбрать произвольно начальное положение y_0 и начальную скорость v_0, тогда уравнение

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

дает полное описание процесса движения. Этим уравнением мы пользовались в § 45 гл. IV, решая задачу о вертикальном полете метеорологической ракеты без учета сопротивления воздуха.

Если мы хотим учесть влияние сопротивления воздуха, действующего на падающую материальную точку, то должны его рассматривать как силу, действующую в направлении, противоположном направлению движения, и относительно

этой силы надо ввести известные физические допущения *. Разберем два различных физических допущения.

а). Сопротивление пропорционально скорости; в этом случае оно выражается формулой вида $(-ry')$, где r есть положительная постоянная.

б). Сопротивление пропорционально квадрату скорости и выражается зависимостью $(-ry'^2)$.

Согласно основному закону Ньютона мы получим следующие уравнения движения:

$$\text{а) } my'' = mg - ry'; \quad \text{б) } my'' = mg - ry'^2. \tag{IX.317}$$

Будем рассматривать сначала скорость $y' = v(t)$ как искомую функцию, тогда

$$y''(t) = v'(t),$$

так что приведенные выше уравнения движения примут такой вид:

$$\text{а) } mv' = mg - rv; \quad \text{б) } mv' = mg - rv^2.$$

Вместо того чтобы определять из этих уравнений v как функцию от t, найдем t как функцию от v, для чего перепишем рассматриваемые уравнения в форме:

$$\text{а) } \frac{dt}{dv} = \frac{1}{g - \frac{r}{m}v}; \quad \text{б) } \frac{dt}{dv} = \frac{1}{g - \frac{r}{m}v^2}.$$

Поскольку мы пришли к уравнениям с разделяющимися переменными, то, выполнив в соответствии с результатами § 103 интегрирование, получаем:

$$\text{а) } t(v) = -\frac{m}{r}\ln\left(1 - \frac{r}{mg}v\right) + t_0; \tag{IX.318}$$

$$\text{б) } t(v) = -\frac{1}{2}k\ln\frac{1 - \frac{v}{kg}}{1 + \frac{v}{kg}} + t_0, \tag{IX.318'}$$

где $k = \sqrt{\frac{m}{rg}}$, а t_0 есть постоянная интегрирования. Смысл t_0 таков: в момент времени $t = t_0$ скорость $v(t_0) = 0$ или, что то же самое, $t(0) = t_0$.

Решая эти уравнения относительно v, находим:

$$\text{а) } v(t) = y'(t) = -\frac{mg}{r}\left\{e^{-\frac{r}{m}(t - t_0)} - 1\right\}; \tag{IX.319}$$

$$\text{б) } v(t) = y'(t) = -gk\frac{e^{-\frac{2}{k}(t - t_0)} - 1}{e^{-\frac{2}{k}(t - t_0)} + 1}. \tag{IX.319'}$$

* Эти допущения должны учитывать конкретные обстоятельства изучаемого движения; например, законы сопротивления при малых и больших скоростях (скажем, при старте космической ракеты) различны. На величину аэродинамического сопротивления очень сильно влияет также форма тела. Поэтому ракете придают обтекаемую форму, а спускаемому аппарату (для того чтобы максимально использовать эффект торможения в атмосфере) придают форму шара, у которого аэродинамическое сопротивление очень велико.

Эти уравнения обнаруживают важное свойство рассматриваемого движения: с возрастанием t скорость растет не безгранично (как это имеет место, если не учитывать сопротивления среды, т. е. считать его равным нулю), но стремится к некоторому, определенному пределу, зависящему, в частности, от массы m. Действительно, переходя в уравнениях (IX.319) и (IX.319′) к пределу, имеем:

$$\text{а)}\ \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{r}; \qquad \text{(IX.320)}$$

$$\text{б)}\ \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{r}}. \qquad \text{(IX.320′)}$$

Вторичное интегрирование выражений для $v(t) = y'(t)$ дает следующие результаты (которые читателю полезно проверить при помощи дифференцирования):

$$\text{а)}\ y(t) = \frac{m^2}{r^2} g e^{-\frac{r}{m}(t-t_0)} + \frac{mg}{r} t + C; \qquad \text{(IX.321)}$$

$$\text{б)}\ y(t) = \frac{m}{r} \ln \operatorname{ch} \sqrt{\frac{rg}{m}} (t - t_0) + C, \qquad \text{(IX.321′)}$$

где C есть новая постоянная интегрирования. Обе постоянные интегрирования t_0 и C легко определить, если известны начальное положение $y(0) = y_0$ и начальная скорость $y'(0) = v(0) = v_0$ падающей материальной точки в момент $t = 0$.

В случае закона сопротивления среды более сложного, чем рассмотренные выше линейный или квадратичный законы, результаты можно получить, воспользовавшись методом интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов, но этот вопрос выходит за рамки данной книги.

Дальнейшие интересные примеры задач, приводящихся к дифференциальным уравнениям, можно найти в очень хорошо и доступно написанной работе И. Г. Петровского [101], из которой мы заимствовали примеры 1, 5 и 6, а также в книгах [17, 49, 66, 102, 125, 128, 182].

§ 118. Заключительные замечания

В заключение остановимся на вопросе обоснования применения степенных рядов к интегрированию дифференциальных уравнений, после чего приведем краткую историческую справку.

Степенные ряды начали применять для интегрирования дифференциальных уравнений одновременно с разработкой основ дифференциального и интегрального исчисления. Уже в ряде статей и мемуаров И. Ньютона (1642—1727), Г. Лейбница (1646—1716), Я. Бернулли (1654—1705) и И. Бернулли (1667—1748) дано систематическое изложение метода неопределенных коэффициентов для решения линейных и некоторых других дифференциальных уравнений. Дальнейший шаг в этом направлении был сделан Л. Эйлером (1707—1783).

Решение уравнения

$$y' = f(x, y),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, Эйлер предложил искать в виде степенного ряда

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

коэффициенты которого определяются согласно формуле Тейлора:

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!};\ a_1 = y'(0) = f(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}},$$

по найденным путем последовательного дифференцирования исходного уравнения производным *

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y',$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'',$$

. . . . . .

Этот метод Эйлер применил более 200 лет тому назад для изучения движения Луны и для решения уравнения Риккати и изложил его в главах VII и VIII второго тома своего мемуара «Institutionum Calculi Integralis», Petropoli, 1769.

В дальнейшем метод Эйлера нашел широкое применение при решении различных теоретических вопросов, но его практическое использование затруднялось тем, что операция дифференцирования функции $f(x, y)$ с ростом n очень быстро усложняется, и обычно этим методом трудно найти более чем 5—10 членов ряда. Все эти трудности снимаются, если коэффициенты a_n находить не по формуле Тейлора, а при помощи формулы Коши для умножения степенных рядов, как это и было осуществлено в § 110—116. Отметим также, что формула Коши позволяет строить для очень широкого класса дифференциальных уравнений алгоритмы рекуррентного типа, которые легко программируются на ЭВМ.

Остановимся кратко на вопросе обеспечения заданной точности вычислений, начав его изложение с формулировки теоремы существования и единственности для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной **.

Теорема существования (Коши). *Если $f(x, y)$ есть непрерывная функция двух независимых переменных в замкнутой области D:*

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a; \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

то существует по крайней мере одно решение $y = \varphi(x)$ уравнения

$$y' = f(x, y), \tag{IX.322}$$

принимающее при $x = x_0$ значение $y = y_0$, определенное и непрерывное для всех x, принадлежащих сегменту

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h,$$

где h есть наименьшее из двух чисел a и $\frac{b}{M}$, т. е.

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{IX.323}$$

а M равно максимуму модуля $f(x, y)$ в области D.

Так как непрерывная функция является в замкнутой области ограниченной, то из условия теоремы автоматически следует существование такого положительного числа M, что неравенство

$$|f(x, y)| \leqslant M$$

выполняется для всех точек области D, так что это условие нет необходимости включать в формулировку самой теоремы, как это иногда делается в литературе.

* В случае функции двух (или большего числа) переменных вместо обычных производных рассматривают частные производные. *Частной производной* функции $f(x, y)$ называется производная, взятая по одной из переменных в предположении, что приращение получает только одна из независимых переменных, а вторая переменная сохраняет при этом постоянное значение. Для обозначения частных производных служат символы $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$; $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$; $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ и т. д.

** Этот вопрос мы частично рассматривали в § 116, ограничившись одним числовым примером.

Если функция $f(x, y)$ не только непрерывна, но и удовлетворяет в области D условию Липшица, т. е. если при любых x для двух произвольных точек y_1 и y_2, принадлежащих D, выполняется неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N(y_1 - y_2), \tag{IX.324}$$

причем постоянная N не зависит от x, y_1 и y_2, то решение

$$y = \varphi(x), \quad \varphi(0) = y_0$$

поставленной выше задачи Коши единственное и является непрерывной функцией от начального значения y_0.

Условие Липшица, которое ограничивает рост функции $f(x, y)$ величиной $N(y_1 - y_2)$, заведомо выполняется, если $f(x, y)$ имеет в D ограниченную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Теорема существования впервые была доказана О. Коши (1789—1857), а затем (для нормальных систем дифференциальных уравнений) Э. Пикаром (1856—1941) при помощи разработанного им метода последовательных приближений, который позволяет также находить и сами решения с любой степенью точности.

Дж. Пеано (1858—1932) принадлежит доказательство теоремы существования при меньших ограничениях, а именно: он показал, что для существования решения достаточно потребовать только непрерывности функции $f(x, y)$ по обоим аргументам. Однако если $f(x, y)$ не подчинить добавочным условиям, то начальные значения, вообще говоря, будут определять не одно решение, т. е. теорема единственности не будет иметь места. Более того, М. А. Лаврентьев [67] построил пример дифференциального уравнения вида (IX.322), у которого, хотя $f(x, y)$ и непрерывна, однако в любой окрестности каждой точки области D через эту точку проходит не одна, а по крайней мере две интегральные кривые.

Единственность решения можно доказать и при более слабом условии, чем условие Липшица, например используя теорему Осгуда, как это изложено в курсе И. Г. Петровского [100, гл. III, § 12].

Результаты, полученные для уравнения (IX.322), были затем обобщены на уравнения высших порядков и на системы таких уравнений, а также перенесены в комплексную область, что подробно изложено с указанием дальнейшей литературы в [26, 38, 47, 80, 96, 100, 119, 133].

Теорема существования и единственности позволяет показать, что для определенного класса дифференциальных уравнений при помощи рядов можно обеспечить любую наперед заданную точность. Действительно, согласно этим теоремам для уравнения

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \tag{IX.325}$$

где $f(z, w)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных в области D

$$|z - z_0| < a; \quad |w - w_0| < b,$$

ограниченная в D:

$$|f(z, w)| \leqslant M$$

и непрерывная, когда z и w находятся на самих граничных окружностях, существует решение, представимое степенным рядом

$$w = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots; \quad c_0 = w(z_0), \tag{IX.326}$$

который сходится по крайней мере в круге

$$|z - z_0| < \rho; \quad \rho = \min\left(a, \frac{b}{M}\right); \quad \rho \leqslant R, \tag{IX. 327}$$

где R — истинный, но, вообще говоря, вначале неизвестный радиус сходимости ряда (IX.326).

В таком случае, если радиус гарантированной сходимости

$$\rho = a,$$

то взяв достаточное число членов ряда (IX.326), мы и обеспечиваем для всех интересующих нас

$$|z - z_0| < a$$

требуемую точность. Если же $\rho < a$, то надо воспользоваться аналитическим продолжением, выбрав новый центр ряда согласно условию

$$|\Delta z_0| \leqslant \frac{1}{2}\rho,$$

после чего весь процесс можно повторить. В результате мы либо расширим до требуемых размеров область голоморфности (т. е. область, в которой исследуемая функция представима степенным рядом), либо как угодно близко подойдем к ближайшей от исходного z_0 особой точке уравнения (IX.325), которая и определяет собой истинный радиус сходимости R ряда (IX.326).

Контроль выбранного числа членов N ряда обязательно надо осуществить численно, подставив полином степени N, которым мы фактически заменяем ряд (IX.326), в исходное уравнение и непосредственно проверив, удовлетворяет ли этот полином уравнению (IX.325) с заданной степенью точности. Контроль правильного выбора величин Δz_0 при аналитическом продолжении надо также осуществлять численно, как было описано в § 116 при решении уравнения Дуффинга.

Для увеличения надежности результатов, после того как, хотя бы грубо, найдены ближайшие к z_0 особые точки, надо все решение продублировать, увеличив число взятых членов N или число выполненных аналитических продолжений с более мелким шагом Δz_0.

Дальнейшая разработка всех этих вопросов представляет большой теоретический и практический интерес.

Как отмечалось в начале параграфа, отдельные дифференциальные уравнения возникли в математике одновременно с открытием дифференциального и интегрального исчисления, т. е. со времен работ Ньютона и Лейбница. Однородное линейное уравнение первого порядка проинтегрировал Лейбниц в 1693 г. Лейбницу же принадлежит и сам термин «дифференциальное уравнение» *.

Решение линейного однородного и неоднородного уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами было найдено Эйлером (1739 г.). Метод вариации постоянных разработал Лагранж (1775 г.), хотя надо отметить, что Эйлер решал различные задачи этим же приемом, начиная с 1739 г. Лагранж уделял также много внимания вопросу сведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, где он получил ряд результатов первостепенной важности. Разрабатывая учение об особых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений, он дал, в частности, геометрическую интерпретацию особого решения как огибающей всего семейства интегральных кривых. Лагранж ввел и сам термин «решение» дифференциального уравнения вместо «интеграла» в связи с тем, что решение не всегда требует вычисления квадратур.

На протяжении XVIII века теория дифференциальных уравнений была с успехом применена к решению различных задач небесной и теоретической механики, метеорологии, физики, что подвело под эти науки строгую математическую базу и способствовало их дальнейшему развитию.

Постановка общей проблемы существования и единственности решения дифференциального уравнения принадлежит XIX веку. Первое доказательство существования решения было дано Коши (1844 г.); затем Рудольф Липшиц (Rudolf Lipschiz, 1832—1903) значительно его упростил и сформулировал в 1876 г. условие, носящее теперь его имя. Позднее Джузеппе Пеано (Giuseppe Peano, 1858—1932)

* Впервые употребленный в письме к Ньютону от 1676 г., а затем в печати, начиная с 1684 г.

доказал теорему существования по крайней мере одного решения уравнения $y' = f(x, y)$ с условиями $x = x_0$, $y = y_0$ в области непрерывности $f(x, y)$.

Коши принадлежит идея и другого приема, так называемого метода последовательных приближений, в современной общей форме разработанного в 1890 г. Эмилем Пикаром (Émile Picard, 1856—1941). Коши распространил доказательство теоремы существования и на уравнения высших порядков посредством приведения их к системам уравнений первого порядка. Наконец, Коши дал (при некоторых ограничениях) доказательство существования решения обыкновенного уравнения и системы уравнений в частных производных первого порядка в комплексной области в форме степенных рядов, применив для этой цели мажорирующие функции.

Проблема существования решения систем уравнений в частных производных была глубоко изучена С. В. Ковалевской, которая доказала основную теорему о существовании единственного аналитического решения для заданной в так называемой нормальной форме системы уравнений в частных производных (1874 г.). Ковалевская привела и неожиданный для ее современников пример уравнения, не удовлетворяющего условиям основной теоремы и не имеющего аналитического решения.

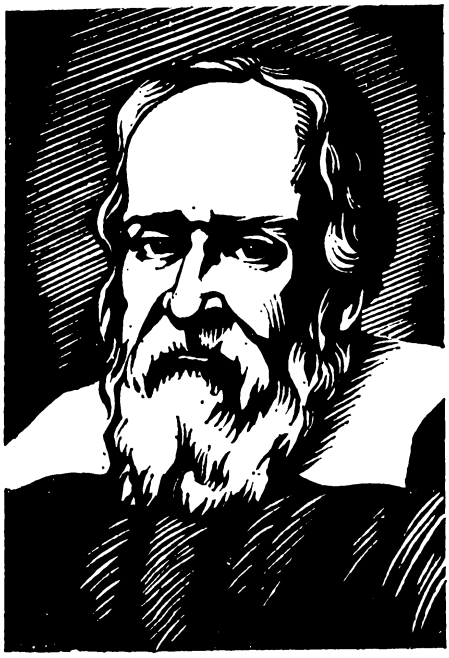
Теоремы существования имели не только принципиальное значение, гарантируя законность применения методов теории дифференциальных уравнений к задачам математического естествознания. Самые приемы доказательств этих теорем позволяли как приближаться к искомому решению с любой степенью точности, так и производить оценки точности приближений. Таким образом, эти теоремы могли быть положены в основу различных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые разрабатывались на протяжении всего XIX века.

Другим важнейшим событием в истории дифференциальных уравнений в рассматриваемое время явилось создание качественной теории, основоположником которой являются А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов.

В XX веке все эти вопросы получили дальнейшее развитие в многочисленных трудах выдающихся математиков, отечественных и зарубежных. При этом в первую очередь надо отметить математические школы, созданные И. Г. Петровским, В. И. Смирновым, С. Л. Соболевым, Л. Н. Тихоновым (в Москве, Ленинграде и Новосибирске), киевскую школу Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского, которые являются основоположниками нелинейной механики и нового асимптотического направления в теории дифференциальных уравнений, получившего широкое признание как в нашей стране, так и далеко за ее пределами, и школу Н. П. Еругина, многочисленные ученики и последователи которого работают в Ленинграде, Минске и многих других городах. Более подробный очерк по истории дифференциальных уравнений, написанный А. П. Юшкевичем, помещен в курсе В. В. Степанова [133, стр. 428—458], а работы отечественных математиков исчерпывающим образом освещены в капитальном труде [45], ответственным редактором которого является И. З. Штокало. И. З. Штокало принадлежат также монографии [166, 167], в которых получены важные результаты для линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Ряд оригинальных результатов, связанных с теорией интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и их многочисленными приложениями, читатель найдет также в монографиях и учебниках [10, 11, 19, 26, 37, 38, 47, 49, 55, 60, 62, 79, 80, 86, 88—90, 96, 100, 109, 112, 119, 125, 131, 133, 145, 148, 150, 159, 170, 178, 182, 185, 189], где приведена и дальнейшая библиография.

Заканчивая главу, нельзя не подчеркнуть, что фундаментом для создания теории дифференциальных уравнений послужили работы выдающихся физиков, механиков, инженеров и астрономов предшествующих веков, таких как Архимед, Г. Галилей, Р. Гук, Х. Гюйгенс, И. Кеплер, Н. Коперник, Леонардо да Винчи, Тихо Браге, Э. Торричелли и многих других.

Галилео Галилей (Galileo Galilei, 1564—1642), великий итальянский физик, механик и астроном, один из основателей точного естествознания. Родился в г. Пизе в знатной, но обедневшей семье. С семнадцатилетнего возраста изучал медицину в Пизанском университете, однако, увлекшись математикой, оставил эти



Галилео Галилей.

занятия. С 1589 г.— профессор математики и астрономии Пизанского университета, с 1592 г. — университета в г. Падуя. Галилей установил законы движения тяжелых тел в пустоте, законы инерции и относительного движения тел, изохронность колебаний маятника; исследовал равновесие сил в машинах и прочность материалов; сконструировал гидростатические весы. Первые астрономические наблюдения Галилей выполнил в 1604 г.; в 1609 г. он построил свою первую зрительную трубу трехкратного, а вскоре и тридцатидвухкратного увеличения. При помощи этих труб провел ряд наблюдений: открыл четыре спутника Юпитера, горы на Луне, пятна на Солнце и фазы Венеры; установил, что Галактика состоит из отдельных звезд и что существует много звезд, невидимых невооруженным глазом. Эти наблюдения опровергли теорию существования идеальных сфер Аристотеля и его догмат о совершенстве небесных тел. Все эти работы вызвали восхищение в научных кругах и гнев католического духовенства, которое начало публично выступать против Галилея и организовало тайное следствие. После опубликования в 1632 г. книги Галилея «Диалог о двух важнейших системах мира — птолемеевой и коперниканской» («Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano»), в которой в завуалированной форме приводились доказательства в пользу учения Коперника, папа Урбан VIII распорядился начать новый суд над Галилеем. На допросе инквизицией (1633 г.) Галилей формально отрекся от учения Коперника и после суда был передан под надзор инквизиции. Он прожил еще девять лет. За это время Галилей разработал метод определения долготы на море по спутникам Юпитера, открыл либрацию Луны и окончил большой научный труд, в котором изложил результаты своих исследований и открытий по механике. Этот труд был издан в Голландии в 1638 г. под названием «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» («Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attentati alla mecanica e i movimenti locali»).

Галилей высоко ценил математику и свое понимание ее значения высказал в 1623 г. в следующих замечательных словах*: «Философия написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами (я разумею Вселенную), но ее нельзя понять, не научившись сначала понимать ее язык и не изучив буквы, которыми она написана. А написана она на математическом языке, и ее буквы это треугольники, дуги и другие геометрические фигуры, без каковых невозможно понять по-человечески ее слова: без них — тщетное кружение в темном лабиринте».

В 1964 г. вышли в свет «Избранные труды» Галилея с большой вводной статьей главного редактора этого издания академика А. Ю. Ишлинского.

Софья Васильевна Ковалевская (1850—1891), выдающийся русский математик; первая в мире женщина — профессор и член-корреспондент Петербургской академии наук. Родилась в Москве. Ее отец Василий Васильевич Корвин-Круковский был генерал-лейтенантом артиллерии. Мать Елизавета Федоровна — внучка

* G. Galilei, Le Opere, v. VI. Firenze, 1891, p. 232.

известного астронома академика Ф. Ф. Шуберта. Работы С. В. Ковалевской относятся к теории дифференциальных уравнений, теории алгебраических функций, теоретической и небесной механике.

Еще в 1874 г. за работы «К теории уравнений в частных производных», «Дополнения и замечания к исследованиям Лапласа о форме кольца Сатурна» и «О приведении одного класса абелевых интегралов к интегралам эллиптическим» Геттингенский университет присудил Ковалевской степень доктора философских наук с высшей похвалой. За работу «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки» она получила в 1888 г. от Парижской академии наук особо высокую премию ввиду большой ценности этой работы. В следующем году за вторую работу о вращении твердого тела ей была присуждена еще одна премия Шведской академии наук.

Софья Васильевна Ковалевская.

С. В. Ковалевская как ученый получила мировое признание и, несмотря на это, не была допущена к преподаванию ни в университете, ни даже на Высших женских курсах. По законам того времени считалось недопустимым, чтобы женщина была профессором в высшей школе, так же как недопустимым считалось избрание женщины в Академию наук. Однако, по представлению академиков П. Л. Чебышева, В. Г. Имшенецкого и В. Я. Буняковского, в 1889 г. С. В. Ковалевская была избрана членом-корреспондентом Петербургской академии наук, после того как перед этим специально был решен принципиальный вопрос о допущении женщин к избранию в члены-корреспонденты.

Не имея возможности отдать свой талант служению родине, Ковалевская вынуждена была работать профессором Стокгольмского университета.

Ковалевская известна также как автор ряда художественных произведений: «Борьба за счастье» (1887 г.), «Воспоминания о детстве» (1890 г.), «Нигилистка» (1891 г.) и др. Эти произведения свидетельствуют о том, что Ковалевская принадлежала к передовым людям своего времени и разделяла взгляды революционных демократов.

В издательстве АН СССР в 1948 г. вышли в свет «Научные работы» С. В. Ковалевской, которые сопровождаются большой обзорной статьей, принадлежащей академику П. Я. Полубариновой-Кочиной.

Анри Пуанкаре (Henri Poincaré, 1854—1912), выдающийся французский математик и физик, член Парижской академии наук (с 1887 г.) и многих других академий. Родился в г. Нанси. В 1879 г. окончил в Париже Горную школу. С 1886 г.— профессор Парижского университета.

Работы Пуанкаре относятся ко многим разделам математики и физики, в частности: к теории дифференциальных уравнений, к математической физике, теории функций, рядов, групп и подстановок, теории чисел, топологии, геометрии, небесной механике и т. д.

Пуанкаре построил качественную теорию дифференциальных уравнений, ввел классификацию особых точек, впервые обосновал теорию периодических и асимптотических решений дифференциальных уравнений, рассмотрел некоторые вопросы об устойчивости движения. Пуанкаре одновременно с Эйнштейном и независимо от него сформулировал основные положения специальной теории относительности. Ряд его работ относится к неевклидовым геометриям. В частности, Пуанкаре

Анри Пуанкаре.

принадлежит одна из интерпретаций геометрии Лобачевского, которая играет большую роль в теории функций комплексного переменного.

В настоящее время готовится к печати в переводе на русский язык трехтомное собрание избранных произведений А. Пуанкаре.

Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918), один из наиболее выдающихся русских математиков и механиков, член Петербургской академии наук (с 1901 г., член-корреспондент с 1900 г.). Родился в Ярославле. Отец его был астрономом, работал в Казанском университете, а затем директором Демидовского лицея. В 1876 г. после окончания с золотой медалью гимназии в Нижнем Новгороде Ляпунов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета, который успешно окончил в 1880 г. На развитие яркого математического таланта А. М. Ляпунова большое влияние оказали профессора университета П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, а также К. А. Поссе и Д. К. Бобылев.

Александр Михайлович Ляпунов.

Основные работы Ляпунова относятся к небесной механике, математической физике и теории вероятностей. Ляпунов является создателем современной теории устойчивости движения. Он изучал фигуры равновесия однородной и слабо неоднородной вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются согласно закону всемирного притяжения, доказал существование фигур равновесия, близких к эллипсоидальным. Он выявил также существование близких к сфере фигур равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости в случае изменения ее плотности с глубиной и доказал неустойчивость грушеподобных фигур равновесия, вопреки обратным утверждениям А. Пуанкаре и Дж. Дарвина. Исключительное значение имеет созданная А. М. Ляпуновым современная теория стойкости механических систем, определенных конечным числом параметров. Ему принадлежит также решение вопроса о существовании периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений определенного типа и ряда других. В теории вероятности Ляпунов доказал так называемую *центральную граничную теорему*.

Научные исследования А. М. Ляпунова являются существенным вкладом

в математику, механику и математическую физику. Они открыли новый этап в развитии нашей отечественной науки и послужили отправным пунктом при решении важных и сложных проблем для многочисленных последователей ученого.

В 1954—1965 гг. Академия наук СССР издала пятитомное собрание сочинений А. М. Ляпунова

Контрольные упражнения

1. Проинтегрировать следующие уравнения с разделяющимися переменными:

а) $y\,dx - x\,dy = 0$;

б) $(y - x^2y)\,dy + (x + xy^2)\,dx = 0$;

в) $x^2\,dy + (y - 7)\,dx = 0$;

г) $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$.

2. Найти частные решения уравнений:

а) $x^2\,dx + y\,dy = 0$, если при $x = 0$ $y = 1$;

б) $x^3\,dy = y^3\,dx$, если при $x = \sqrt{3}$ $y = \sqrt{2}$;

в) $(1 + y^2)\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$, если при $x = 0$ $y = 1$;

г) $ds = (4t - 3)\,dt$, если при $t = 0$ $s = 0$;

д) $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, если при $x = 0$ $y = 2$.

е) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}$, если при $y = 1$ $x = -3$.

3. Проинтегрировать уравнение

$$x(x + 2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1; 2).

4. Проинтегрировать уравнение $(t - s)\,dt + t\,ds = 0$.

5. Проинтегрировать уравнение $(3y - 7x + 7)\,dx - (3x - 7y - 3)\,dy = 0$, сведя его к однородному уравнению.

6. Найти уравнение кривой, угловой коэффициент касательной в любой точке которой равен $6x^2 - 5$.

7. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; —7), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен $2x + 3$.

8. Доказать, что кривая, у которой угловой коэффициент касательной в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

9. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20° С и тело в течение 20 *мин* охлаждается со 100° до 60° С, то через сколько времени его температура понизится до 30° С?

10. Наблюдатель, измерив барометрическое давление на поверхности земли и на смотровой площадке главного корпуса МГУ, нашел, соответственно, что $p_0 = 735{,}2$ *мм* и $p = 718{,}8$ *мм*. Определить по формуле (IX.304) на какую высоту поднялся наблюдатель, если $c \approx 0{,}000125$.

11. Проинтегрировать следующие линейные дифференциальные уравнения:

а) $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$;

б) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{ay}{x} = \dfrac{x + 1}{x}$;

в) $y' - ay = e^{bx}$;

г) $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s \sin t = 1$.

12. Проинтегрировать уравнение Бернулли:

$$y' + xy = x^3y^3.$$

13. Определить при помощи рядов на сегменте $[-1; 1]$ с пятью десятичными знаками решение задачи Коши:

$$y'' = e^x + \sin y; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Вычислить значения $y(x)$ и $y'(x)$ для $x = \pm 0{,}5$; $x = \pm 1$ и по этим данным построить соответствующие графики.

14. Найти для уравнения Дуффинга $y(x)$ при $x = 1{,}2$, интерполируя данные, приведенные в табл. 110. Результаты проконтролировать при помощи ряда II, коэффициенты которого вычислены в табл. 109.

Глава X

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В предыдущих главах мы неоднократно пользовались некоторыми понятиями теории функций комплексного переменного.

Изложим более подробно основы этой теории, которая играет исключительно важную роль как в самой математике, так и в ее многочисленных приложениях.

§ 119. Комплексные числа

Понятие числа, которое является одним из самых основных математических понятий, имеет свою многовековую историю. Число, как и все научные понятия, возникло не в результате свободного творчества человеческого разума, а было создано для удовлетворения практических потребностей людей. Так как с течением времени практическая деятельность людей развивалась, то и понятие числа также изменялось и совершенствовалось.

Понятие о числе возникло в доисторические времена в связи с необходимостью счета различных предметов, животных, растений и т. д. Поэтому первоначально рассматривались лишь целые и положительные числа, которые теперь называют *натуральными числами*. Натуральные числа вполне удовлетворяли потребности практики тех времен, и лишь по прошествии многих веков возникли дробные числа как результат деления, производимого над объектами, для которых имеет смысл дробление единицы на равные доли. Потребность более точных измерений таких величин, как длина, площадь, вес, время и т. п., привела к дроблению основной единицы меры на более мелкие части, получившие особые наименования.

Так, например, были введены минута (от латинского *minutus* — уменьшенный, малый) для обозначения 1/60 часа или градуса, секунда (от латинского *secunda* — второй, т. е. второе деление) для обозначения 1/60 минуты, или $1/60^2 = 1/3600$ часа или градуса.

Несмотря на то, что дробные числа встречаются в самых древних из известных нам рукописей, понятие дроби как отвлеченного числа проникало в науку с чрезвычайным трудом и начало получать признание лишь в XVI—XVII веках после изобретения десятичных дробей и логарифмов. Особенно большие логические трудности представлял тот факт, что при умножении на правильную дробь в результате получалось число не большее, а меньшее исходного. Интересно также отметить, что еще Штифель в 1553 г. назвал дроби «воображаемыми числами».

Целые положительные числа совместно с числами дробными получили название *рациональных чисел*.

Задачи измерения непрерывных величин, т. е. выражения всякого значения такой величины числом, привели к введению чисел *иррациональных*.

Историческое предание приписывает так называемое «открытие» иррациональных чисел Пифагору, который обнаружил несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной. Другими словами, Пифагор обнаружил, что отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не может быть выражено никаким рациональным числам (это отношение может быть выражено только бесконечной дробью: $a\sqrt{2} : a = \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$).

Значительно позже начали появляться и входить в обиход отрицательные числа. Систематическое применение отрицательных чисел в общих формулах и их использование в качестве коэффициентов алгебраических уравнений одновременно с введением нуля как самостоятельного числа впервые встречаются у индусов (VI—XI век) и несколько позже у народов Средней Азии и Закавказья — хорезмийцев, таджиков, узбеков, азербайджанцев и др. Индусам же принадлежит и правильное истолкование нуля, отрицательных чисел и действий над ними на примерах простейших направленных величин, таких как прибыль — убыток, перемещение в противоположных направлениях и т. п.

В этом отношении средневековые европейские алгебраисты долгое время отставали от ученых Востока и либо совсем не рассматривали отрицательных решений уравнений, либо, получая такие уравнения, считали отрицательные числа фиктивными, абсурдными числами, «числами меньшими, чем ничто». Лишь в XVI веке Декарт, разрабатывая аналитическую геометрию, дал геометрическое истолкование отрицательных чисел как направленных отрезков, которое с тех пор и стало общепринятым.

Новое расширенное понятие о числе окончательно закрепляется в математике в самом начале XVIII века определением, данным Ньютоном, которое было приведено в конце § 24 гл. III.

Числа рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные получили общее название *действительных*, или *вещественных*, чисел.

Геометрически действительные числа изображаются точками *числовой оси* — прямой, на которой указано положительное направление, масштаб и начальная точка (т. е. точки, изображающие нуль и единицу).

Однако не успело еще закрепиться новое расширенное понятие числа, как в процессе дальнейшего развития математики обнаружилось, что и новое понятие является также неудовлетворительным. В частности, решение квадратных уравнений уже на самой ранней ступени развития алгебры привело к невозможной в области действительных чисел операции извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Величина b^2 при любом числовом значении b будет не отрицательна, т. е. она может быть либо положительна, либо равна нулю, например при $b = \pm 8$ имеем $b^2 = +64$; при $b = 0$ и $b^2 = 0$.

Таким образом, среди действительных чисел нет ни одного такого, квадрат которого был бы величиной отрицательной; следовательно, и корень квадратный из отрицательной величины $\sqrt{-b^2}$ не может быть выражен никаким действительным числом.

Означает ли это, однако, что величина $\sqrt{-b^2}$ является «воображаемой», «невозможной», «мнимой», как ее называли, следуя традиции, неизменно повторяющейся при всяком новом расширении понятия числа?

Конечно, нет. Величина $\sqrt{-b^2}$ является реально существующей величиной, которая только не может быть выражена узким, несовершенным понятием действительного числа.

С аналогичными явлениями мы сталкиваемся не только в математике. Например, обыкновенная фотопленка всю красочность природы передает как комбинацию черных и белых тонов. Однако в связи с этим никто не утверждает, что «действительными» цветами являются только белый и черный, а все остальные — «воображаемые», «невозможные», «мнимые». Новая, более совершенная пленка, светочувствительный слой которой состоит не из одного, а из трех слоев, чувствительных соответственно к синему, желтому и зеленому цветам, уже в состоянии дать снимок в натуральных красках.

Так и в рассматриваемом случае, кроме известной «действительной» единицы, при помощи которой выражаются все действительные числа, необходимо ввести еще одну, принципиально новую единицу, которую будем обозначать буквой i, понимая под этим обозначением величину

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad i^2 = -1.$$

Тогда $\sqrt{-b^2}$ может быть выражено через новую единицу i так:

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{(-1)(+b^2)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{+b^2} = ib.$$

По исторической традиции число i назвали *мнимой единицей*, а числа ib — *чисто мнимыми числами*.

Число вида

$$a + ib$$

получило название *комплексного числа*, в котором различают *действительную часть* (a) и *мнимую часть* (b).

Действительные числа, как было сказано выше, геометрически изображаются *точками числовой оси*. Комплексные числа на одной числовой оси представить невозможно. Они изображаются *точками числовой плоскости*: каждое конкретное комплексное число изображается точкой в системе прямоугольных координат. Осью абсцисс является действительная числовая ось, а осью ординат — ось «чисто мнимых чисел» (на рис. 259, для примера, изображены числа $2{,}0 + 3{,}0i$; $-1{,}5 + 2{,}4i$; $-2{,}3 - 1{,}2i$; $3{,}1 - 2{,}5i$).

Для изображения комплексных чисел на числовой плоскости необходимо уже задать начало отсчета (нулевую точку), положительное направление каждой из осей и две масштабные единицы: действительную (1) и мнимую (i). Обычно масштаб по обеим осям выбирают одинаковым, но это не является обязательным.

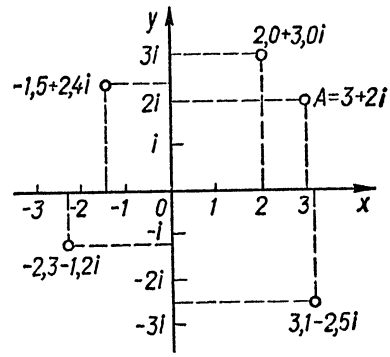


Рис. 259.

Таким образом, любому комплексному числу $a + ib = (1 \cdot a) + (i \cdot b)$ соответствует одна и только одна точка числовой плоскости, определяемая координатами (a, b); и, обратно, каждой точке числовой плоскости соответствует одно и только одно комплексное число, действительная часть которого (a) равна абсциссе, а коэффициент при мнимой части (b) — ординате точки. Например, точка A на рис. 259 изображает комплексное число $A = 3 + 2i$.

Установленный факт кратко формулируется так: *между точками числовой плоскости и всем множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие*. В случае $b = 0$ комплексное число обращается в число действительное, при $a = 0$, $b \neq 0$ оно будет чисто мнимым.

Комплексные числа начали появляться в работах отдельных математиков начиная с XVI века. Но широкое признание и распространение они получили лишь в XIX веке, после того как на рубеже XVIII — XIX веков одновременно и независимо друг от друга К. Гауссом (в 1797—1799 гг.), К. Весселем (в 1798—1799 гг.) и Ж. Арганом (в 1806 г.) была дана геометрическая интерпретация комплексных чисел как точек числовой плоскости, и после того, как при помощи комплексных чисел удалось решить ряд практически важных задач, неразрешенных в области действительных чисел.

До тех пор к комплексным числам относились с большим недоверием и не понимали их сути даже многие крупные математики. Например, Лейбниц писал. «Комплексное число — это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием».

В заключение остановимся еще на связи между расширением понятия числа и на возможностях выполнения математических действий.

В области натуральных чисел всегда выполнимы только сложение и умножение. Вычитание уже может приводить к числам отрицательным, а деление — к дробным.

В области рациональных чисел всегда выполнимы все четыре действия арифметики, но действие извлечения корня не всегда возможно.

В области действительных чисел возникшая трудность снята лишь частично: извлечение корня возможно за исключением извлечения корней четной степени из отрицательных чисел.

В области комплексных чисел всегда выполнимы все четыре действия арифметики и извлечения корня любой степени из любого комплексного числа. (Действие возведения в степень мы не рассматриваем, так как оно эквивалентно действию умножения).

В результате выполнения этих действий над комплексными числами снова получаем комплексные числа.

Для комплексных чисел остаются справедливыми все основные законы арифметики и алгебры и в качестве значения функции от комплексного аргумента мы получаем снова комплексное число.

Кроме того, целый ряд вопросов, которые в области действительного переменного не могли быть решены и часто рассматривались как парадоксы, получили простое и естественное объяснение в области комплексного переменного.

Например, в области комплексного переменного алгебраическое уравнение n-й степени всегда имеет точно n корней, в то время как в области действительного переменного оно может иметь и меньшее число корней и даже ни одного, на чем мы останавливались в гл. VII.

В области комплексного переменного существует логарифм от отрицательных чисел, функции синус и косинус могут принимать любые значения, а не только значения, не превышающие единицы, и т. д.

К рассмотрению этих вопросов мы еще вернемся в дальнейшем.

§ 120. Основные определения

Обозначим комплексное число $x + iy$ одной буквой z:

$$z = x + iy. \tag{X.1}$$

Этой же буквой z обозначим точку на плоскости xOy, изображающую собой комплексное число $z = x + iy$ (рис. 260). Будем также говорить, что комплексное число $z = x + iy$ есть *аффикс* точки, которую это число изображает.

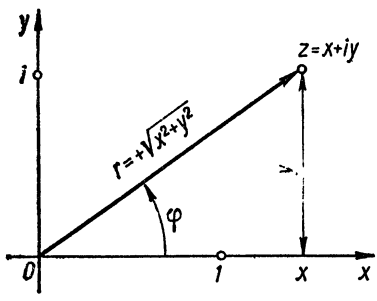


Рис. 260.

Числа x и y называют, соответственно, *действительной (вещественной)* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначают символами:

$$x = \operatorname{Re} z \tag{X.2}$$

(от латинского слова realis — действительный),

$$y = \operatorname{Im} z \tag{X.3}$$

(от латинского слова imaginaris — мнимый).

Иногда мнимой частью числа z называют произведение iy, а величину y — коэффициентом мнимой части. Такая терминология более естественна, но менее удобна, поэтому мы будем придерживаться терминологии, принятой в курсах М. А. Лаврентьева [68, 70], А. Д. Мышкиса [94], В. И. Смирнова [125], Ю. Д. Соколова [130] и др.

Числа x и y являются также координатами точки в комплексной числовой плоскости xOy.

Числа вещественные, для которых $y = 0$, изобразятся в этой плоскости точками оси Ox; числа чисто мнимые, для которых $x = 0$, $y \neq 0$, изобразятся точками оси Oy. Поэтому ось Ox называется *действительной осью*, а ось Oy — *мнимой осью*. Число нуль, для которого $x = y = 0$, является началом координат.

Таким образом, и действительные и чисто мнимые числа являются частными случаями комплексных чисел.

Необходимо отметить, что знак «+» в символе $x + iy$ не есть знак алгебраического действия. Выражение $x + iy$ надо рассматривать как единый символ для обозначения комплексного числа, изображаемого точкой комплексной числовой плоскости.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить не только точкой, но и вектором Oz, проекции которого на оси были бы соответственно равны x и y. Знаки величин x и y определяют направление проекций вектора по осям и тем самым однозначно определяют направление вектора.

Понятие о равенстве двух комплексных чисел вытекает из их геометрической интерпретации.

Две точки на плоскости совпадают только в том случае, если эти точки имеют одинаковые координаты как по оси Ox, так и по оси Oy.

Определение. *Два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные и мнимые части.*

Следовательно, из одного равенства с комплексными числами:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

вытекает два равносильных равенства с действительными числами:

$$x_1 = x_2;\ y_1 = y_2.$$

В частности, если комплексное число равно нулю:

$$z = x + iy = 0,$$

то это означает, что непременно и

$$x = 0, \text{ и } y = 0.$$

Знаками неравенства комплексные числа соединять нельзя, т. е. неравенств вида $z_1 < z_2$ или $z_3 > z_4$ не существует.

Вектор $z = x + iy$ можно определить не только прямоугольными координатами x и y; его можно также однозначно определить и полярными координатами: длиной вектора r и углом φ, который вектор z образует с положительным направлением оси Ox (см. рис. 260).

В таком случае, рассматривая треугольник Ozx, будем иметь

$$x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi; \tag{X.4}$$

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \tag{X.5}$$

Положительное число r называется *модулем*, а угол φ *аргументом* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается

$$\varphi = \arg z. \tag{X.6}$$

При данных значениях x и y модуль комплексного числа $z = x + iy$ определяется единственным образом, а аргумент φ определяется лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π *, так как всякий вектор $\overrightarrow{Oz}$ совместится сам с собою, если его повернуть на любое число полных оборотов в ту или другую сторону вокруг точки O.

Поэтому если два комплексных числа равны, то модули их между собой равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемыми, кратными $\pm 2\pi$.

Зная, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, можем комплексное число $z = x + iy$ представить в следующей форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{X.7}$$

Эта форма комплексного числа называется *тригонометрической*, форма (X.1) называется *алгебраической*.

Если мнимая часть комплексного числа равна нулю ($y = 0$), то его модуль $r = +\sqrt{x^2 + 0} = |x|$. Следовательно, модуль действительного числа совпадает с его абсолютным значением. По аналогии и для обозначения модуля числа $z =$

* Углы измеряем в радианах. Для перехода к градусному измерению углов пользуемся соотношением

$$2\pi \text{ рад} = 360°.$$

$= x + iy$ также применяют знак абсолютного значения (т. е. число пишут между двумя вертикальными черточками):

$$r = |z| = |x + iy|. \qquad (X.8)$$

Пример 1. Определить модуль и аргумент числа $z = -3 + 4i$.

Решение. В данном случае $x = -3$, $y = +4$. Поэтому, подставив эти значения в формулы (X.5), (X.6), (X.8), имеем

$$|z| = r = +\sqrt{x^2 + y^2} = +\sqrt{9 + 16} = 5;$$

$$\arg z = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) = 2{,}21424 \text{ рад} = 126^\circ 52'.$$

Пример 2. Представить в тригонометрической форме числа

$$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i; \quad z_2 = 2\sqrt{3} - 2i; \quad z_3 = 3i; \quad z_4 = -2.$$

Решение. Определив для каждого из заданных чисел модуль $|z| = r$ и аргумент φ (что читателю полезно выполнить в виде упражнения) и подставив найденные значения в формулу (X.7), получаем

$$z_1 = 4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ); \quad z_2 = 4(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ);$$
$$z_3 = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ); \quad z_4 = 2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ).$$

Упражнения

1. В соответствии с рис. 260 построить в комплексной плоскости числа z_1, z_2, z_3, z_4, рассмотренные в примере 2.

2. Представить в алгебраической форме числа

$$z_1 = 5(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ); \quad z_2 = 5(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ);$$

$$z_3 = 5(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ); \quad z_4 = 5(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ),$$

а затем изобразить их в комплексной плоскости.

§ 121. Алгебраические действия над комплексными числами

Сложение комплексных чисел выполняется по правилу сложения векторных величин. На рис. 261 геометрически построена сумма комплексных чисел $z_1 + z_2$.

Из построения непосредственно вытекает аналитическая формула сложения двух комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \qquad (X.9)$$

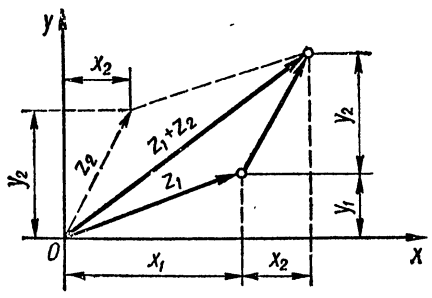


Рис. 261.

Полученный результат легко обобщается на случай любого числа слагаемых: сложив два вектора z_1 и z_2, получаем результирующий вектор $(z_1 + z_2)$, к вектору $(z_1 + z_2)$, пользуясь тем же правилом, прибавляем вектор z_3 и т. д., каково бы ни было число слагаемых.

Таким образом, правило сложения комплексных чисел можно сформулировать следующим образом.

При сложении комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2$; ...; $z_n = x_n + iy_n$ *получаем в результате комплексное число, действительная и мни-*

мая части которого, соответственно, равны суммам действительных и мнимых частей всех слагаемых:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \quad (X.10)$$

Пример 1. Сложить следующие три комплексных числа:

$$z_1 = 6 + 3i;\ z_2 = 2 - 5i;\ z_3 = -1 + 4i.$$

Решение. Подставив числа z_1, z_2, z_3 в формулу (X.10), находим ответ:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (6 + 2 - 1) + i(3 - 5 + 4) = 7 + 2i.$$

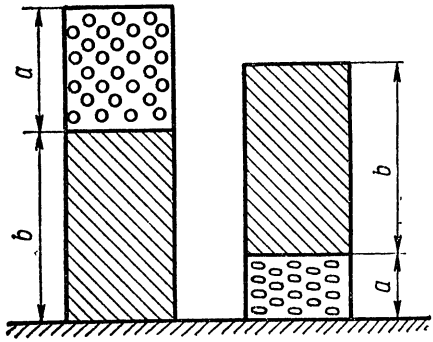


Рис. 262.

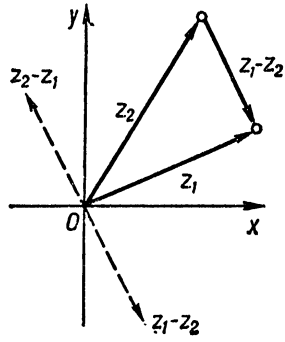


Рис. 263.

Нетрудно видеть, что сумма комплексных чисел не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон), ибо такими свойствами обладает каждая из сумм $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ и $(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$.

Замечание. Переместительный закон

$$a + b = b + a,$$

как и любой другой математический закон, носит ограниченный характер и справедлив только при определенных условиях, которым должны удовлетворять величины a и b.

Например, определим суммарную высоту двух вертикально поставленных цилиндров, один из которых изготовлен из свинца, а другой — из пористого пенопласта (рис. 262). Очевидно, что в этом случае суммарная высота будет зависеть от порядка «слагаемых» и благодаря сжимаемости пористого цилиндра

$$a + b \neq b + a,$$

т. е. переместительный закон в рассматриваемом случае не будет иметь места.

Вычитание комплексных чисел. Сложение допускает и обратную операцию: для любых двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ всегда можно найти такое число $z = x + iy$, что

$$z_2 + z = z_1.$$

Это число называется *разностью чисел* z_1 и z_2 и обозначается символом $z_1 - z_2$. Очевидно, что

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (X.11)$$

На рис. 263 дано геометрическое построение разности комплексных чисел $z_1 - z_2$: прибавив к вектору z_2 вектор $z = (z_1 - z_2)$, получаем вектор z_1.

Перенеся вектор $(z_1 - z_2)$ параллельно самому себе в начало координат, получим точку комплексной числовой плоскости $(z_1 - z_2)$. Вектор $(z_2 - z_1) = -(z_1 - z_2)$ совпадает по величине с вектором $(z_1 - z_2)$, но направление его противоположно.

Установим важные для дальнейшего свойства модуля суммы и разности двух комплексных чисел.

Из геометрического построения суммы двух комплексных чисел (см. рис. 261) следует, что прямая $|z_1 + z_2|$ не может быть длиннее ломаной, состоящей из звеньев $|z_1|$ и $|z_2|$:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \tag{X.12}$$

т. е. *модуль суммы меньше или равен сумме модулей.* Знак равенства в соотношении (X.12) будет иметь место лишь в том случае, когда векторы z_1 и z_2 имеют одинаковое направление.

Принимая во внимание, что каждая из сторон треугольника всегда больше разности двух других сторон, можем, воспользовавшись рис. 261, написать

$$|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|, \tag{X.13}$$

т. е. *модуль суммы двух слагаемых больше или равен разности модулей этих слагаемых.*

Равенство имеет место лишь в том случае, когда направления векторов z_1 и z_2 противоположны.

Объединяя неравенства (X.12) и (X.13), будем иметь

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{X.14}$$

Далее, так как разность комплексных чисел $z_1 - z_2$ всегда можно истолковать как сумму числа z_1 и числа $(-z_2)$, направление которого противоположно направлению числа $(+z_2)$:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2),$$

то соотношения (X.14) остаются справедливыми и для разности комплексных чисел

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{X.15}$$

Величина $|z_1 - z_2|$ геометрически означает расстояние между точками z_1 и z_2 (рис. 263).

Пример 2. Пусть $z_1 = -4 + 3i$; $z_2 = 4 + 3i$; в таком случае $|z_1| = |z_2| = 5$; $z_1 + z_2 = 6i$; $|z_1 + z_2| = 6$; $z_1 - z_2 = -8$; $|z_1 - z_2| = 8$, и действительно,

$$|z_1| - |z_2| < |z_1 \pm z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Умножение комплексных чисел. Примем по определению, что

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \tag{X.16}$$

и будем комплексное число $x + iy$ условно рассматривать как сумму действительного числа x и числа чисто мнимого iy. Тогда произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, как произведение буквенных многочленов, дает

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2.$$

Приняв во внимание, что $i^2 = -1$, и группируя действительные и мнимые части, находим

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{X.17}$$

Пример 3. Найти произведение чисел $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 2 + 5i$.

Решение. Согласно формуле (X.17) имеем

$$(3 - 4i)(2 + 5i) = [(2 \cdot 3) - (-4 \cdot 5)] + i[(3 \cdot 5) + (-4 \cdot 2)] = 26 + 7i.$$

Отметим важный частный случай произведения двух комплексных чисел, а именно:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2. \qquad (X.18)$$

Определение. *Два комплексных числа* $x + iy$ *и* $x - iy$, *действительные части которых равны, а мнимые части различаются только знаками, называются сопряженными.*

Число, сопряженное к $z = x + iy$, обозначается чертой, поставленной над ним:

$$\bar{z} = x - iy. \qquad (X.19)$$

Учитывая согласно уравнению (X.5), что модуль комплексного числа определяется равенством

$$r = |z| = +\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (X.20)$$

равенство (X.18) обычно записывают так:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2, \qquad (X.21)$$

т. е. *произведение сопряженных чисел есть число действительное и равно квадрату модуля каждого из них* (так как $|z| = |\bar{z}|$).

Отметим еще очевидные формулы

$$z + \bar{z} = 2x; \quad z - \bar{z} = 2iy. \qquad (X.22)$$

Выведем правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)] \cdot [r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)].$$

Но из тригонометрии известно, что

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

поэтому

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (X.23)$$

Рассматривая $z_1 \cdot z_2$ как одно комплексное число, формулу (X.23) легко распространить на случай трех сомножителей, а затем и на случай любого числа сомножителей.

В результате приходим к следующей формулировке: *произведение комплексных чисел* $z_1 \cdot z_2 \cdots z_n$ *есть снова комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей*, т. е.

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n)]. \qquad (X.24)$$

Отсюда вытекает, что произведение комплексных чисел только тогда равно нулю, когда, по крайней мере, один из сомножителей равен нулю.

Пример 4. Найти произведение следующих комплексных чисел:

$$z_1 = 2{,}5(\cos 35° + i\sin 35°); \; z_2 = 0{,}6(\cos 143° + i\sin 143°);$$
$$z_3 = 5{,}8(\cos 257° + i\sin 257°).$$

Решение. Подставив данные z_1, z_2, z_3 в формулу (X.24), имеем

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 2{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 5{,}8[\cos(35° + 143° + 257°) + i\sin(35° + 143° + 257°)] =$$
$$= 8{,}7(\cos 435° + i\sin 435°) = 8{,}7(\cos 75° + i\sin 75°).$$

Формула (X.23) позволяет также дать простое геометрическое толкование операции умножения. При умножении комплексного числа z_1 на z_2 модуль $|z_1|$ растягивается в $|z_2|$ раз (если $|z_2|<1$, то $|z_1|$ сжимается в $1:|z_2|$ раза) и, кроме того, вектор z_1 поворачивается против часовой стрелки на угол $\varphi_2 = \arg z_2$.

На рис. 264 изображено построение произведения $z = z_1 z_2$. Для построения z достаточно на отрезке Oz_2 построить треугольник Oz_2z, подобный треугольнику $O1z_1$, вершины которого суть точки нуль, единица и z_1.

Таким образом, произведение комплексных чисел логически определено аналогично произведению действительных чисел: *произведение рассматривается как число, образованное из множимого так, как множитель образован из единицы.*

В заключение отметим, что правило знаков при умножении действительных чисел, которое в арифметике носит условный характер, в области комплексных чисел приобретает логическую завершенность. В самом деле, аргумент действительного положительного числа есть нуль, аргумент действительного отрицательного числа есть π; поэтому при умножении положительного числа на отрицательное аргумент произведения будет $0+\pi=\pi$, т. е. в результате получаем число отрицательное. При умножении отрицательного числа на отрицательное аргумент будет $\pi+\pi=2\pi$. Комплексное же число с аргументом 2π совпадает по направлению с положительным направлением действительной оси, следовательно, есть действительное положительное число.

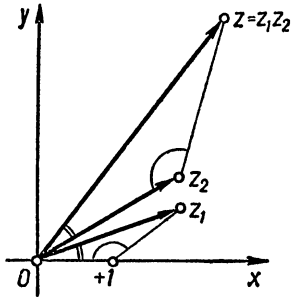


Рис. 264.

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению: если $z = z_1 : z_2$, то частное z есть число, удовлетворяющее равенству

$$zz_2 = z_1.$$

Таким образом, если (r_1, φ_1) — модуль и аргумент делимого, а (r_2, φ_2) — модуль и аргумент делителя, то легко видеть, что деление имеет определенный результат (если делитель отличен от нуля) и что модуль частного $r = r_1 : r_2$, а его аргумент $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Обозначая частное в виде дроби, можем написать

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (X.25)$$

Итак, *модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

При $r_2 = 0$ формула (X.25) теряет свой числовой смысл.

Деление комплексных чисел всегда можно заменить их умножением, умножив делимое и делитель на число, сопряженное делителю, в результате чего получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

и окончательно

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \qquad (X.26)$$

Пример 5. Разделить $z_1 = 5-2i$ на $z_2 = 3+4i$.

Решение. Подставив z_1 и z_2 в формулу (X.26), получаем

$$\frac{5-2i}{3+4i} = \frac{(5-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{(15-8)+i(-6-20)}{9+16} = 0{,}28-1{,}04i.$$

Пример 6. Разделить два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = 3(\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ); \quad z_2 = 5(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ).$$

Решение. Подставив $r_1 = 3$, $\varphi_1 = 78^\circ$, $r_2 = 5$, $\varphi_2 = 33^\circ$ в формулу (X.25), имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}[\cos(78^\circ - 33^\circ) + i \sin(78^\circ - 33^\circ)] = 0{,}6(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$$

§ 122. Возведение в степень и извлечение корня

Применяя формулу (X.24) в случае n равных сомножителей, получаем правило возведения в степень комплексных чисел:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \qquad (X.27)$$

т. е. *для возведения комплексного числа в целую положительную степень нужно его модуль возвести в эту степень, а аргумент умножить на показатель степени.*

Пример 1. Определить различные степени числа i.

Решение. В тригонометрической форме $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Поэтому, применяя формулу (X.27), будем иметь

$$i^2 = 1^2 \cdot \left(\cos 2\frac{\pi}{2} + i \sin 2\frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{ так как } \cos\pi = -1, \sin\pi = 0;$$

$$i^3 = 1^3 \cdot \left(\cos 3\frac{\pi}{2} + i \sin 3\frac{\pi}{2}\right) = -i, \text{ так как } \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \sin\frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$i^4 = 1^4 \cdot \left(\cos 4\frac{\pi}{2} + i \sin 4\frac{\pi}{2}\right) = +1, \text{ так как } \cos 2\pi = +1, \sin 2\pi = 0;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (+1) \cdot i = i; \quad i^6 = i^4 \cdot i^2 = (+1)(-1) = -1 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, любая степень числа i приводится к одному из четырех чисел: -1, $-i$, $+1$, $+i$.

Остановимся еще на одном частном случае формулы (X.27). Полагая в (X.27) $r = 1$, получим формулу

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \qquad (X.28)$$

названную формулой Муавра * по имени английского математика Абрахама де Муавра (Abraham де Moivre, 1667—1754), нашедшего ее в 1707 г.

Формула Муавра позволяет наиболее просто выводить тригонометрические формулы для синусов и косинусов кратных углов. Разлагая левую часть уравнения (X.28) по формуле бинома Ньютона и приравнивая действительные и мнимые части согласно основной теореме о равенстве комплексных чисел (см. § 120), получим возможность выразить $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ через различные степени $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, тогда, заменяя угол φ углом α, который обычно фигурирует в тригонометрических формулах, имеем

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha.$$

* Формулу (X.27) также часто называют *формулой Муавра*. А. Муавр (француз по происхождению), член Лондонского королевского общества (с 1697 г.) и иностранный член Берлинской и Парижской академий наук, нашел правила возведения в степень и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел. Кроме того, он исследовал степенные ряды, получил формулу для вычисления $n!$ и провел ряд важных исследований в теории вероятностей.

Современный вид формулам (X.27) и (X.28) придал в 1748 г. Леонард Эйлер.

Раскрывая левую часть и принимая во внимание результаты примера 1, находим

$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha.$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем известные формулы тригонометрии:

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha; \quad \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha.$$

Переходим теперь к операции, обратной возведению в степень, а именно, к операции **извлечения корня.**

Корнем n-й степени $\sqrt[n]{z}$ *из комплексного числа* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *называется такое комплексное число* $a = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, *n-я степень которого равна подкоренному числу:*

$$a^n = z.$$

Другими словами, равенство

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

равносильно равенству

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Но у равных комплексных чисел модули должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемым, кратным 2π:

$$\rho^n = r; \quad n\alpha = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}; \quad \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где $\sqrt[n]{r}$ есть арифметическое значение корня; а k — любое целое число.

Таким образом, получаем:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (X.29)$$

т. е. для извлечения корня из комплексного числа надо извлечь корень из его модуля, а аргумент разделить на показатель корня.

В формуле (X.29) число k может принимать всевозможные целые значения, однако различных значений $\sqrt[n]{z}$ будет точно n и они будут соответствовать значениям $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся тем, что при умножении комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются, и представим число

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

как результат произведения двух чисел:

$$\sqrt[n]{z} = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\right]\left[1\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\right].$$

Первый сомножитель при данных значениях r и φ имеет одно определенное значение, второй же сомножитель будет иметь строго n различных значений, соответствующих значениям $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Если же k придавать какие угодно другие целые значения, то, в силу периодичности тригонометрических функций, новых значений для $\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, а следовательно, и для $\sqrt[n]{z}$ не получим. Например, при $k=n+3$ будем иметь

$$\frac{2k\pi}{n}=\frac{2(n+3)\pi}{n}=2\pi+\frac{6\pi}{n}$$

и, следовательно,

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n},$$

а это значение мы уже имели при $k=3$. Исключение из этого правила представляет лишь частный случай, когда подкоренное число равно нулю, т. е. $r=0$. В этом случае все указанные выше значения корня равны нулю.

Пример 3. Определить все значения $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Модуль числа i равен единице, а аргумент $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],$$

где $k=0,\ 1,\ 2$.

Таким образом, получаем следующие три значения для $\sqrt[3]{i}$:

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\quad \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Все значения $\sqrt[3]{i}$ расположены на окружности единичного радиуса (так как $|i|=1$) и делят эту окружность на три равные части.

Проверим правильность полученных ответов, возведя их в третью степень. Действительно, модуль каждого из трех значений $\sqrt[3]{i}$ равен единице и после возведения в куб дает $1^3=1=|i|$, а их аргументы после трехкратного поворота совпадают с $\arg i=\frac{\pi}{2}$.

В заключение отметим, что в результате различных действий над комплексными числами получаем снова число комплексное, которое в частных случаях может оказаться числом действительным, чисто мнимым или нулем. При этом только извлечение корня приводит к многозначному ответу, все же остальные действия дают однозначный ответ. Действительно, хотя аргумент каждого из комплексных чисел можно увеличить на любое число, кратное 2π, при сложении, вычитании, умножении, делении и возведении в степень аргумент результата изменится только на число, кратное 2π, что не повлияет на значение комплексного числа.

Только при извлечении корня аргумент будет увеличиваться на число $\frac{2k\pi}{n}\neq 2m\pi$, где k, m, n — целые числа, причем $k<n$.

Нетрудно также показать, что комплексные числа подчиняются всем законам алгебры, следовательно, к комплексным числам применимы все алгебраические преобразования. Строгое доказательство этих положений можно найти в книгах [28, 30, 68, 70, 76, 78, 111, 120, 125, 130, 134, 152, 153], в которых приведена и дальнейшая библиография.

§ 123. Основные геометрические понятия

Отнеся плоскость к прямоугольной системе координат xOy, мы каждую ее точку можем охарактеризовать либо двумя координатами (x, y), либо одним комплексным числом $z = x + iy$.

Таким образом, между точками плоскости xOy и множеством всех комплексных чисел z, как было отмечено в § 119, существует взаимно однозначное соответствие.

При этом под «множеством» будем понимать совокупность элементов, конечную или бесконечную, определенную каким-либо свойством, общим для всех элементов данного множества. Например, множество граней многогранника, множество целых чисел, множество точек на отрезке прямой.

Комплексная величина z может принимать ряд конкретных, фиксированных значений, но может также непрерывно изменяться.

Если z есть величина переменная, т. е. принимающая различные значения, то изменения этой величины в плоскости xOy будут изображаться соответствующими перемещениями точки z. В этом смысле плоскость xOy называют *плоскостью комплексного переменного.*

Кроме этого точечного представления комплексных чисел часто пользуются также векторным представлением: каждому комплексному числу ставят в соответствие вектор, проведенный из начала координат в точку $z = x + iy$.

В теории функций комплексного переменного обычно не делают различия между символами «комплексное число $z = x + iy$», «точка плоскости (x, y)», «вектор, определяющий собой число $z = x + iy$» и говорят, например: точка $2 + 3i$, треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3, сумма векторов z_1 и z_2 и т. д. в зависимости от удобства изложения того или иного вопроса.

Остановимся на ряде необходимых нам геометрических понятий.

Непрерывной кривой называется множество точек, координаты которых x, y заданы как непрерывные функции

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t)$$

вещественной переменной t в некотором промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Если начальная точка кривой совпадает с ее конечной точкой, кривая называется *замкнутой.*

Для рассматриваемых в данной книге вопросов можно ограничиться некоторым гораздо более специальным классом кривых. Мы будем прежде всего рассматривать гладкие кривые, т. е. кривые, имеющие в каждой точке (включая начальную и конечную точки) определенную касательную, направление которой меняется непрерывным образом, когда точка описывает кривую. Примерами гладкой кривой могут служить прямая линия, окружность, эллипс, парабола, синусоида.

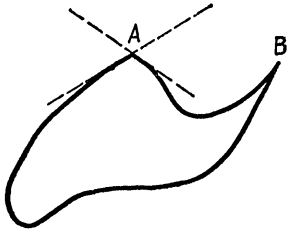


Рис. 265.

Конечное число гладких кривых, соединенных последовательно друг с другом, составляют *кусочно-гладкую кривую.* Последняя может иметь в точках соединения двух гладких кусков *угловые точки* (точка A на рис. 265), в которых кривая имеет две различные касательные, или *точку возврата* (точка B на рис. 265). Примером кусочно-гладкой линии может служить ломаная линия.

Если $c = a + ib$ — какое-нибудь фиксированное число, а ε — положительное действительное число, то множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, удовлетворяющих неравенству

$$|z - c| < \varepsilon,$$

называется *окрестностью точки* c. Так как модуль разности $|z - c|$ представляет собой расстояние между точками z и c, то геометрически окрестности соответствует внутренность круга радиуса ε с центром в точке c.

Комплексная переменная может изменяться или на всей плоскости, или только в некоторой области плоскости z, например в некотором круге, прямоугольнике и т. д. У всякой области будем различать внутренние ее точки и точки контура, или границы. Так, например, в случае круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице, внутренние точки характеризуются условием

$$|z|<1, \text{ или } x^2+y^2<1,$$

а границей является окружность

$$|z|=1, \text{ или } x^2+y^2=1.$$

Границу области будем обозначать большой греческой буквой гамма Г.

Характерным свойством внутренних точек области является то, что не только они сами, но и некоторая их окрестность целиком принадлежат области, т. е. точка M будет внутренней точкой области, если этой области принадлежит целиком некоторый достаточно малый круг с центром M. Точки границы не являются уже внутренними точками области, но каждая сколь угодно малая окрестность точки границы содержит как точки, принадлежащие области, так и точки, не принадлежащие ей.

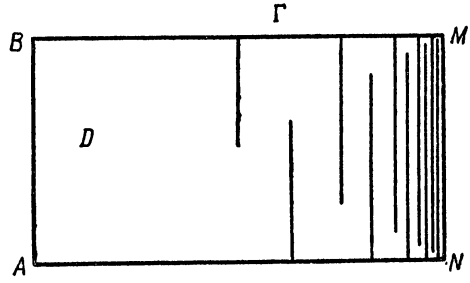


Рис. 266.

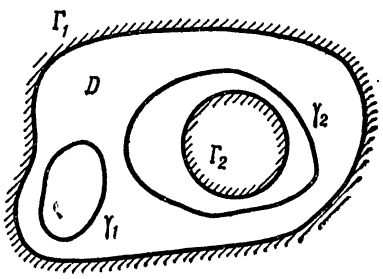


Рис. 267.

Будем, кроме того, считать, что область не распадается на отдельные куски (свойство связности области), иначе говоря, будем предполагать, что любые две точки области могут быть соединены некоторой линией, которая целиком находится внутри области.

Понятие области является одним из основных понятий теории функций комплексного переменного, поэтому дадим ему точное определение.

Определение 1. *Областью называется множество D точек плоскости, обладающее следующими свойствами:*

1) *если какая-нибудь точка принадлежит данному множеству D, то и некоторая окрестность этой точки должна принадлежать D (свойство открытости);*

2) *любые две точки D можно соединить линией, которая целиком находится внутри области (свойство связности).*

Простейшими примерами области являются внутренность круга, внутренность прямоугольника и т. д.

Граничные точки области могут образовывать чрезвычайно сложное множество, которое не подходит под данное выше понятие кривой и с трудом поддается наглядному представлению. Рассмотрим, например, область D, изображенную на рис. 266. Внутри прямоугольника $ABMN$ проведены прямолинейные разрезы попеременно от сторон BM и AN, которые сгущаются по мере приближения к стороне MN. Областью D в этом случае будет то множество точек, которое остается от прямоугольника, если из него удалить все точки, принадлежащие границе области Г, т. е. точки, лежащие на разрезах, а также все точки контура прямоугольника.

Для изложения дальнейших вопросов нам нет надобности рассматривать такие сложные области, так что ограничимся областями, границей которых служит одна единственная замкнутая кусочно-гладкая кривая. Такие области называются *односвязными*.

Характерным признаком односвязной области D является то, что любую замкнутую кривую, расположенную внутри D, можно путем непрерывной деформации стянуть в точку, не выходя за пределы области.

В случае области, представленной на рис. 267, это можно выполнить лишь для кривой γ_1, но нельзя выполнить для кривой γ_2, так как область D в данном случае есть двухсвязная и ее граница Γ состоит из двух замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2.

Обычно под областью понимают лишь множество D внутренних точек области. Если же к области присоединяется и ее граница, то такая область называется *замкнутой* и обозначается $\overline{D}$. Таким образом,

$$\overline{D} = D + \Gamma.$$

Отметим еще, что положительным направлением обхода границы области считается такое, при котором область остается все время слева.

После того как мы определили основные алгебраические операции для комплексных чисел и ввели понятие комплексной переменной, необходимо рассмотреть основную операцию дифференциального и интегрального исчисления — переход к пределу в комплексной области.

Определение 2. *Комплексная переменная $z = x + iy$ стремится к пределу $c = a + ib$, где a и b — постоянные величины, если стремится к нулю модуль разности*

$$|z - c| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Для обозначения предела в комплексной области служат те же знаки

$$\lim z = c \text{ или } z \to c,$$

которыми мы уже пользовались в § 25 гл. III.

Поскольку под радикалом стоят положительные слагаемые, условие, что $|z - c| \to 0$, равносильно тому, что $x \to a$ и $y \to b$. Другими словами, равенства

$$\lim (x + iy) = a + ib$$

и (X.30)

$$\lim x = a, \ \lim y = b$$

являются равносильными.

Геометрически равенство

$$\lim z = c$$

означает, что переменная точка z в процессе своего перемещения стремится к фиксированной точке c, как к своему предельному положению.

При этом мы не делаем оговорок относительно пути, по которому z приближается к c. Важно лишь, чтобы расстояние $|z - c|$ между точками z и c, начиная с некоторого момента, стало и оставалось при дальнейшем изменении z меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε, т. е. стремилось к нулю.

Так как определение предела комплексного переменного согласно равенствам (X.30) свелось к определению пределов действительных переменных, то основные свойства предельного перехода автоматически переносятся в область комплексного переменного. В частности, остаются в силе доказанные в гл. III теоремы

о пределе суммы, произведения, целой степени и частного, которые для комплексных переменных выражаются следующими формулами:

$$\lim (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \lim z_1 + \lim z_2 + \cdots + \lim z_n; \tag{X.31}$$

$$\lim (z_1 z_2 \cdots z_n) = \lim z_1 \lim z_2 \cdots \lim z_n; \tag{X.32}$$

$$\lim (z^n) = (\lim z)^n; \tag{X.33}$$

$$\lim \frac{z_1}{z_2} = \frac{\lim z_1}{\lim z_2} \quad (\text{если } \lim z_2 \neq 0). \tag{X.34}$$

Из определения предела непосредственно вытекает, что равенство $\lim z = c$ равносильно равенству $\lim |z| = |c|$ и, в частности, равенство

$$\lim z = \lim (x + iy) = 0$$

равносильно равенству

$$\lim |z| = 0 \quad \text{или} \quad \lim x = 0, \quad \lim y = 0.$$

§ 124. Функция комплексного аргумента

Основные понятия теории функций комплексного переменного являются почти дословным обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного. Например, понятия функции, предела, непрерывности, производной функции комплексного аргумента определяются формально так же, как и для функции действительного переменного.

Как отмечалось в § 24, идея функциональной связи в XVIII веке более или менее отождествлялась с существованием простой математической формулы, точно выражающей эту зависимость. Такой взгляд оказался слишком узким и тормозил дальнейшее развитие математики. Поэтому понятие функции впоследствии в течение долгого времени подвергалось обобщениям и шлифовке.

Чтобы уяснить суть этого процесса, обратимся к примерам.

Часто приходится иметь дело с математическими объектами, которые мы выбираем из некоторого множества S этих объектов. Избираемый объект Z носит название *переменного*, множество S — *множества его изменяемости*. Говорят, что «переменное Z пробегает множество S», подразумевая под этим, что переменное Z мы можем отождествлять с любым элементом множества S.

Нет никакой необходимости в том, чтобы множество S переменного Z было множеством чисел. Например, S может быть множеством всех точек плоскости, тогда переменное Z будет обозначать любую конкретную точку плоскости.

S может быть также множеством всех треугольников плоскости, тогда Z будет любым конкретным треугольником. Не обязательно также, чтобы множество переменного содержало бесконечное число элементов. Например, Z может обозначать любого отдельного человека из населения S данного города в определенный момент времени.

Если каждому значению переменного Z сопоставляется некоторое определенное значение другого переменного W, то W называется *функцией* переменного Z. Способ, посредством которого W связано с Z, выражается символически уравнением $W = F(Z)$. Если Z пробегает множество S, то переменное W пробегает некоторое другое множество, которое обозначим U. Например, если S есть множество треугольников Z на плоскости, то в качестве функции $W = F(Z)$ можно, в частности, рассматривать длину периметра треугольника Z. В таком случае множеством значений функции W будет множество U всех положительных чисел (периметр треугольника не может быть числом отрицательным). Отметим, что два (или несколько) различных треугольника могут иметь равные по длине периметры, так что равенство $F(Z_1) = F(Z_2)$ возможно и тогда, когда $Z_1 \neq Z_2$.

В данном случае каждому значению Z соответствует одно и только одно определенное значение W, но каждому значению периметра W может соответствовать бесчисленное множество различных треугольников Z, так что в рассматри-

вaемом случае между переменными Z и W не существует взаимно однозначного соответствия.

Функциональную связь между величинами W и Z можно устанавливать не только при помощи математической формулы, но также при помощи графика, таблицы или любым другим способом, лишь бы можно было каждому значению аргумента Z привести в соответствие одно или несколько значений функции W.

Таким образом, понятие функции как соответствия между величинами гораздо шире и включает в себя в виде частного случая и понятие функции как некоторой математической зависимости, выраженной той или иной формулой. Действительно, любая математическая формула, например $W = \sqrt{Z} + \log Z$, также устанавливает соответствие между рядом значений Z и W: задав любое значение Z, вычисляем по данной формуле соответствующие значения W.

Определение. *Величина W называется функцией переменного Z, если каждому значению Z можно привести каким-либо способом в соответствие одно или несколько значений W.*

Переменная величина Z называется *аргументом* функции W. Если в качестве аргумента Z принимают комплексное число $z = x + iy$ или, другими словами, точку комплексной числовой плоскости, то полученную функцию W называют *функцией комплексного переменного*. Для ее обозначения употребляют обычно строчные буквы: $w = f(z)$.

Функция комплексного переменного w представляет собой также комплексное число, поэтому ее можно представить разложенной на действительную и мнимую части:

$$w = f(z) = u + iv.$$

В элементарных функциях такое разделение можно произвести при помощи простых операций, например

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

и, следовательно,

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Таким образом, определить значение функции $f(z)$ значит определить u и v, которые являются функциями двух действительных переменных x, y:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{X.35}$$

Если каждому значению z соответствует одно единственное значение w, то w называется *однозначной функцией* от z, в противном случае w называется *многозначной функцией*.

В случае функции комплексного переменного функциональную зависимость $w = f(z)$ нельзя представить геометрически так же просто, как график функции действительного переменного, так как это потребовало бы четырехмерного пространства с осями x, y, u, v.

Поэтому принято значения аргумента изображать точками одной плоскости (*z-плоскости*), а значения функции w — точками другой плоскости (*w-плоскости*).

Каждую точку M плоскости z функция $w = f(z)$ переводит соответственно в некоторую точку N плоскости w. Точку w поэтому называют также *сбразом* точки z, а саму точку z — *прообразом* точки w. Далее, если каждому образу w соответствует один и только один прообраз z, то соответствие называется *взаимно-однозначным*, или *однооднозначным*, а отображение, осуществляемое рассматриваемой функцией, называется *однолистным*.

Пусть точка z описывает некоторую кривую L в своей области (рис. 268). Образ ее $w = f(z)$ также придет в движение и его путем будет кривая Λ в числовой плоскости w (функцию $w = f(z)$ считаем непрерывной).

Можно утверждать, что функция $w = f(z)$ отображает каждую точку z в некоторую точку w, каждую линию в плоскости z — в некоторую линию в плоскости w.

Если функция аналитическая *, отображение, совершаемое ею, обладает замечательным свойством: *бесконечно малый треугольник с точностью до величин второго порядка малости (относительно его размеров) отображается в треугольник, подобный исходному, т. е. в «бесконечно-малом» форма фигур при рассматриваемом отображении сохраняется.*

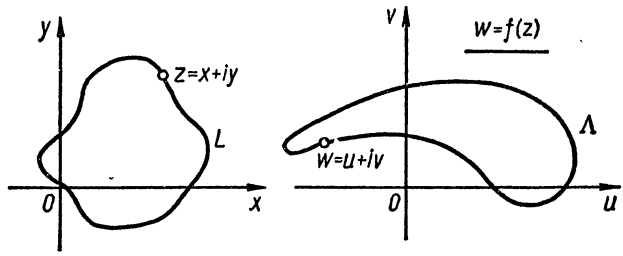


Рис. 268.

В силу этого отображение, осуществляемое аналитической функцией, называется *конформным*.

Следует отметить, что при конформном отображении в целом, или, как говорят, «в большом», форма линий изменяется, так как отображение будет подобным лишь в бесконечно малой окрестности каждой точки. *Коэффициент подобия* (называемый также *коэффициентом растяжения* в точке), вообще говоря, меняется от

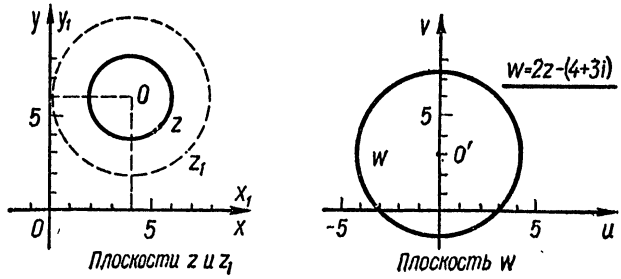


Рис. 269.

точки к точке (если заданная функция $w = f(z)$ не является линейной), поэтому форма линий в целом не может сохраниться, но углы между двумя любыми пересекающимися линиями при конформном отображении сохраняются.

Пример. Рассмотрим линейную функцию $w = 2z - (4 + 3i)$, которую представим как сложную функцию, составленную из двух функций:

а) $z_1 = 2z$,

б) $w = z_1 - (4 + 3i)$.

Вспоминая геометрический смысл умножения (§ 121) и учтя, что аргумент действительного числа 2 равен нулю, видим, что отображение а) есть подобное преобразование z-плоскости с коэффициентом подобия 2. При этом преобразовании любая точка z-плоскости переходит в точку плоскости z_1, удваивая свои координаты. В частности, окружность в плоскости z будет переходить в окружность удвоенного диаметра.

Преобразование б) представляет собой сдвиг плоскости z_1 на постоянный вектор $(4 + 3i)$.

* Определение аналитической функции будет дано в § 127.

Отображение, осуществляемое функцией w, состоит из *наложения* или *суперпозиции* (т. е. из последовательно выполненных) отображений а) и б).

На рис. 269 представлено преобразование точек окружности, осуществляемое функцией $w = 2z - (4 + 3i)$. Простоты ради плоскости z и z_1 на рисунке совмещены.

§ 125. Обратная функция. Непрерывность функции

Функция

$$w = f(z)$$

каждой точке z-плоскости приводит в соответствие одну или несколько точек w-плоскости. В свою очередь, каждой точке w-плоскости будет соответствовать одна или несколько точек z, удовлетворяющих соотношению $w = f(z)$. Поэтому, решив уравнение $w = f(z)$ относительно z, получим новую функцию

$$z = \varphi(w),$$

которая, как и в случае действительной переменной, называется *обратной функцией*.

Например, для функции $w = 2z - (4 + 3i)$ обратной является функция $z = \frac{1}{2}[w + (4 + 3i)]$; для функции $w = z^2$ — функция $z = \sqrt{w}$ и т. д.

Обратная функция осуществляет обратное отображение точек w-плоскости на z-плоскость.

Необходимо отметить, что и прямая и обратная функции устанавливают одно и то же соответствие между точками z-плоскости и w-плоскости, но свойства этих функций и удобства, которые они создают при вычислениях, различны. Поэтому идея обращения функций также широко применяется и в комплексной области для получения новых функциональных зависимостей, к чему мы еще в дальнейшем вернемся.

Перейдем к определению понятия непрерывности функции комплексного переменного, которое для каждой фиксированной точки $z = c$ точно такое же, как и в случае действительной переменной.

Определение 1. *Функция $w = f(z)$, определенная в области D, называется непрерывной в точке $z = c$ этой области, если предельное ее значение, при стремлении z к c, равно ее частному значению при $z = c$:*

$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c),$$

т. е. если модуль разности $|f(z) - f(c)|$ стремится к нулю при стремлении $|z - c|$ к нулю; точнее, если при любом наперед заданном положительном числе ε можно найти такое положительное число δ, что

$$|f(z) - f(c)| < \varepsilon \text{ при } |z - c| < \delta.$$

Это определение и гарантирует, что в точке $z = c$ функция $w = f(z)$ не может изменить скачком свое значение (в зависимости от направления пути, по которому мы пришли в точку комплексной плоскости $z = c$), как это имело место для точки $x = a$ на рис. 91, в которой равенство $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ не выполняется.

Определение 2. *Функция $f(z)$ называется непрерывной в некоторой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.*

Всякая непрерывная функция $w = f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ может быть представлена в виде $w = u + iv$, так что непрерывность $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равносильна непрерывности двух функций $u(x, y)$; $v(x, y)$ двух действительных переменных.

В заключение приведем без доказательства (так как оно проводится топологическими методами) теорему, которая играет важную роль в теории функций комплексного переменного.

Теорема. *Если функция $w = f(z)$ непрерывна в области D и осуществляет взаимно однозначное отображение D на некоторое множество точек Δ в плоскости w, то Δ также является областью, и обратная функция $z = \varphi(w)$ непрерывна в Δ.*

Доказательство этой теоремы приведено, например, в [70, 78, 111, 125, т. III ч. 2].

§ 126. Производная. Условия дифференцируемости

Производная функции комплексного переменного $w = f(z)$ является новой функцией того же переменного и обозначается, как и прежде, $f'(z)$ или $\frac{dw}{dz}$.

Формально $f'(z)$ определяется равенством

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}, \tag{X.36}$$

которое полностью совпадает с равенством (III.34) § 31, только с одной весьма существенной оговоркой: данный предел не должен зависеть от пути, по которому $\Delta z \to 0$.

Воспользуемся этим определением и в качестве примера вычислим по формуле (X.36) производную для функции $w = f(z) = z^2$, расчленив весь процесс на четыре естественных шага.

1. Найдем значение функции $f(z)$, соответствующее точке $z + \Delta z$:

$$f(z+\Delta z) = (z+\Delta z)^2 = z^2 + 2z \cdot \Delta z + (\Delta z)^2.$$

2. Определим приращение функции $w = f(z) = z^2$, соответствующее приращению аргумента на величину Δz:

$$\Delta w = f(z+\Delta z) - f(z) = [z^2 + 2z\,\Delta z + (\Delta z)^2] - z^2 = \Delta z\,(2z + \Delta z).$$

3. Найдем отношение приращения функции Δw к приращению аргумента Δz:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta z\,(2z+\Delta z)}{\Delta z} = 2z + \Delta z.$$

4. Вычислим производную $f'(z) = \frac{dw}{dz}$, т. е. определим предел $\frac{\Delta w}{\Delta z}$, когда Δz стремится к нулю:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Итак, для функции $f(z) = z^2$, как и в случае действительной переменной, производной является функция

$$f'(z) = 2z.$$

Далее, так как обычные свойства алгебраических действий и действия перехода к пределу сохраняются при переходе к функциям комплексного переменного, то сохраняются и обычные правила дифференцирования, вывод которых основан на упомянутых свойствах:

$$[f_1(z) + f_2(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z); \tag{X.37}$$

$$[f_1(z) \cdot f_2(z)]' = f_1'(z)\,f_2(z) + f_1(z)\,f_2(z); \tag{X.38}$$

$$\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \frac{f_1'(z)\,f_2(z) - f_1(z)\,f_2'(z)}{f_2^2(z)} \quad (\text{если } f_2(z) \neq 0); \tag{X.39}$$

$$\{F[f(z)]\}' = F'[f(z)] \cdot f'(z). \tag{X.40}$$

В последней формуле $F[f(z)]$ обозначает сложную функцию, аргумент которой, в свою очередь, есть функция $f(z)$ переменной z. Величина же $F'[f(z)] = F'(\zeta)$ обозначает производную по ζ, где $\zeta = f(z)$.

Из формулы (X.38), в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить из-под знака производной. Действительно, положив в формуле (X.38) $f_1(z) = C = \text{const}$ (тогда $f_1'(z) = 0$), имеем

$$[Cf_2(z)]' = Cf_2'(z). \tag{X.41}$$

Ряд других важных формул дифференциального исчисления для функций комплексного переменного мы выведем в дальнейшем, а сейчас дадим точную формулировку понятия производной функции комплексного переменного.

Определение. *Производной* $f'(z) = \dfrac{dw}{dz}$ *функции комплексного переменного* $w = f(z)$ *называют предел отношения приращения функции* $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ *к приращению аргумента* Δz, *когда последнее стремится к нулю:*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

при условии, что этот предел существует и не зависит от пути, по которому приращение Δz *стремится к нулю.*

Последнее условие налагает очень существенные ограничения на класс функций комплексного переменного, требуя независимости производной от направления дифференцирования.

К более подробному рассмотрению этого вопроса мы и переходим.

Выберем два каких-нибудь значения комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда приращение переменного $z = x + iy$ выразится через приращения величин x и y следующей формулой *:

$$\Delta z = z_2 - z_1 = (x_2 + iy_2) - (x_1 + iy_1) = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) = \Delta x + i\,\Delta y.$$

Представим также функцию $w = f(z)$ с разделенными действительной и мнимой частями:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Для того чтобы предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

не зависел от пути, по которому $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ стремится к нулю, т. е. для того чтобы $f(z) = u + iv$ имела производную, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, очевидно, должны удовлетворять определенным условиям.

Найдем, прежде всего, необходимые условия существования производной. Для этого предположим, что $f(z) = u + iv$ имеет производную в точке $z = x + iy$, или, как говорят, *дифференцируема* в точке z, и выведем отсюда следствия, касающиеся $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

Существование производной, которое мы предположили, означает, что приращение $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ может идти к нулю любым способом. Возьмем два частных способа приближения точки $z + \Delta z$ к точке z.

При первом способе (рис. 270) будем считать, что точка $z + \Delta z$ стремится к точке z вдоль прямой, параллельной оси Ox, тогда

$$y = \text{const}; \quad \Delta y = 0; \quad \Delta z = \Delta x, \tag{X.42}$$

* Приращение Δz можно также рассматривать как величину, которую надо прибавить к значению $z = z_1$ для того, чтобы получить новое, измененное значение $z_2 = z_1 + \Delta z$.

а при втором способе (рис. 271) будем считать, что $z+\Delta z$ стремится к z вдоль прямой, параллельной оси Oy:

$$x=\text{const};\quad \Delta x=0;\quad \Delta z=i\Delta y. \tag{X.43}$$

Выразим производную $f'(z)$ в общем случае через приращения функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,\ y+\Delta y)]-[u(x,\ y)+iv(x,\ y)]}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,\ y)}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{\Delta x+i\Delta y}\right]. \tag{X.44}$$

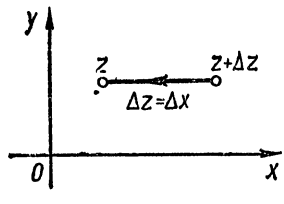


Рис. 270.

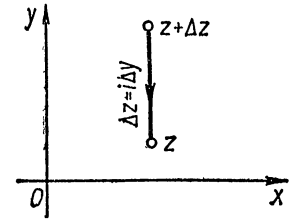


Рис. 271.

Из этой формулы при первом способе стремления Δx к нулю, т. е. при выполнении условий (X.42), имеем

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,\ y)-u(x,\ y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,\ y)-v(x,\ y)}{\Delta x}\right].$$

Так как мы предположили, что $f'(z)$ существует, то действительная и мнимая части выражения в квадратных скобках должны иметь предел. Другими словами, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ должны иметь *частные производные** по x, причем должно иметь место равенство

$$f'(z)=\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,\ y)}{\partial x}. \tag{X.45}$$

Аналогично при втором способе приближения точки $z+\Delta z$ к точке z будем иметь согласно (X.43) и (X.44)

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\frac{u(x,\ y+\Delta x)-u(x,\ y)}{i\Delta y}+i\frac{v(x,\ y+\Delta y)-v(x,\ y)}{i\Delta y}\right].$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что

$$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i,$$

* Как отмечалось в § 118, для функции двух (или многих) переменных частной производной называется производная, вычисленная в предположении, что все аргументы, кроме одного, сохраняют постоянное значение.

Для обозначения частных производных употребляются специальные знаки $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$. Подробнее об этом можно найти, например, в книгах [12, стр. 303; 17, § 425; 155, § 89].

находим

$$f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \qquad (X.46)$$

Сравнивая выражения (X.46) и (X.45), получаем необходимые условия существования производной $f'(z)$, которым должны удовлетворять частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (X.47)$$

Необходимое условие не всегда является одновременно и условием достаточным. Вообще говоря, необходимые условия более узки, чем условия достаточные, и лишь в отдельных частных случаях они могут совпадать.

Например, необходимым условием возможности полета самолета является наличие горючего. Однако одного этого условия еще недостаточно: для того чтобы самолет действительно мог отправиться в рейс, его моторы должны быть исправны и заправлены не только горючим, но и смазочным материалом, погода должна быть летной и т. д.

В рассматриваемом случае необходимые условия дифференцирования функции комплексного переменного $f(z)$ являются одновременно и условиями достаточными, т. е. при выполнении условий (X.47) предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ остается одним и тем же при любом стремлении Δz к нулю, а не только при рассмотренных выше двух частных способах (X.42) и (X.43), к доказательству чего мы переходим. Итак, будем считать, что условия (X.47) выполнены, и предположим, кроме того, что все частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ существуют и непрерывны в данной точке z.

Достаточность условий (X.47) можно доказать без предположения о непрерывности частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ (см., например, [30, 111]).

Давая z произвольное приращение $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ и применяя теорему о конечных приращениях, найдем

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) + u(x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= \frac{\partial u(x + \theta\,\Delta x, y + \Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x, y + \theta_1\,\Delta y)}{\partial y}\Delta y \quad (0 < \theta;\ \theta_1 < 1)\end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что частные производные непрерывны, получим

$$\Delta u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1\right)\Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2\right)\Delta y$$

и аналогично

$$\Delta v(x, y) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_3\right)\Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon_4\right)\Delta y,$$

где ε_1, ε_2 ε_3, ε_4 — бесконечно малы вместе с Δx и Δy. В таком случае, заменяя $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ согласно условиям (X.47), получим

$$\begin{aligned}f(z + \Delta z) - f(z) &= \Delta u + i\,\Delta v = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta y + \varepsilon_5\,\Delta x + \varepsilon_6\,\Delta y = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\,\Delta y) + \varepsilon_5\,\Delta x + \varepsilon_6\,\Delta y \\ &(|\varepsilon_5| \to 0;\ |\varepsilon_6| \to 0 \text{ при } \Delta z \to 0).\end{aligned}$$

Следовательно, так как $\Delta x + i\,\Delta y = \Delta z$, то

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\varepsilon_5\,\Delta x + \varepsilon_6\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}.$$

Но при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

$$\left|\frac{\varepsilon_5\,\Delta x}{\Delta x + i\,\Delta y}\right| = \frac{|\varepsilon_5|\,\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0; \quad \left|\frac{\varepsilon_6\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}\right| \to 0,$$

и поэтому

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

что и требовалось доказать.

Пользуясь условиями (X.47), производную функции $f(z)$ можно представить следующими равносильными равенствами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{(X.48)}$$

Пример 1. Показать, что $f(z) = z^2$ дифференцируема в каждой точке плоскости z.

Решение. Действительно, в данном случае

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

так что

$$u = x^2 - y^2;\ v = 2xy.$$

Дифференцируя u и v сначала по x в предположении, что y сохраняет свое значение постоянным (т. е. считая, что $y = C = \text{const}$), а затем по y, считая x постоянным, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - C^2) = 2x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y\frac{\partial}{\partial x}(x) = 2y;\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x,$$

поскольку производная от постоянной $\frac{\partial}{\partial x}(C^2) = 0$, а при вычислении $\frac{\partial v}{\partial x}$ мы сначала выносим постоянную $2y$ за знак производной и учитываем, что $\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1$.

Подставив эти значения в условия (X.47), убеждаемся, что они выполняются всюду. Таким образом,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2iy = 2(x+iy) = 2z,$$

что полностью согласуется с результатом, полученным непосредственно по формуле (X.36) в начале параграфа.

Пример 2. Показать, что непрерывная во всех точках плоскости z функция $f(z) = \bar{z} = x - iy$ ни в одной точке не дифференцируема.

Решение. В данном примере $u = x$, $v = -y$. Взяв от этих функций частные производные и учтя, что u зависит только от x, а v — только от y, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Подставив эти значения в условия (X.47), убеждаемся, что первое из них не выполняется и, следовательно, функция $f(z)=\bar{z}$ производной не имеет. Этот факт для функции $f(z)=\bar{z}$ можно показать и непосредственно:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[(x+\Delta x)-i(y+\Delta y)]-(x-iy)}{\Delta x+i\,\Delta y}=\frac{\Delta x-i\,\Delta y}{\Delta x+i\,\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

и предел $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ зависит от предела отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. от пути, по которому Δz будет стремиться к нулю.

Условия (X.47), которые играют исключительно важную роль в теории функций комплексного переменного, называют *условиями Коши — Римана*. Однако это не вполне соответствует истории вопроса, так как эти условия неоднократно встречались в трудах Даламбера (1752) и Эйлера (1755 и 1777) при рассмотрении задач гидродинамики, картографии и др., а также в работах Лагранжа (1762—1765, 1799). В работах Коши (1789—1857) и Римана (1826—1866), которые, по сути, положили начало теории функций комплексного переменного как самостоятельной дисциплины, но появившихся почти на сто лет позже, эти условия получили более общий смысл.

Поэтому, следуя предложению А. И. Маркушевича [78], условия (X.47) часто называют также *условиями Даламбера — Эйлера*.

Учитывая важность полученных результатов, сформулируем их в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть функция* $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ *определена в некоторой окрестности точки* $z=x+iy$, *причем в этой точке функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *дифференцируемы.*

Тогда для дифференцируемости функции комплексного переменного $f(z)$ *в точке* z *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши — Римана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Упражнения

1. Найти частные производные первого порядка от функции

$$u(x, y)=x^2+y^2\sin x.$$

2. Показать, что функция $f(z)=\sin z$ дифференцируема в каждой точке плоскости z.

§ 127. Аналитические функции

Однозначная функция называется *регулярной*, или *голоморфной*, в точке z, если она непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки z.

Функция $f(z)$, дифференцируемая только в самой точке, но не в ее окрестности, называется *моногенной* в этой точке.

Таким образом, функция называется регулярной в точке z, если она моногенна в точке z и в ее окрестности.

Многозначная функция $f(z)$ называется регулярной в точке z, если, выбрав в z одно из значений $f(z)$, можно в остальных точках достаточно малой окрестности z выбрать значения функций $f(z)$ так, чтобы образовалась функция однозначная и регулярная в точке z.

Если $f(z)$ регулярна в каждой точке области D (без всякого исключения), то она называется *регулярной в области* D.

Определение. *Функция комплексного переменного $w = f(z)$ (однозначная или многозначная) называется аналитической в области D, если она регулярна во всех ее точках, за исключением, быть может, множества изолированных точек, не нарушающих связности области D.*

Точки области D, в которых нарушается регулярность аналитической функции (т. е. в которых функция не имеет производной или терпит разрыв непрерывности), называют *особыми точками*.

В предыдущем параграфе мы показали, что требование дифференцируемости функции комплексного переменного гораздо более сильное, чем для функций действительного переменного. Предполагая дифференцируемость функции $w = f(z)$ в точке z, мы считаем, что предел отношения $\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ будет одним и тем же независимо от направления, по которому переменная точка $z + \Delta z$ приближается к фиксированной точке z.

Естественно, что это требование сильно ограничивает класс функций комплексного переменного, для которых предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ существует, но зависит от направления, по которому Δz стремится к нулю. Такие функции согласно определению § 126 не имеют производной и не являются аналитическими.

С другой стороны, только это ограничение и придает теории аналитических функций исключительную стройность и законченность. В частности, только благодаря принятому выше определению производной интеграл от аналитической функции является также аналитической функцией и не зависит от пути интегрирования; все правила дифференциального и интегрального исчисления, выведенные для функций действительного переменного, полностью применимы к аналитическим функциям; из существования первой производной вытекает существование производных любого порядка и т. д.

Кроме того, класс аналитических функций достаточно широк. Например, все элементарные функции, тригонометрические, гиперболические, логарифмические и эллиптические функции принадлежат к классу аналитических функций.

Далее, сумма, разность, произведение и частное аналитических функций, а также аналитическая функция от аналитической функции будут снова аналитическими функциями.

В заключение отметим, что если $f(z)$ в данной точке имеет производную $f'(z)$, то $f(z)$ в этой точке непрерывна. Однако обратное утверждение не всегда справедливо, т. е. из непрерывности функции еще не следует, что производная существует, и мы видели пример функции, непрерывной для всех значений z, которая ни в одной точке не имеет производной.

Это утверждение доказывается вполне аналогично случаю функции действительного переменного [125, т. I § 45].

Для дальнейшего изложения будет играть важную роль следующая теорема, которая также доказывается аналогично случаю функций действительного переменного.

Теорема. *Если $w = f(z)$ есть аналитическая функция переменного z и каждому значению w соответствует одно и только одно значение z, то обратная функция*

$$z = \varphi(w)$$

является аналитической функцией переменного w (при всех тех значениях w и z, для которых $f'(z) \neq 0$) и ее производная определяется равенством

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}. \tag{X.49}$$

Другими словами, *производная функции, обратной данной, равна величине, обратной к производной данной функции.*

§ 128. Интеграл от функции комплексного аргумента

В теории вещественных функций интеграл, с одной стороны, вводится как функция, определяемая действием, обратным дифференцированию (неопределенный интеграл), а с другой стороны — как предел некоторой суммы (определенный интеграл), после чего доказывается, что оба этих определения совпадают. Вполне аналогично можно поступать и в случае интеграла от функции комплексного переменного.

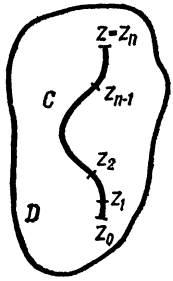


Рис. 272.

Пусть $w = f(z)$ есть кусочно-непрерывная и ограниченная функция комплексного переменного z, определенная в некоторой области D, и пусть C — произвольная кусочно-гладкая линия (см. § 123), лежащая в этой области, с началом в точке z_0 и концом в точке z (рис. 272). Разобьем дугу z_0z на произвольное число n частичных дуг при помощи точек z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, $z_n = z$, расположенных последовательно в положительном направлении линии C. Пусть, далее, ζ_k — некоторая точка на дуге $z_{k-1}z_k$. Составим сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k = f(\zeta_1)\,\Delta z_1 + f(\zeta_2)\,\Delta z_2 + \cdots + f(\zeta_n)\,\Delta z_n,$$

где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ есть приращение переменного z.

Предел этой суммы при безграничном возрастании числа делений n и безграничном уменьшении каждой из дуг $z_{k-1}z_k$ и называется интегралом от $f(z)$ вдоль кривой C:

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k.$$

Введем обозначения:

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k;\quad f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k);\quad \Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k.$$

При этих обозначениях

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)]\,[\Delta x_k + i\,\Delta y_k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k - v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k] + i \sum_{k=1}^{n} [v(\xi_k, \eta_k)\,\Delta x_k + u(\xi_k, \eta_k)\,\Delta y_k].$$

При сделанных предположениях о $f(z)$ и линии C обе суммы, стоящие в правой части, стремятся к пределам, равным соответствующим криволинейным вещественным интегралам:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int_C v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy. \qquad (X.50)$$

Эта формула и дает выражение интеграла от функции комплексного переменного через два обычных вещественных криволинейных интеграла, вычисление которых легко сводится к вычислению обыкновенных интегралов [28, гл. V § 29; 125, т. II § 66].

Формулу (X.50) легко запомнить, если написать ее в таком виде:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)\,(dx + i\,dy). \qquad (X.50')$$

При обозначении интеграла часто вместо кривой C указывают только ее концы ($A = z_0$, $B = z$) и пишут $\int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ или $\int\limits_{AB} f(z)\,dz$.

В частном случае кривая C может быть замкнутой. Очевидно, что данное выше определение интеграла годится и для этого случая.

Интеграл по замкнутой кривой обычно обозначают так:

$$\oint f(z)\,dz.$$

Для иллюстрации вычислений интеграла от функции комплексного переменного рассмотрим следующий пример:

$$\int\limits_{z_0}^{z} z\,dz = \int\limits_C x\,dx - y\,dy + i\int\limits_C y\,dx + x\,dy = \int\limits_C x\,dx - y\,dy + i\int\limits_C d(xy) =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + ixy\right)\Bigg|_{x_0,\,y_0}^{x,\,y} = \frac{(x+iy)^2 - (x_0+iy_0)^2}{2} = \frac{1}{2}(z^2 - z_0^2)$$

и в случае замкнутой кривой C (когда $z = z_0$):

$$\oint z\,dz = 0.$$

Как видим, в данном примере мы получим тот же результат, если формально воспользуемся обычными правилами интегрирования функций действительного переменного.

В более полных курсах теории функций комплексного переменного доказывается, что в общем случае техника интегрирования функций комплексного переменного в принципе не отличается от обычной техники интегрирования функций действительного переменного.

Из формулы (X.50) непосредственно вытекают основные свойства интеграла от функции комплексного переменного, вполне аналогичные свойствам обычных криволинейных интегралов.

1. При изменении направления обхода пути интегрирования интеграл изменяет только свой знак:

$$\int\limits_{BA} f(z)\,dz = -\int\limits_{AB} f(z)\,dz. \tag{X.51}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int\limits_C af(z)\,dz = a\int\limits_C f(z)\,dz. \tag{X.52}$$

3. Интеграл от суммы нескольких функций равняется сумме интегралов от отдельных слагаемых:

$$\int\limits_C [f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)]\,dz =$$

$$= \int\limits_C f_1(z)\,dz + \int\limits_C f_2(z)\,dz + \cdots + \int\limits_C f_n(z)\,dz. \tag{X.53}$$

4. Если путь интегрирования AB разбить на несколько частей AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}B$, то интеграл по всему пути будет равен сумме интегралов по отдельным его частям:

$$\int\limits_{AB} f(z)\,dz = \int\limits_{AA_1} f(z)\,dz + \int\limits_{A_1A_2} f(z)\,dz + \cdots + \int\limits_{A_{n-1}B} f(z)\,dz. \tag{X.54}$$

5. Так как

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\cdot|\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,\Delta s_k,$$

где Δz_k — длина дуги, которая соответствует хорде $|\Delta z_k|$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{AB} |f(z)|\,ds. \tag{X.55}$$

В частности, если M обозначает максимум модуля функции $f(z)$ на дуге AB, а l — длину дуги AB, то из последней формулы имеем

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leqslant Ml. \tag{X.56}$$

§ 129. Рациональные функции. Нули и полюсы

Рациональными называются функции, которые могут быть определены при помощи не более чем четырех основных действий (сложения, вычитания, умножения и деления), производимых над независимым переменным z и постоянными (вообще говоря, комплексными) числами. Число выполненных действий, кроме того, не должно быть бесконечно большим.

Среди рациональных функций особое место занимают функции, которые могут быть определены при помощи не более чем трех действий — сложения, вычитания и умножения. Это — функции *целые рациональные*, иначе — *целые многочлены*, или *полиномы*.

Так как действие вычитания может быть заменено действием сложения и умножения на постоянную величину $C = -1$:

$$A - B = A + (-1)\,B,$$

то мы приходим к следующему результату.

Определение. *Целой рациональной функцией или полиномом называется всякая функция, которая может быть построена из независимого переменного $z = x + iy$ и постоянных чисел $c = a + ib$ посредством конечного числа сложений и умножений.*

Требование конечного числа сложений и умножений существенно, так как при бесконечном их числе функции могут быть не рациональными, примером чего служат бесконечные степенные ряды или произведения, определяющие трансцендентные функции.

Обозначают полином в комплексной области тем же символом $P(z)$, которым мы пользовались в гл. III.

Выполнив все операции, которыми определен данный полином, и приведя подобные члены, всегда можно полином степени n представить в следующем виде:

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n, \tag{X.57}$$

где $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянные (комплексные) коэффициенты. При этом $c_n \neq 0$, в противном случае полином $P(z)$ будет иметь степень меньшую, чем n.

Этот же полином, как известно из алгебры, можно разложить на множители:

$$P(z) = c_n (z - \alpha_1)^{n_1} (z - \alpha_2)^{n_2} \ldots (z - \alpha_k)^{n_k} \quad (c_n \neq 0), \tag{X.58}$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — целые положительные числа, причем

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n.$$

Комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называются *корнями* или (как более принято говорить в теории функций комплексного переменного) *нулями* полинома $P(z)$, а числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — *кратностями* этих нулей.

Нуль кратности единица называется *простым*.

Примерами полиномов могут служить следующие выражения (причем деление во втором примере на постоянное число 4 не противоречит определению полинома, так как может быть заменено умножением на 1/4):

$$P(z) = 4(1+z)^2 = 4 + 8z + 4z^2;$$

$$P(z) = \frac{13z^5 - 2}{4} + z(2z - 4z^4) = -\frac{1}{2} + 2z^2 - \frac{3}{4}z^5;$$

$$P(z) = \{[(3z+i)(2-5i)+10]z + i\}z = iz + (15+2i)z^2 + 3(2-5i)z^3.$$

Докажем, что полином $P(z)$ есть функция аналитическая во всей плоскости комплексного переменного.

Говоря о «всей плоскости переменного», мы не рассматриваем здесь так называемой бесконечно далекой точки $z = \infty$.

Плоскость с исключенной точкой $z = \infty$ называется *открытой* или *незамкнутой*, *плоскостью* в отличие от *замкнутой плоскости*, в состав которой входит также точка $z = \infty$.

Легко убедиться, что простейший полином n-й степени

$$P(z) = z^n \tag{X.59}$$

при целом положительном n имеет во всей плоскости переменного z непрерывную производную

$$P'(z) = nz^{n-1}, \tag{X.60}$$

т. е. полином $P(z) = z^n$ является аналитической функцией во всей открытой плоскости комплексного переменного z.

Действительно, воспользуемся алгебраическим тождеством

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

в котором A и B являются комплексными числами. Справедливость этого тождества легко непосредственно проверить, перемножив выражения в скобках в правой его части.

Положив в этом тождестве $A = z + \Delta z$ и $B = z$, будем иметь

$$(z+\Delta z)^n - z^n = \Delta z\,[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-2}(z+\Delta z) + z^{n-1}].$$

В таком случае, применяя формулу (X.36) к функции $w = f(z) = z^n$, получим

$$w' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} [(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \dots + z^{n-2}(z+\Delta z) + z^{n-1}].$$

В пределе при $\Delta z \to 0$ каждое из слагаемых, находящихся в квадратных скобках, стремится к величине z^{n-1}, а число таких слагаемых равно $1 + (n-1) = n$, в силу чего и получаем равенство (X.60).

$$P'(z) = nz^{n-1}.$$

Воспользовавшись формулами (X.37) и (X.41), находим, что для произвольного полинома n-й степени (X.57):

$$P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

производной будет служить следующий полином степени $n-1$:

$$P'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots + nc_n z^{n-1}. \tag{X.61}$$

Из того факта, что полином n-й степени имеет всюду производную, вытекает (см. § 127), что полином $P(z)$ является непрерывной функцией во всей плоскости комплексного переменного z, за исключением точки $z=\infty$.

Следующими по сложности после целых рациональных функций (полиномов) являются *дробные рациональные функции*. Эти функции могут быть заданы при помощи конечного числа арифметических операций, выполняемых над переменной $z=x+iy$ и постоянными коэффициентами. При этом операция деления на переменную z является обязательной, в противном случае дробная рациональная функция будет полиномом.

Примерами дробных рациональных функций могут служить следующие функции:

$$R(z)=\frac{z-4}{z+4};\quad R(z)=2iz+(3-i)+\frac{1}{z^2}=\frac{2iz^3+(3-i)z^2+1}{z^2}.$$

Всякую рациональную функцию можно в результате тождественных преобразований представить в виде отношения двух полиномов:

$$w=\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}=\frac{a_n(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\cdots(z-\alpha_k)^{n_k}}{b_m(z-\beta_1)^{m_1}(z-\beta_2)^{m_2}\cdots(z-\beta_l)^{m_l}}, \tag{X.62}$$

где

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n;\ m_1+m_2+\cdots+m_l=m;$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$; $m_1, m_2, \ldots, m_l$ — целые положительные числа.

При этом, сокращая числитель и знаменатель на общий множитель, если он имеется, всегда можем достичь того, чтобы полиномы в числителе и знаменателе были взаимно простые, т. е. чтобы они не имели общих корней.

Производную для функции w легко вычислить, воспользовавшись формулами (X.39) и (X.61).

Таким образом, дробная рациональная функция есть функция аналитическая во всей незамкнутой плоскости комплексного переменного, регулярная в любой ограниченной области, которая не содержит нулей знаменателя.

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ суть ее нули с кратностями $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Корни знаменателя $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ суть особые точки этой функции, которые называются *полюсами* с кратностью $m_1, m_2, \ldots, m_l$.

Полюс кратности единица называется *простым*.

Очевидно, что всякий нуль функции $w(z)$ есть полюс функции $\frac{1}{w(z)}$ с сохранением кратности, а также всякий полюс функции $w(z)$ есть нуль функции $\frac{1}{w(z)}$ той же кратности.

§ 130. Простейшие иррациональные функции. Точки разветвления

Функция

$$w=\sqrt[n]{z}, \tag{X.63}$$

обратная к функции $z=w^n$, n-значная (n — целое положительное число). Например, при $n=2$ каждому значению z соответствует два значения: $w_1=+\sqrt{z}$ и $w_2=-\sqrt{z}$, отличающиеся множителем $+1$ или -1.

В общем случае каждому значению переменной z, которую здесь удобнее рассматривать в тригонометрическом виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

кроме значения $z = 0$, на основании формулы (X.29) будет соответствовать n значений w:

$$w_1 = +\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$w_2 = +\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right); \qquad \text{(X.64)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_n = +\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right].$$

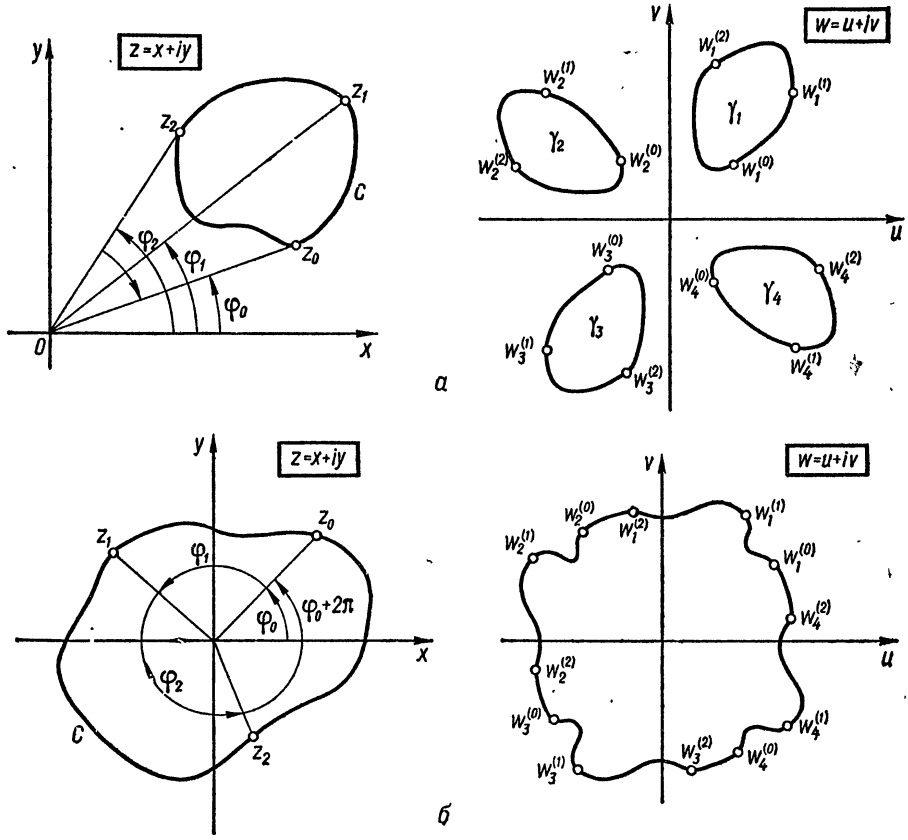


Рис. 273.

Для каждого фиксированного значения $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ все n значений $w_1, w_2, \ldots, w_n$ расположатся на окружности радиуса $R = +\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника.

Выберем какое-либо значение $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ переменной z и будем соответствующие ему n значений w обозначать $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}$.

Начнем перемещать точку z по некоторой непрерывной, самонепересекающейся замкнутой кривой C, не проходящей через начало координат. Отметим, для наглядности, еще несколько промежуточных точек, например z_1, z_2.

Каждой из этих точек будут соответствовать свои n значений $w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}$ и $w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, \ldots, w_n^{(2)}$ функции w (см. рис. 273, *а*, где, для конкретности, положено $n = 4$). Если точка z, пройдя всю кривую C, вернется в начальную точку z_0, то и каждое из значений $w_1, w_2, \ldots, w_n$ также вернется в свое исходное положение, описав в плоскости w замкнутые кривые $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, так как при этом $\arg z = \varphi$, достигнув своего максимального значения φ_2, возвратится к своему начальному значению $\arg z_0 = \varphi_0$.

Если же точка $z = 0$ лежит внутри контура C (рис. 273, *б*), то картина будет совершенно иной. Совершив однократный обход по кривой C и возвратившись в начальное положение z_0, модуль z примет свое исходное значение $r_0 = |z_0|$, а аргумент увеличится на 2π. Поэтому конечные значения w_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ совпадут с начальными значениями w_{j+1} $(w_{n+1} \equiv w_1)$. После n-кратного обхода кривой C значения $w_1, w_2, \ldots, w_n$ совпадут с первоначальными значениями $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}$ и пути, описанные точками $w_1, w_2, \ldots, w_n$, образуют одну замкнутую линию (рис. 273, *б*).

Таким образом, в любой области D переменного z, которая не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку $z = 0$, можно выделить n непрерывных и однозначных функций, принимающих каждая одно из значений (X.64); эти n функций называются *ветвями многозначной функции* $w = \sqrt[n]{z}$; их значения в каждой фиксированной точке отличаются одно от другого только множителем $\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, по модулю равным единице. В каждой точке области D применима теорема о производной обратной функции (§ 127), согласно которой

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{z}}{z} = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}.$$

Следовательно, каждая из построенных ветвей функции $w = \sqrt[n]{z}$ в области D, не содержащей точки $z = 0$, является регулярной функцией.

Если же область D содержит хотя бы одну замкнутую кривую, обходящую точку $z = 0$, то в такой области нельзя ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$ отделить друг от друга и, следовательно, функцию $w = \sqrt[n]{z}$ нельзя уже рассматривать как совокупность отдельных однозначных регулярных функций.

В самой точке $z = 0$ значения всех n ветвей $w_1, w_2, \ldots, w_n$ совпадают.

Точка $z = 0$, в любой окрестности которой нельзя отделить n различных ветвей функции $w = \sqrt[n]{z}$, называется *точкой разветвления* этой функции. Точка разветвления, так же как и рассмотренные ранее полюсы, является особой точкой, в которой аналитическая функция теряет регулярность.

Итак, $w = \sqrt[n]{z}$ есть многозначная (n-значная) аналитическая функция в незамкнутой плоскости z, регулярная во всех ее точках, кроме точки разветвления $z = 0$.

Для более полного и глубокого изучения многозначных функций служат специальные многолистные поверхности, впервые введенные выдающимся немецким математиком Бернгардом Риманом и получившие название *поверхностей Римана*.

Рассмотренные в § 129, 130 функции принадлежат к широкому классу *алгебраических функций*.

Алгебраической называется такая функция, связь которой с аргументом можно представить в виде алгебраического уравнения:

$$F(z, w) = P_0(z) + P_1(z)\,w + P_2(z)\,w^2 + \ldots + P_n(z)\,w^n, \qquad \text{(X.65)}$$

где n — целое положительное число, а $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_n(z)$ — целые полиномы произвольных степеней. Полином $F(z, w)$ считаем неприводимым, т. е. таким, который не разлагается на два или больше полиномов более низких степеней.

Если $n = 1$, то w будет рациональной функцией, если же $n > 1$, то w называется *иррациональной функцией* от z.

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*.

Для рассмотрения даже простейших трансцендентных функций необходимо обращаться к степенным рядам.

Неиссякаемым источником трансцендентных функций являются также и дифференциальные уравнения, но при этом их обязательно надо рассматривать в комплексной области. К изложению этих вопросов мы и переходим.

§ 131. Показательная функция и ее периодичность

Построим функцию $w = w(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которая была бы равна своей производной. Другими словами, изучим аналитическую функцию, определяемую дифференциальным уравнением

$$w' = w. \tag{X.66}$$

В классе полиномов такая функция существовать не может. Действительно, производная от полинома n-й степени есть снова полином, но степени $n - 1$. Так как полиномы различных степеней не могут тождественно совпадать между собой (в данном случае равенство $P_n(z) = P_{n-1}(z)$ может иметь только n корней, т. е. n общих точек), то отсюда и следует наше утверждение.

Таким образом, функция, определяемая равенством (X.66), не может быть ни полиномом (за исключением тривиального случая $w(z) \equiv 0$, когда $w' = (0)' = 0$), ни алгебраической функцией, что читателю полезно доказать в виде упражнения.

Следовательно, эта функция может быть только трансцендентной.

Будем искать решение уравнения (X.66) в виде степенного ряда с центром в точке $z = z_1$:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n; \quad c_0 = w(z)|_{z=z_1} = w(z_1), \tag{X.67}$$

коэффициенты которого согласно изложенному в § 110 методу определяются рекуррентной формулой

$$c_{n+1} = c_n. \tag{X.68}$$

Отсюда, учтя обозначение (IX.111), мы и получаем формулу для вычисления искомых коэффициентов:

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}; \quad c_0 = w(z_1); \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{X.69}$$

Подставляя в (X.69) последовательно $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, находим

$$c_1 = c_0; \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2!}; \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3!}; \ldots; \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{c_0}{n!},$$

и, следовательно, искомая функция определяется рядом

$$w(z) = c_0\left[1 + \frac{z - z_1}{1!} + \frac{(z - z_1)^2}{2!} + \frac{(z - z_1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(z - z_1)^n}{n!} + \ldots\right], \tag{X.70}$$

который сходится во всей комплексной области, так как согласно признаку Даламбера и равенству (X.69)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = n + 1 = \infty.$$

В рекуррентной формуле (X.69) коэффициент c_0 остался неопределенным, так что мы нашли общее решение уравнения (X.66), зависящее от одной произвольной постоянной $C = c_0$. Положив в (X.70) $z = z_1$, имеем:

$$w(z_1) = c_0,$$

т. е. значение коэффициента c_0 равно значению искомой функции в центре рассматриваемого ряда, как и было отмечено в формуле (X.67). Для того чтобы решение сделать однозначным, введем в качестве начальных условий следующие:

$$z_1 = 0;\ w(z_1) = w(0) = 1. \tag{X.71}$$

Тогда $c_0 = w(0) = 1$, и функция $w(z)$ принимает наиболее простой вид:

$$w(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = e^z. \tag{X.72}$$

Ряд (X.72) тождественно совпадает с рядом (VIII.51) § 98, в который была разложена при помощи формулы Тейлора показательная функция e^z. Поэтому показательную функцию мы можем определить теперь как решение простейшего линейного дифференциального уравнения (X.66) при начальных условиях (X.71).

Переходим к изучению ее свойств.

1. Дифференцируя почленно ряд (X.72), что мы имеем право делать на основании теоремы 3 § 95, находим производную функции e^z:

$$(e^z)' = 1 + \frac{2z}{2!} + \frac{3z^2}{3!} + \cdots + \frac{nz^{n-1}}{n!} + \frac{(n+1)z^n}{(n+1)!} + \cdots =$$
$$= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!} + \cdots = e^z.$$

Таким образом, e^z действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (X.66) при любом комплексном значении аргумента $z = x + iy$.

Следствие. *Производная любого порядка от функции e^z тождественно равна самой функции.*

2. Докажем, что для функции $w = e^z$ справедлива так называемая *теорема сложения*, которую можно записать в следующем виде:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{X.73}$$

Действительно, положив в формуле (X.70) $z = z_1 + z_2$ и, соответственно, $z - z_1 = z_2$, имеем

$$w(z_1 + z_2) = c_0\left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \cdots + \frac{z_2^n}{n!} + \cdots\right) = w(z_1)\cdot w(z_2),$$

так как $c_0 = w(z_1)$, а ряд, стоящий в скобках, согласно (X.72) равен $w(z_2)$. Заменяя в найденном равенстве $w(z)$ на e^z, мы и получаем теорему сложения (X.73) для показательной функции.

Теорема сложения, особенно если она имеет такое простое выражение, как в случае функции e^z, существенно облегчает задачу вычисления значений изучаемой функции.

Так, в случае действительных значений $z = x$ вычисление e^x при помощи ряда (X.72), хотя принципиально и возможно при любых значениях x, но число членов ряда, необходимое для обеспечения требуемой точности, т. е. объем вычислительной работы, при $x > 1$ резко увеличивается по мере увеличения числа x.

Теорема сложения позволяет избежать эту трудность. Например, составив при помощи рядов таблицу значений функции e^x для промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$, мы можем, воспользовавшись равенством (X.73), представить e^x в виде

$$e^x = e^1 \cdot e^{x-1} = e \cdot e^{x-1}.$$

В таком случае вычисление значений e^x для промежутка $1 \leqslant x \leqslant 2$ сводится к умножению уже известного значения e^{x-1} на постоянный множитель $e = 2{,}71828\ldots$, величина которого была вычислена в табл. 83 при $x = 1$.

Для промежутка $2 \leqslant x \leqslant 4$ вычисляем e^x по формуле

$$e^x = e^2 \cdot e^{x-2},$$

так как при этом $0 \leqslant (x-2) \leqslant 2$, и, следовательно, e^{x-2} и e^2 нам уже известны.

Таким образом, при помощи теоремы сложения можем продолжать вычислять таблицу значений функции e^x как угодно далеко, не прибегая больше к вычислениям при помощи рядов.

Применяя многократно формулу (X.73), можно придать ей следующий, более общий вид:

$$e^{z_1} e^{z_2} e^{z_3} \ldots e^{z_n} = e^{z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n}. \tag{X.74}$$

В частности, при $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ получаем

$$(e^z)^n = e^{nz}. \tag{X.75}$$

3. Положив в формуле (X.73) $z_1 = z$, $z_2 = -z$, $z_1 + z_2 = 0$, находим, что

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1,$$

т. е.

$$e^{-z} = \frac{1}{e^z}. \tag{X.76}$$

Отсюда вытекает, что показательная функция ни при каких конечных значениях z не обращается в нуль.

Действительно, если бы в какой-либо точке z функция e^z обратилась в нуль, то согласно (X.76) в точке $(-z)$ она была бы не определена, что противоречит формуле (X.72).

Ряд (X.72) имеет такой же радиус сходимости, как и ряд (X.70), т. е. $R = \infty$. Поэтому, в силу самого определения (X.66), показательная функция есть регулярная аналитическая функция на всей открытой плоскости z, т. е. на всей плоскости с выключенной точкой $z = \infty$. Как будет показано в дальнейшем, точка $z = \infty$ является единственной особой точкой для функции e^z.

Функции, обладающие такими свойствами, называются *целыми трансцендентными*. Следовательно, *показательная функция есть отличная от постоянной целая функция, не имеющая нулей.*

4. На рис. 274 показан график функции $w = e^z$ при действительных значениях аргумента $z = x$. Ряд (X.72) позволяет без каких-либо принципиальных усложне-

ний вычислять значения e^z и для комплексных z, в частности для чисто мнимого аргумента $z = iy$.

Таблица 112

$w = \sum C_n(z)$; $C_0(z) \equiv 1$; $C_n(z) = \frac{zC_{n-1}(z)}{n}$; $\operatorname{Re} w = \sum_{2\nu}$; $\operatorname{Im} w = \sum_{2\nu+1}$

$w = e^z$	$z = i$	$z = 1{,}5i$	$z = 2{,}5i$	$z = 3i$	$z = 3{,}141593i$
n	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$	$C_n(z)$
0	+1,000000	+1,000000	+1,000000	+1,000000	+1,000000
1	+1,000000i	+1,500000i	+2,500000i	+3,000000i	+3,141593i
2	−0,500000	−1,125000	−3,125000	−4,500000	−4,934804
3	−0,166667i	−0,562500i	−2,604167i	−4,500000i	−5,167715i
4	+0,041667	+0,210938	+1,627605	+3,375000	+4,058714
5	+0,008333i	+0,063281i	+0,813803i	+2,025000i	+2,550165i
6	−0,001389	−0,015820	−0,339085	−1,012500	−1,335264
7	−0,000198i	−0,003390i	−0,121102i	−0,433929i	−0,599265i
8	+0,000025	+0,000636	+0,037844	+0,162723	+0,235331
9	+0,000003i	+0,000106i	+0,010512i	+0,054241i	+0,082146i
10		−0,000016	−0,002628	−0,016272	−0,025807
11		−0,000002i	−0,000597i	−0,004438i	−0,007370i
12			+0,000124	+0,001110	+0,001930
13			+0,000024i	+0,000256i	+0,000466i
14			−0,000004	−0,000055	−0,000105
15			−0,000001i	−0,000011i	−0,000022i
16				+0,000002	+0,000004
17					+0,000001i
$\sum_{2\nu} =$	+0,540303	+0,070738	−0,801144	−0,989992	−1,000001
$\sum_{2\nu+1} =$	+0,841471i	+0,997495i	+0,598472i	+0,141119i	−0,000001i

В табл. 112 найдены значения функции $w = e^z = \operatorname{Re} w + i \operatorname{Im} w$ для $z = i$; $1{,}5i$; $2{,}5i$; $3i$; πi, по которым затем на рис. 275 построены графики действительной части $u = \operatorname{Re} w$ и мнимой части $v = \operatorname{Im} w$ показательной функции $w = u + iv$.

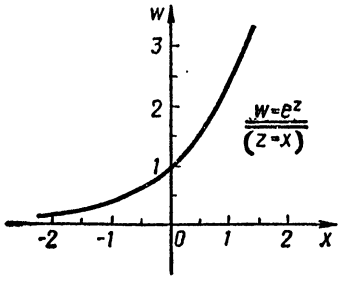


Рис. 274.

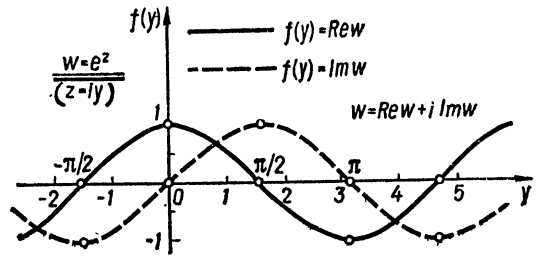


Рис. 275.

Все вычисления выполнены по формулам (VIII.51)

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z);$$

$$C_0(z) \equiv 1;\ C_n(z) = \frac{zC_{n-1}(z)}{n};\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

которыми мы уже пользовались в § 98. Техника вычислений в случае чисто мнимого аргумента $z = iy$ остается аналогичной, за исключением того, что теперь надо отдельно найти сумму четных и нечетных членов $C_{2\nu}(z)$ и $C_{2\nu+1}(z)$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. В результате сумма четных членов, которую мы обозначили $\Sigma_{2\nu}$, даст действительную часть показательной функции $w = e^z$, а сумма нечетных членов $\Sigma_{2\nu+1}$ — ее мнимую часть, т. е. при $z = iy$

$$\operatorname{Re} w = \sum\nolimits_{2\nu} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu}(z) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots = \cos y; \qquad (X.77)$$

$$\operatorname{Im} w = \sum\nolimits_{2\nu+1} \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu+1}(z) = i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right) = i \sin y. \qquad (X.78)$$

В качестве частичного контроля (только для значений $z = 1{,}5i$ и $z = 3i$) мы воспользовались равенством

$$(e^{1{,}5i})^2 = e^{3i},$$

которое и подтвердило достоверность результатов. В самом деле, возведя в квадрат комплексное число $e^{1{,}5i}$, имеем

$$(e^{1{,}5i})^2 = (0{,}070738 + 0{,}997495i)^2 =$$
$$= (0{,}0050039 - 0{,}9949963) + 0{,}1411216i \approx -0{,}989992 + 0{,}141122i,$$

что в пределах точности вычислений совпадает со значением $e^{3i} = -0{,}989992 + 0{,}141119i$, непосредственно вычисленным в табл. 112.

Упражнение. По образцу табл. 112 вычислить с пятью десятичными знаками e^z для значений аргумента $z = \pm 0{,}5i$; $z = 2i$; $z = 4i$, а затем выполнить контроль при помощи равенств

$$(e^{0{,}5i})^2 = e^i;\quad (e^i)^2 = e^{2i};\quad (e^{2i})^2 = e^{4i}.$$

5. В последней колонке табл. 112 мы нашли, что в пределах точности вычислений

$$e^{\pi i} = -1. \qquad (X.79)$$

Подставив это значение в формулу (X.73), имеем

$$e^{2\pi i} = e^{\pi i + \pi i} = (-1)\cdot(-1) = +1, \qquad (X.80)$$

а в таком случае

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$$

и, следовательно, при любом целом числе $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$

$$e^{z+2n\pi i} = e^z \cdot e^{2n\pi i} = e^z \cdot (e^{2\pi i})^n = e^z \cdot (+1)^n = e^z. \qquad (X.81)$$

Формула (X.81) устанавливает новое важное свойство показательной функции $w = e^z$ — ее *периодичность*, которым в действительной области эта функция не обладает*.

С некоторыми другими свойствами показательной функции мы познакомимся в следующих параграфах. При этом мы, в частности, вычислим и более точное значение полупериода показательной функции $\pi = 3{,}14159265\ldots$.

§ 132. Тригонометрические функции. Формулы Эйлера

Определим функции комплексного переменного $w = \sin z$ и $w = \cos z$ как фундаментальные решения простейшего линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$w'' = -w, \tag{X.82}$$

т. е. как решения, которые в точке $z_0 = 0$ определяются следующими начальными условиями:

$$w(0) = 0;\ w'(0) = 1 \text{ для } w_0(z) = \sin z, \tag{X.83}$$

$$w(0) = 1;\ w'(0) = 0 \text{ для } w_1(z) = \cos z. \tag{X.84}$$

Аналогично примеру 3 § 110 общее решение уравнения (X.82) будем искать в виде степенного ряда с центром в точке $z_0 = 0$:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n;\ c_0 = w(0);\ c_1 = w'(0). \tag{X.85}$$

Коэффициенты этого ряда определяются через коэффициенты c_0 и c_1 (т. е. через две произвольные постоянные) следующей рекуррентной формулой:

$$c_{n+2} = -c_n$$

или, приняв во внимание обозначения (IX.111),

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)};\ c_0 = w(z_0);\ c_1 = w'(z_0);\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{X.86}$$

Полагая в формуле (X.86) последовательно $n = 0, 1, 2, \ldots$, при начальных условиях (X.83) получаем

$$c_0 = 0;\ c_2 = c_4 = \ldots = c_{2\nu} = 0;\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$c_1 = 1;\ c_3 = \frac{-c_1}{2\cdot 3} = -\frac{1}{3!};\quad c_5 = \frac{-c_3}{4\cdot 5} = +\frac{1}{5!};\quad c_7 = \frac{-c_5}{6\cdot 7} = -\frac{1}{7!};\ \ldots$$

и, следовательно,

$$w_0(z) = \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + \ldots. \tag{X.87}$$

---

* Напомним, что функция $f(z)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное отличное от нуля число a, что при произвольном целом n тождественно (т. е. при любом z) справедливо равенство

$$f(z + an) \equiv f(z);\ n = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots.$$

Число a, вообще говоря, комплексное, называется *периодом* функции $f(z)$.

Если же это равенство выполняется не при любых z и n, а только при каких-либо фиксированных их значениях, как, например, для $f(z) = \sin z$:

$$\sin 30^\circ = 0{,}5;\ \sin(30^\circ + 120^\circ) = \sin 150^\circ = 0{,}5 = \sin 30^\circ,$$

то в этом случае число $a = 120^\circ$ не будет периодом функции $\sin z$.

Аналогичным путем из той же рекуррентной формулы (X.86) при начальных условиях (X.84) находим

$$c_0 = 1;\ c_2 = \frac{-c_0}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2!};\ c_4 = \frac{-c_2}{3\cdot 4} = +\frac{1}{4!};\ c_6 = \frac{-c_4}{5\cdot 6} = -\frac{1}{6!};\ \ldots;$$

$$c_1 = 0;\ c_3 = c_5 = \cdots = c_{2\nu+1} = 0;\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

и тогда

$$w_1(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!} + \cdots. \qquad (X.88)$$

Радиус сходимости этих рядов $R = \infty$, так как согласно формуле (IX.116) из (X.86) непосредственно получаем

$$R^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\cdot\frac{c_{n+1}}{c_{n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+2}}\right| = (n+1)(n+2) = \infty. \qquad (X.89)$$

Следовательно, $\sin z$ и $\cos z$, как и показательная функция e^z, суть *целые трансцендентные функции, регулярные во всей открытой плоскости комплексного переменного z, которые при действительных значениях $z = x$ тождественно совпадают с известными из тригонометрии функциями* $\sin x$ *и* $\cos x$. Доказать это утверждение проще всего, если разложить в ряд Маклорена функции действительного переменного $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$, в результате чего мы снова получим ряды (X.87) и (X.88), в которых надо только произвести замену $z = x$.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что на основании формального совпадения рядов, которыми определяются функции $\sin z$ и $\cos z$ и те же функции действительного переменного $\sin x$ и $\cos x$, нельзя делать заключения, что и все свойства этих функций одинаковы.

Функции $\sin z$ и $\cos z$ являются совершенно новыми функциями, обладающими рядом новых свойств (например, $|\sin z|$ может быть какой угодно большой величиной, в то время как функция $\sin x$ по абсолютному значению не может превышать единицы: $|\sin x| \leqslant 1$). Тем не менее $\sin z$ и $\cos z$ «унаследовали» все основные свойства функций $\sin x$ и $\cos x$, но каждое из этих свойств надо строго доказать.

Для этого установим связь между функциями $\sin z$, $\cos z$ и изученной нами в комплексной области показательной функцией.

Заменяя в формуле (X.72) z на iz, имеем

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \frac{(iz)^6}{6!} + \cdots =$$
$$= 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i\frac{z^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \cdots$$

Перегруппировав члены, можем написать:

$$e^{iz} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right),$$

после чего, заменяя ряды в скобках по формулам (X.87), (X.88), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z. \qquad (X.90)$$

Заменяя i на $-i$, имеем

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z. \qquad (X.91)$$

Складывая и вычитая равенства (X.90) и (X.91) и решая полученные уравнения относительно $\sin z$ и $\cos z$, находим формулы Эйлера:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{X.92}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{X.93}$$

устанавливающие связь между тригонометрическими функциями и функцией показательной.

При $z = y$, где y — действительное число, формула (X.90) дает

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{X.94}$$

Полагая в формуле (X.94) $y = 2\pi$; $y = \pi$; $y = \frac{\pi}{2}$, получаем равенства, которые полезно запомнить:

$$e^{2\pi i} = 1; \quad e^{\pi i} = -1; \quad e^{\frac{\pi}{2} i} = i. \tag{X.95}$$

Заметим попутно, что первые два равенства (X.95) мы уже нашли в предыдущем параграфе другим путем.

Исходя из тригонометрической формы представления комплексных чисел (формула (X.7) § 120) и формулы (X.94), получаем также новую *показательную форму* комплексного числа

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \tag{X.96}$$

которая благодаря ее краткости стала наиболее распространенной.

Применяя теорему сложения (X.73) для функции e^z в случае $z = x + iy$, получаем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{X.97}$$

т. е. показательная функция e^z имеет модулем $|e^z| = e^x$ и аргументом

$$\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi; \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.$$

Заменяя в формуле (X.97) число $z = x + iy$ числом $z + 2n\pi i = x + (y + 2n\pi)i$, имеем

$$e^{z+2n\pi i} = e^{x+(y+2n\pi)i} =$$

$$= e^x[\cos(y + 2n\pi) + i \sin(y + 2n\pi)] = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Воспользовавшись снова формулой (X.97), находим

$$e^{z+2n\pi i} = e^z.$$

Таким образом, показательная функция e^z имеет чисто мнимый период $2\pi i$, как это уже было установлено в предыдущем параграфе формулой (X.81).

Выведем основные свойства функций $\sin z$ и $\cos z$.

1. Дифференцируя почленно ряды (X.87) и (X.88), имеем

$$(\sin z)' = 1 - \frac{3z^2}{3!} + \frac{5z^4}{5!} - \ldots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \cos z; \tag{X.98}$$

$$(\cos z)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) = -\sin z. \tag{X.99}$$

Дифференцируя еще раз, находим

$$(\sin z)'' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots = -\sin z;$$

$$(\cos z)'' = -\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = -\cos z,$$

и в результате убеждаемся, что каждая из функций $w = \sin z$ и $w = \cos z$ действительно удовлетворяет уравнению (X.82).

2. Непосредственно из рядов (X.87) и (X.88) также получаем

$$\sin(-z) = -\sin z; \quad \cos(-z) = \cos z, \tag{X.100}$$

т. е. функция $\sin z$ есть функция нечетная, а $\cos z$ — четная.

3. Справедливы теоремы сложения при любых комплексных значениях z_1 и z_2:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2; \tag{X.101}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \tag{X.102}$$

Докажем первую из этих формул; вторая доказывается аналогично, что читателю надо выполнить в виде упражнения.

Воспользовавшись формулами Эйлера (X.92), (X.93), имеем

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 =$$

$$= \frac{(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2})}{4i} + \frac{(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})}{4i} =$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1+z_2)} + \right.$$

$$\left. + e^{i(z_2-z_1)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}\right] = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2).$$

4. Положив в формулах (X.101), (X.102) $z_1 = z$, $z_2 = 2n\pi$, устанавливаем, что функции $\sin z$ и $\cos z$ — периодические и имеют период, равный действительному числу 2π:

$$\sin(z + 2n\pi) = \sin z; \quad \cos(z + 2n\pi) = \cos z; \quad n = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots, \tag{X.103}$$

поскольку при действительных значениях аргумента $z_2 = 2n\pi$

$$\sin z_2 = \sin 2n\pi = 0; \quad \cos z_2 = \cos 2n\pi = 1.$$

5. Следствием теоремы сложения являются формулы двойного и половинного аргумента, формулы для суммы и разности синусов и косинусов, которые все имеют тот же вид, что и для функций действительного аргумента.

В частности, положив в (X.102) $z_2 = -z_1 = z$, получаем

$$\cos 0 = \cos(z - z) = \cos z \cos(-z) - \sin z \sin(-z) = \cos^2 z + \sin^2 z,$$

т. е. известное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{X.104}$$

которое в элементарной математике доказывается, исходя из теоремы Пифагора.

При комплексном $z = x + iy$ геометрическое толкование функций $\sin z$ и $\cos z$ как отношений противолежащего и прилежащего катетов к гипотенузе совершенно теряет смысл. Тем не менее основное тригонометрическое тождество $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ сохраняет свою силу.

В качестве иллюстрации проверим численно тождество (X.104), взяв, к примеру, $z = 0{,}5i$.

Подставив в формулы (X.87), (X.88) $z = 0{,}5i$ и ограничиваясь шестью десятичными знаками, имеем

$$\sin(0{,}5i) = i\left(0{,}5 + \frac{0{,}125}{6} + \frac{0{,}03125}{120} + \frac{0{,}0078125}{5040} + \dots\right) = 0{,}521095i;$$

$$\cos(0{,}5i) = 1 + \frac{0{,}25}{1} + \frac{0{,}0625}{24} + \frac{0{,}015625}{720} + \dots = 1{,}127626.$$

Следовательно,

$$\sin^2(0{,}5i) + \cos^2(0{,}5i) = -0{,}271540 + 1{,}271540 = +1{,}000000.$$

Отметим, что в рассматриваемом примере $\cos(0{,}5i)$ есть величина большая, чем единица.

При достаточно большом y функции $\sin iy$ и $\cos iy$, как легко видеть из формул (X.87), (X.88), будут принимать по модулю какие угодно большие значения.

6. Определим все те точки плоскости z, в которых $\sin z$ и $\cos z$ обращаются в нуль. Согласно формуле (X.92) уравнение $\sin z = 0$ равносильно уравнению

$$e^{iz} = e^{-iz},$$

т. е.

$$e^{2iz} = 1.$$

Отсюда, учитывая периодичность функции e^z в силу первого из уравнений (X.95), получаем

$$z = n\pi, \text{ где } n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots .$$

Таким образом, все нули функции $\sin z$ расположены на действительной оси в точках $n\pi$.

Аналогично доказываем, что все нули функции $\cos z$ расположены на действительной оси в точках $\frac{\pi}{2} + n\pi$, где n — любое целое число или нуль. При этом нули функций $\sin z$ и $\cos z$ будут простыми (не кратными) нулями.

В заключение все остальные тригонометрические функции комплексного переменного определим при помощи формул

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1};\\
\operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1};\\
\sec z &= \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}};\\
\operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}.
\end{aligned} \qquad (X.105)$$

Первые две из этих функций имеют период равный π, остальные — 2π.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ имеют бесконечное число простых нулей и полюсов, совпадающих соответственно с нулями их числителей и знаменателей.

Функции $\sec z$ и $\operatorname{cosec} z$ на всей открытой плоскости z нулей не имеют, а их простыми полюсами будут нули функции $\cos z$ и $\sin z$, которые были определены выше.

Единственной особой точкой функций $\sin z$ и $\cos z$ является точка $z = \infty$, в силу чего радиус сходимости рядов (X.87) и (X.88) и был $R = \infty$. В более полных курсах анализа доказывается, что точка $z = \infty$ есть *существенно особая точка* функций $w = \sin z$ и $w = \cos z$, а следовательно, и функции $w = e^z$.

§ 133. Другой вывод теоремы сложения. Эффективные формулы для вычисления тригонометрических функций

Теорему сложения для функций $\sin z$ и $\cos z$ можно вывести также непосредственно из уравнения (X.82)

$$w'' = -w,$$

что имеет принципиальное значение, так как позволяет полностью определить все свойства тригонометрических функций при помощи степенных рядов, не прибегая к геометрической интерпретации этих функций.

С этой целью будем искать решение уравнения (X.82) в виде ряда с центром в точке $z = z_1$:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^n, \quad c_0 = w(z_1), \quad c_1 = w'(z_1), \tag{X.106}$$

коэффициенты которого определяются той же рекуррентной формулой (X.86):

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)},$$

но при новых значениях коэффициентов $c_0 = w(z_1)$ и $c_1 = w'(z_1)$.

Подставив эти значения c_0 и c_1 в (X.86), находим последовательно:

$$c_0 = w(z_1);\ c_2 = \frac{-c_0}{1 \cdot 2};\ c_4 = \frac{-c_2}{3 \cdot 4} = +\frac{c_0}{4!};\ c_6 = \frac{-c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!};\ \ldots;$$

$$c_1 = w'(z_1);\ c_3 = \frac{-c_1}{2 \cdot 3};\ c_5 = \frac{-c_3}{4 \cdot 5} = +\frac{c_1}{5!};\ c_7 = \frac{-c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!};\ \ldots$$

Отсюда, группируя в (X.106) четные и нечетные члены и вынося за скобки соответственно c_0 и c_1, получаем

$$w(z) = c_0\left[1 - \frac{(z-z_1)^2}{2!} + \frac{(z-z_1)^4}{4!} - \frac{(z-z_1)^6}{6!} + \cdots\right] +$$

$$+ c_1\left[(z-z_1) - \frac{(z-z_1)^3}{3!} + \frac{(z-z_1)^5}{5!} - \frac{(z-z_1)^7}{7!} + \cdots\right],$$

или, учтя (X.87) и (X.88),

$$w(z) = c_0 \cos(z - z_1) + c_1 \sin(z - z_1). \tag{X.107}$$

Положив $z = z_1 + z_2$, $z - z_1 = z_2$ и заменяя c_0 и c_1 их значениями, имеем

$$w(z_1 + z_2) = w(z_1)\cos z_2 + w'(z_1)\sin z_2. \tag{X.108}$$

Пусть теперь $w(z)$ есть фундаментальное решение уравнения (X.82), определяемое начальными условиями (X.83), т. е.

$$w(z) = w_0(z) = \sin z.$$

В таком случае согласно (X.98)

$$w'(z) = (\sin z)' = \cos z,$$

так что, внося эти значения в (X.108), мы и приходим к теореме сложения (X.101) для функции $w = \sin z$:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.$$

Аналогично для фундаментального решения, определяемого начальными условиями (X.84), будем иметь

$$w(z) = w_1(z) = \cos z;\ w'(z) = (\cos z)' = -\sin z$$

и тогда

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

т. е. мы снова получили формулу (X.102).

Из дифференциального уравнения (X.82) можно также непосредственно получить наиболее эффективные формулы для вычисления значений тригонометрических функций.

С этой целью введем вспомогательную искомую функцию

$$w' = \zeta.$$

Тогда, дифференцируя это равенство и приняв во внимание исходное уравнение (X.82), имеем

$$w'' = \zeta' = -w.$$

Объединяя эти результаты, приходим к системе двух линейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w' = \zeta, \\ \zeta' = -w, \end{cases} \tag{X.109}$$

эквивалентной исходному уравнению второго порядка (X.82).

Для полной однозначности определим функцию w, входящую в систему (X.109), начальными условиями (X.83). Тогда

$$w = \sin z; \quad w(0) = 0,$$

а согласно первому уравнению (X.109)

$$\zeta = w' = (\sin z)' = \cos z; \quad \zeta(0) = \cos 0 = 1.$$

С другой стороны, будем решение системы (X.109) искать в виде рядов с центром в точке $z_0 = 0$:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n; \quad b_0 = w(0) = 0; \tag{X.110}$$

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad c_0 = \zeta(0) = w'(0) = 1. \tag{X.111}$$

Подставляя ряды (X.110) и (X.111) в исходную систему (X.109), мы обычным путем получаем рекуррентные формулы для определения искомых коэффициентов:

$$\dot{b}_{n+1} = c_n; \quad \dot{c}_{n+1} = -b_n. \tag{X.112}$$

Воспользовавшись обозначениями (IX.111) § 110, $\dot{b}_{n+1} = (n+1)\, b_{n+1}$, $\dot{c}_{n+1} = (n+1)\, c_{n+1}$, придаем этим формулам окончательный вид:

$$b_{n+1} = \frac{c_n}{n+1}; \quad c_{n+1} = -\frac{b_n}{n+1}; \tag{X.113}$$

где

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда шаг за шагом находим

$$b_1 = +\frac{c_0}{1} = +1; \quad c_1 = -\frac{b_0}{1} = 0 \text{ при } n = 0;$$

$$b_2 = +\frac{c_1}{2} = 0; \quad c_2 = -\frac{b_1}{2} = -\frac{1}{2!} \text{ при } n = 1;$$

$$b_3 = +\frac{c_2}{3} = -\frac{1}{3!}; \quad c_3 = -\frac{b_2}{3} = 0 \text{ при } n = 2 \text{ и т. д.},$$

так что, подставив эти значения в (X.110) и (X.111), мы снова получаем ряды (X.87) и (X.88):

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots.$$

Однако для вычислительных целей (аналогично формулам (VIII.51) § 98 для функции e^z) этим рядам удобнее придать следующий эквивалентный вид:

$$\sin z = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_{2\nu+1}(z); \quad \cos z = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{2\nu}(z), \tag{X.114}$$

где

$$S_{2\nu+1}(z) \equiv b_{2\nu+1} z^{2\nu+1}; \quad S_{2\nu+1}(z) = \frac{zC_{2\nu}(z)}{2\nu+1}; \quad C_0(z) \equiv 1; \tag{X.115}$$

$$C_{2\nu}(z) \equiv c_{2\nu} z^{2\nu}; \quad C_{2\nu+2}(z) = -\frac{zS_{2\nu+1}(z)}{2\nu+2}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \tag{X.116}$$

Действительно, обозначив каждый из отличных от нуля членов ряда (X.110) и (X.111) соответственно через $S_{2\nu+1}(z)$ и $C_{2\nu}(z)$, мы при фиксированном z сводим вычисление очередного $S_{2\nu+1}$ и $C_{2\nu+2}$ к одному единственному умножению на заданное число z и к делению полученного результата на номер очередного вычисляемого члена, т. е. на целое число $n = 2\nu + 1 = 1, 3, 5, \ldots$ или $n = 2\nu + 2 = 2, 4, 6 \ldots$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Таблица 113

$$\sin z = \sum S_{2\nu+1}(z); \quad S_{2\nu+1}(z) = \frac{zC_{2\nu}(z)}{2\nu+1}; \quad C_0(z) \equiv 1$$

$$\cos z = \sum C_{2\nu}(z); \quad C_{2\nu+2}(z) = -\frac{zS_{2\nu+1}(z)}{2\nu+2}; \quad S_1(z) = z$$

	$z = 0{,}7$		$z = \frac{1}{2}\pi = 1{,}570796$		$z = \pi = 3{,}141593$	
ν	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$
0	+1,000000	+0,700000	+1,000000	+1,570796	+1,000000	+3,141593
1	−0,245000	−0,057167	−1,233700	−0,645964	−4,934804	−5,167715
2	+0,010004	+0,001401	+0,253670	+0,079693	+4,058714	+2,550165
3	−0,000164	−0,000016	−0,020864	−0,004682	−1,335264	−0,599265
4	+0,000001		+0,000919	+0,000160	+0,235331	+0,082146
5			−0,000025	−0,000004	−0,025807	−0,007370
6			+0,000001		+0,001930	+0,000466
7					−0,000105	−0,000022
8					+0,000004	+0,000001
$\Sigma =$	+0,764841	+0,644218	0,000000	+0,999999	−1,000001	−0,000001
$\{\Sigma\}^2 =$	+0,584982	+0,415017	0,000000	+0,999998	+1,000002	0,000000
Контроль: $\cos^2 z + \sin^2 z =$	0,999999		$\cos^2 z + \sin^2 z =$	0,999998	$\cos^2 z + \sin^2 z =$	1,000002

Вычисления же такого рода проводятся на арифмометре или любой другой вычислительной машине очень легко и в один прием без промежуточных записей. Более того, даже вручную (без арифмометра) вычисление $\sin z$ и $\cos z$ с 5—6 знаками можно выполнить за 5—10 минут, в чем читатель легко может убедиться, продублировав табл. 113, в которой приведены все необходимые данные для одновременного определения $\sin z$ и $\cos z$ при $z = 0{,}7$; $z = \frac{\pi}{2}$; $z = \pi$. Например, при $z = 0{,}7$, исходя из $C_0(z) \equiv 1$, последовательно находим

$$S_1(z) = \frac{zC_0(z)}{1} = z = 0{,}7;\quad C_2(z) = -\frac{zS_1}{2} = -\frac{0{,}49}{2} = -0{,}245 \text{ при } \nu = 0;$$

$$S_3 = \frac{zC_2}{3} = \frac{0{,}7(-0{,}245)}{3} = -0{,}057167;\quad C_4 = -\frac{0{,}7S_3}{4} = +0{,}010004 \text{ при } \nu = 1$$

и т. д. Просуммировав затем все $C_{2\nu}(z)$ и $S_{2\nu+1}(z)$, находим

$$\cos 0{,}7 = \sum_{\nu=0}^{4} C_{2\nu}(z) \equiv \sum_{2\nu} = 0{,}764841;\quad \cos^2 0{,}7 = 0{,}584982;$$

$$\sin 0{,}7 = \sum_{\nu=0}^{3} S_{2\nu+1}(z) \equiv \sum_{2\nu+1} = 0{,}644218;\quad \sin^2 0{,}7 = 0{,}415017.$$

Надежным контролем вычислений по формулам (X.114) — (X.116) является тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

которое должно выполняться с точностью до 1—2 единиц последнего десятичного знака, с которым ведутся вычисления.

Полученные в табл. 113 результаты надо округлить до пяти десятичных знаков, так как из-за неустранимых ошибок округления последний знак нельзя считать верным.

Упражнение. По образцу табл. 113 вычислить с пятью верными знаками $\sin z$ и $\cos z$ для $z = 0{,}2$; $z = 0{,}4$; $z = 0{,}8$ и выполнить также контроль результатов.

Значения остальных тригонометрических функций проще всего вычислять согласно формулам (X.105) по известным $\sin z$ и $\cos z$, так как степенные ряды для функций $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ плохо сходятся. Это обусловлено тем, что данные функции имеют бесконечно много полюсов в точках, в которых соответственно $\sin z$ или $\cos z$ обращаются в нуль. Так как радиус сходимости ряда для любой аналитической функции определяется расстоянием от центра ряда до ближайшей особой точки рассматриваемой функции, то радиус сходимости рядов с центром z_0 на действительной оси для функций $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\sec z$, $\operatorname{cosec} z$ не может быть больше чем $\pi/2$. К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем.

Формулы (X.114) — (X.116) остаются справедливыми и для комплексных значений аргумента $z = x \pm iy$. Однако тригонометрические функции в комплексной области проще всего вычислять при помощи теоремы сложения и гиперболических функций, на чем мы остановимся в § 137.

§ 134. Вычисление π с любой наперед заданной точностью. Формулы приведения

Обозначим греческой буквой π первый положительный нуль функции $w = \sin z$ и покажем, что соответствующим нулем функции $w = \cos z$ будет число $z = \frac{\pi}{2}$. С этой целью найдем прежде всего первый положительный корень уравнения

$$f(z) = \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = 0, \qquad \text{(X.117)}$$

а затем при помощи теорем сложения (X.101), (X.102) покажем, что удвоенное значение найденного корня уравнения (X.117) будет нулем функции $\sin z$.

Уравнение (X.117) будем решать по методу Ньютона, уточняя нулевое приближение искомого корня $z^{(0)}$ по формуле

$$z_{n+1}^{(0)} = z_n^{(0)} - \varepsilon_n; \quad \varepsilon_n = \frac{f(z_n^{(0)})}{f'(z_n^{(0)})}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{X.118}$$

где согласно (X.117) и (X.99)

$$f'(z) = -\sin z = -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right). \tag{X.119}$$

Величины $\cos z$ и $\sin z$ для каждого фиксированного значения $z = z_n^{(0)}$ будем вычислять по формулам (X.114) — (X.116), а нулевое приближение корня найдем из уравнения

$$1 - \frac{z^2}{2!} = 0 \text{ или } z^2 = 2, \tag{X.120}$$

которое получим, оборвав ряд (X.117) на его втором члене.

Решив уравнение (X.120), имеем

$$z_0^{(0)} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4.$$

Взяв положительное значение найденного корня и вычислив для него (по образцу табл. 113) с тремя десятичными знаками

$$f[z_0^{(0)}] = \cos z_0^{(0)} = 0{,}169; \quad f'[z_0^{(0)}] = -\sin z_0^{(0)} = -0{,}986;$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{0{,}169}{0{,}986} = -0{,}171,$$

согласно формуле (X.118) находим первое приближение:

$$z_1^{(0)} = z_0^{(0)} - \varepsilon_0 = 1{,}400 + 0{,}171 = 1{,}571.$$

По первому приближению, повторив эти вычисления, получаем второе приближение, а затем третье:

$$z_2^{(0)} = 1{,}5707964; \quad z_3^{(0)} = 1{,}57079632679489,$$

в каждом из которых все цифры значащие, в чем легко убедиться, осуществив контроль вычислений при помощи тождества

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Все необходимые вычисления для определения первого положительного корня уравнения $\cos z = 0$ приведены в табл. 114. Выполнив еще один шаг, т. е. подставив найденное третье приближение $z = z_3^{(0)}$ в формулу Ньютона (X.118), и осуществив вычисления с 30 десятичными знаками, находим окончательно

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13216\ 91640$$

и, следовательно,

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83280. \tag{X.121}$$

Для найденного $\frac{\pi}{2}$ (с той же точностью в 30 десятичных знаков)

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1. \tag{X.122}$$

Таблица 114

$$f(z)=\cos z=0;\ f'(z)=-\sin z;\ z_{n+1}^{(0)}=z_n^{(0)}-\varepsilon_n;\ \varepsilon_n=\frac{f[z_n^{(0)}]}{f'[z_n^{(0)}]}$$

	$z=z_0^{(0)}=1{,}4$		$z=z_1^{(0)}=1{,}571$		$z=z_2^{(0)}=1{,}5707964$	
ν	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$
0	+1,000	+1,400	+1,0000000	+1,5710000	+1,00000000000000	+1,57079640000000
1	−0,980	−0,457	−1,2340205	−0,6462154	−1,23370066512648	−0,64596418781943
2	+0,160	+0,045	+0,2538011	+0,0797443	+0,25366955518892	+0,07969264481607
3	−0,011	−0,002	−0,0208797	−0,0046860	−0,00863486597 26	−0,00468175566263
4			+0,0009202	+0,0001606	+0,00091926061757	+0,00016044125208
5			−0,0000252	−0,0000036	−0,00002520205412	−0,00000359884508
6			+0,0000005	+0,0000001	+0,00000047108774	+0,00000005692176
7					−0,00000000638661	−0,00000000066880
8					+0,00000000006566	+0,00000000000607
9					−0,00000000000053	−0,00000000000004
$\Sigma=$	+0,169	+0,986	−0,0002036	+1,0000000	−0,00000007320511	+1,00000000000000
	$\varepsilon_0=-0{,}171$ $z_1^{(0)}=1{,}400+$ $+0{,}171=1{,}571$		$\varepsilon_1=+0{,}0002036$ $z_2^{(0)}=1{,}571-0{,}0002036=$ $=1{,}5707964$		$\varepsilon_2=+0{,}00000007320511$ $z_3^{(0)}=1{,}5707964-0{,}00000007320511=$ $=1{,}57079632679489$	

Полученная точность более чем достаточна для самых ответственных вычислений, но если возникнет необходимость, то процесс уточнения по формуле Ньютона можно продолжить. При этом в данном случае число значащих цифр в каждом шаге примерно удваивается.

Исторически число π было введено как отношение длины окружности C к ее диаметру D еще до возникновения тригонометрии.

Для обозначения этой величины Эйлер и предложил в 1737 г. применять букву «пи» (от греческого περίφερεια — окружность)*:

$$\frac{C}{D}=\pi.$$

Первые попытки вычисления этой величины относятся к глубокой древности. С этой целью в окружность вписывали (или описывали) правильный многоугольник, после чего число его сторон удваивали. В пределе (при $n\to\infty$) периметр правильного многоугольника переходит в длину окружности.

Поскольку длина окружности $C=\pi D$ и ее диаметр D несоизмеримы, число π абсолютно точно вычислено быть не может и представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь. Это было строго доказано только в 1882 г. Ф. Линдеманом, который показал, что число π трансцендентно, т. е. оно не может быть корнем какого-либо алгебраического уравнения.

Как уже отмечалось, задача определения длины окружности $C=2\pi R$ и площади круга $S=\pi R^2$ (так называемая «квадратура круга») привлекала к себе внимание с древних времен. Так, у египтян (II тысячелетие до н. э.) $\pi=3{,}1605$, у вавилонян и древних китайцев $\pi=3$, во II веке н. э. Чжан-Хен брал $\pi=\sqrt{10}=3{,}162\ldots$.

* М. В. Чириков и А. П. Юшкевич [44, т. 2, стр. 61] отмечают, что обозначение π впервые (в 1706 г.) ввел английский преподаватель В. Джонс.

Идея вычисления π как общего предела вписанных и описанных правильных многоугольников принадлежит Архимеду (~287 — 212 гг. до н. э.), который получил оценки

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

или

$$3{,}140845\ldots < \pi < 3{,}142857\ldots.$$

Взяв из этих оценок их среднее арифметическое, найдем $\pi \approx 3{,}14185$, т. е. определим π с погрешностью, меньшей чем 0,0003.

Пользуясь методом Архимеда, Франсуа Виета* вычислил 9 знаков π, Романус — 17, а Ван Цейлен — 32. Дальнейшие вычисления требовали огромного труда и поэтому результат Ван Цейлена оставался рекордным, пока для вычисления π не были применены методы дифференциального и интегрального исчисления. Воспользовавшись этими методами, Ньютон сравнительно легко вычислил 14 знаков, а Эйлер — 20, затем при помощи новых формул Мэшин (1706 г.) получил 100 знаков, Рихтер (1855 г.) — 500 и Шенкс (1874 г.) — 707 знаков.

Новые возможности возникли после создания электронных вычислительных машин. В 1945 г. с помощью ЭВМ были проверены вычисления Шенкса (на которые он потратил почти всю жизнь) и оказалось, что у него верны только первые 528 знаков, а все остальные ошибочны.

В 1949 г. число π было вычислено с 2000 знаков, а в 1957 г. — с 10 000 знаков. Интересно отметить, что все цифры в π (если рассматривать достаточно большое их число) встречаются одинаковое число раз, но никакой закономерности в чередовании цифр обнаружить не удалось: они следуют одна за другой совершенно беспорядочно.

Вычисление такого большого количества знаков у π велось, главным образом, из теоретического интереса; для самых же сложных практических расчетов в настоящее время очень редко используют больше чем 10—15 десятичных знаков.

Запомнить первые 12 знаков π легко при помощи двустишия:

«Это я знаю и помню прекрасно,
их многие знаки мне лишни, напрасны».

Записав каждое слово двустишия цифрой, равной числу букв в нем, мы и получим**

$$\pi = 3{,}14159265358....$$

Для многих технических расчетов часто бывает достаточно знать число π с четырьмя десятичными знаками, т. е.

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Переходим к выводу формул приведения, для чего достаточно только воспользоваться значениями (X.122) функций $\sin z$ и $\cos z$ в точке $\frac{\pi}{2}$ и теоремами сложения.

Действительно, положив в формулах (X.101), (X.102) $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = z$ и учтя, что согласно (X.122) $\sin z_1 = 1$, $\cos z_1 = 0$, получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos z + \cos\frac{\pi}{2}\sin z = 1 \cdot \cos z + 0 \cdot \sin z = +\cos z;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos z - \sin\frac{\pi}{2}\sin z = 0 \cdot \cos z - 1 \cdot \sin z = -\sin z.$$

* Ф. Виета также первым представил π в виде бесконечного произведения (см. § 91).

** Можно также воспользоваться двустишием, написанным в старой орфографии:

«Кто и шутя и играя пожелаетъ
ни узнать, число ужъ знаетъ».

Отсюда, в частности, при $z = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0; \quad \cos\pi = -\sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Следовательно, первый положительный нуль функции $\sin z$ равен π, т. е. точно вдвое больше первого положительного нуля косинуса $z^{(0)} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось доказать.

Полагая в (X.101), (X.102) $z_1 = \pi$, $z_2 = z$ и учтя, что теперь $\sin z_1 = 0$, $\cos z_1 = -1$, имеем

$$\sin(\pi + z) = 0 \cdot \cos z + (-1) \cdot \sin z = -\sin z;$$
$$\cos(\pi + z) = -1 \cdot \cos z - 0 \cdot \sin z = -\cos z.$$

В таком случае при $z = \pi$ получаем

$$\sin 2\pi = \sin(\pi + \pi) = -\sin\pi = 0; \quad \cos 2\pi = -\cos\pi = +1.$$

Положив в теоремах сложения $z_1 = 2\pi$, $z_2 = z$ и принимая во внимание, что $\sin z_1 = \sin 2\pi = 0$, $\cos z_1 = 1$, находим

$$\sin(2\pi + z) = 0 \cdot \cos z + 1 \cdot \sin z = \sin z;$$
$$\cos(2\pi + z) = 1 \cdot \cos z - 0 \cdot \sin z = \cos z,$$

откуда, в частности, легко получить формулы (X.103), т. е. снова доказать, что периодом функций $\sin z$ и $\cos z$ является действительное число 2π.

Повторив эти же рассуждения с учетом формул (X.100) для $z_2 = -z$, а затем объединив результаты, мы и приходим к формулам приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = +\cos z; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp\sin z; \qquad \text{(X.123)}$$

$$\sin(\pi \pm z) = \mp\sin z; \quad \cos(\pi \pm z) = -\cos z; \qquad \text{(X.124)}$$

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm z\right) = \pm\cos z; \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm z\right) = \pm\sin z; \qquad \text{(X.125)}$$

$$\sin(2\pi \pm z) = \pm\sin z; \quad \cos(2\pi \pm z) = +\cos z. \qquad \text{(X.126)}$$

Воспользовавшись равенствами (X.105), получаем формулы приведения для функций $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp\operatorname{ctg} z; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp\operatorname{tg} z; \qquad \text{(X.127)}$$

$$\operatorname{tg}(\pi \pm z) = \pm\operatorname{tg} z; \quad \operatorname{ctg}(\pi \pm z) = \pm\operatorname{ctg} z. \qquad \text{(X.128)}$$

Из (X.128) следует, в частности, что периодом функций $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{ctg} z$ является число π.

Формулы приведения позволяют любую тригонометрическую функцию действительного аргумента $z = x$ свести к аргументу $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, что существенно облегчает вычисление значений этих функций.

Пример. Вычислить $\sin z$ и $\cos z$ для $z = 5$ и $z = 10$.

Решение. Для того чтобы более наглядно проиллюстрировать эффективность формул приведения, мы в табл. 115 вычислили значения искомых функций непосредственно при помощи рядов (X.87), (X.88). Все вычисления выполнены по формулам (X.114)—(X.116) при максимальном числе значащих цифр, равном семи. Определив затем отдельно сумму $\sum(+)$ только положительных

и только отрицательных $\sum(-)$ членов рассматриваемых рядов, мы и находим значения искомых функций:

$$w = \cos 5 = 37{,}24680 - 36{,}96313 = +0{,}28367;$$
$$w = \sin 5 = 36{,}62214 - 37{,}58107 = -0{,}95893;$$
$$w = \cos 10 = 5506{,}213 - 5507{,}052 = -0{,}839;$$
$$w = \sin 10 = 5506{,}360 - 5506{,}904 = -0{,}544.$$

Таблица 115

	$z = 5$		$z = 10$		$\alpha = 10 - 3\pi = 0{,}5752220$	
ν	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(z)$	$S_{2\nu+1}(z)$	$C_{2\nu}(\alpha)$	$S_{2\nu+1}(\alpha)$
0	+1,00000	+5,00000	+1,000	+10,000	+1,0000000	+0,5752220
1	−12,50000	−20,83333	−50,000	−166,667	−0,1654402	−0,0317216
2	+26,04166	+26,04166	+416,668	+833,336	+0,0045617	+0,0005248
3	−21,70138	−15,50099	−1388,893	−1984,133	−0,0000503	−0,0000041
4	+9,68812	+5,38229	+2480,166	+2755,740	+0,0000003	
5	−2,69115	−1,22325	−2755,740	−2505,218		
6	+0,50969	+0,19604	+2087,682	+1605,909		
7	−0,07001	−0,02334	−1147,078	−764,719		
8	+0,00729	+0,00214	+477,949	+281,146		
9	−0,00059	−0,00016	−156,192	−82,206		
10	+0,00004	+0,00001	+41,103	+19,573		
11			−8,897	−3,868		
12			+1,612	+0,645		
13			−0,248	−0,092		
14			+0,033	+0,011		
15			−0,004	−0,001		
$\sum(+)$	+37,24680	+36,62214	+5506,213	+5506,360	+1,0045620	+0,5757468
$\sum(-)$	−36,96313	−37,58107	−5507,052	−5506,904	−0,1654905	−0,0317257
$w(z)$	+0,28367	−0,95893	−0,839	−0,544	+0,8390715	+0,5440211

Решим эту же задачу, воспользовавшись предварительно формулами приведения. Тогда, в случае $z = 10 = 3\pi + \alpha$, где $\alpha = 0{,}5752220$; $3\pi = 9{,}4247780$, имеем

$$\sin(3\pi + \alpha) = \sin[2\pi + (\pi + \alpha)] = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -0{,}5440211,$$
$$\cos(3\pi + \alpha) = \cos[2\pi + (\pi + \alpha)] = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}8390715.$$

Вычисление $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам (X.114)—(X.116) выполнено в той же табл. 115.

Итак, при вычислении с семью значащими цифрами в первом случае из-за потери точности, вызванной разностью двух близких величин, мы получили sin 10 и cos 10 только с тремя значащими цифрами, а при втором способе вычислений — с семью, затратив при этом значительно меньше труда.

Упражнения

1. Вывести формулы приведения (X.125) для $z_1 = \frac{3}{2}\pi$.

2. Вычислить $\sin 5$ и $\cos 5$, воспользовавшись предварительно формулами приведения, и результаты сравнить с результатами, приведенными в табл. 115.

3. Вычислить π с восемью значащими цифрами, определив по методу Ньютона первый положительный корень уравнения

$$f(z) = \sin z - \cos z = 0; \quad f'(z) = \cos z + \sin z.$$

§ 135. Графики тригонометрических функций. Составление таблиц

Таблицы тригонометрических функций, как было показано в § 80 гл. VI, можно вычислить субтабулированием, определив предварительно при помощи рядов необходимое число узловых точек. Однако наличие теоремы сложения, которой обладает каждая из тригонометрических функций, позволяет составить их таблицы с меньшей затратой труда.

Воспользуемся для этой цели формулами

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta, \tag{X.129}$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta, \tag{X.130}$$

которые непосредственно вытекают из (X.100)—(X.102).

Отсюда, положив $\alpha = n\beta$, получаем рекуррентные формулы

$$\sin(n+1)\beta = 2\cos\beta\sin n\beta - \sin(n-1)\beta; \tag{X.131}$$
$$\cos(n+1)\beta = 2\cos\beta\cos n\beta - \cos(n-1)\beta; \tag{X.132}$$
$$\sin 0 = 0; \quad \cos 0 = 1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

позволяющие наиболее эффективно вычислить таблицу функций $w = \sin z$, $w = \cos z$ при действительных значениях аргумента $z = x$.

В самом деле, если $\sin\beta$ и $\cos\beta$ известны, то, положив последовательно $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, найдем один за другим синусы и косинусы углов 2β, 3β, 4β, ..., т. е. построим таблицу с шагом $h = \beta$.

Пример 1. По найденным при помощи рядов значениям $\sin 1° = 0{,}01745240$ и $\cos 1° = 0{,}99984769$ составить таблицу значений функций $\sin x$ и $\cos x$ с шагом $h = 1°$.

Решение. Положив в формулах (X.131) и (X.132) $\beta = 1°$; $2\cos\beta = 1{,}99969538$, получаем

$$\sin(n+1)° = 1{,}99969538\sin n° - \sin(n-1)°,$$
$$\cos(n+1)° = 1{,}99969538\cos n° - \cos(n-1)°.$$

Заметим, что эти формулы совпадут, если положить соответственно $w_n = \sin n°$ и $w_n = \cos n°$. Следовательно, для удобства вычислений можно их объединить и представить в виде

$$w_{n+1} = 1{,}99969538 w_n - w_{n-1} = (2 - 0{,}00030462)\, w_n - w_{n-1},$$

или

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} - aw_n, \tag{X.133}$$

где $a = 0{,}00030462$.

По условию задачи при $n = 1$ известны все члены правой части уравнения (X.133), а именно: при $n = 1$ имеем $w_n = \sin 1°$; $w_{n-1} = \sin 0 = 0$ и соответственно $w_n = \cos 1°$, $w_{n-1} = \cos 0 = 1$.

Выполнив все указанные в формуле (X.133) действия, находим

$$\sin 2° = 2 \cdot 0{,}01745240 - 0 - 0{,}00000532 = 0{,}03489948;$$
$$\cos 2° = 2 \cdot 0{,}99984769 - 1 - 0{,}00030457 = 0{,}99939081.$$

Результативные данные $\sin 2°$ и $\cos 2°$, которые были вычислены при $n = 1$, становятся исходными данными при $n = 2$ и дают возможность найти $\sin(2 + 1)° = \sin 3°$ и $\cos(2 + 1)° = \cos 3°$. Увеличивая на единицу n при каждом последующем шаге вычислений, составляем требуемые таблицы.

При этом результативные данные каждого предыдущего шага возвращаются в виде исходных данных для последующего шага, вследствие чего формулы типа (X.133) и получили название *рекуррентных*, как об этом уже говорилось ранее.

Дальнейшие вычисления по формуле (X.133) приведены в табл. 116. Техника вычислений следующая.

Таблица 116

$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} - aw_n;\ a = 0{,}00030462$				
n	$w_n = \sin n°$	aw_n	$w_n = \cos n°$	aw_n
0	0,00000000	—	1,00000000	—
1	0,01745240	532	0,99984769	30457
2	0,03489948	1063	0,99939081	30443
3	0,05233593	1594	0,99862950	30420
4	0,06975644	2125	0,99756399	30388
5	0,08715570	2655	0,99619460	30346
6	0,10452841	3184	0,99452175	30295
7	0,12186928	3712	0,99254595	30235
8	0,13917303	4239	0,99026780	30166
9	0,15643439	4765	0,98768799	30087
10	0,17364810		0,98480731	

Устанавливаем на арифмометре w_n, умножаем его на a и записываем результат (в единицах последнего разряда) в колонке aw_n. Затем гасим результат, но сохраняем установку w_n и умножаем w_n на 2. Отняв от произведения предыдущее значение w_{n-1} и aw_n, получаем w_{n+1}. После этого весь цикл повторяется.

Если мы сравним полученные результаты с точными значениями, то убедимся, что в табл. 116 погрешности накапливаются и все время возрастают; так что для $\cos 10°$, например, погрешность составляет 44 единицы последнего разряда и 8 единиц — для $\sin 10°$.

Для того чтобы избежать этой неприятности, надо брать более точными исходные значения, определяя их при помощи рядов, а все промежуточные вычисления проводить с одним или двумя лишними знаками; это существенно затормозит накопление ошибок округления. Кроме того, при вычислении по рекуррентным формулам обязательно надо заблаговременно найти с требуемой точностью ряд отдельных опорных значений искомой функции; дойдя до этих опорных значений, мы получаем возможность проконтролировать результаты и в случае необходимости внести поправки, взяв опорные значения на последующем этапе вычислений в качестве исходных значений. Так, в рассматриваемом примере при помощи рядов надо вычислить только значения $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 1°, 10°, 20°, 30°$, а все промежуточные значения вычислить по рекуррентным формулам (с двумя лишними знаками), что осуществляется проще, чем по формулам (X.114)—(X.116).

После того как таблица вычислена на сегменте $[0; 30°]$, дальнейшие вычисления удобнее всего вести по формулам

$$\sin(30° + \beta) = \cos\beta - \sin(30° - \beta), \qquad \text{(X.134)}$$

$$\cos(30° + \beta) = \cos(30° - \beta) - \sin\beta, \qquad \text{(X.135)}$$

которые требуют только вычитания двух известных величин.

Упражнение 1. Продублировать табл. 116 с девятью десятичными знаками, взяв необходимые исходные и опорные значения, исходя из точных:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437...; \quad \cos 1^\circ = 0{,}999847695156...;$$
$$\sin 10^\circ = 0{,}173648177666...; \quad \cos 10^\circ = 0{,}984807753012....$$

Это же упражнение выполнить еще раз, проведя все промежуточные вычисления с одним лишним знаком, а затем результаты сравнить между собой и с результатами, выполненными с восемью десятичными знаками в табл. 116. Проследить также, как накапливаются погрешности.

Упражнение 2. Вычислить по рекуррентной формуле (X.133) шестизначную таблицу функций $\sin x$ и $\cos x$ для сегмента $[0; 10^\circ]$ с шагом $h = 0{,}2^\circ$. Исходные значения $\sin 0{,}2^\circ$ и $\cos 0{,}2^\circ$ вычислить при помощи рядов. Значения $\sin x$ и $\cos x$, которые приведены в табл. 116, использовать в качестве опорных.

Пример 2. Вычислить при помощи рядов (X.87), (X.88) с 12 верными знаками $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 10^\circ$ и $x = 30^\circ$.

Решение. В формулах (X.87), (X.88) z суть абстрактное значение аргумента, которое при действительных $z = x$ по определению совпадает с радианной мерой угла. Следовательно, в данном примере надо прежде всего перевести градусную меру угла в радианную, что осуществляется при помощи равенства

$$x = \pi \frac{x^\circ}{180^\circ}, \tag{X.136}$$

где x° — градусная мера угла. В частности, воспользовавшись найденным ранее значением π (X.121), при $x = 10^\circ$ имеем (с 14 значащими цифрами)

$$x = \pi \frac{10^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{18} = 0{,}17453292519943$$

и, соответственно, при $x = 30^\circ$

$$x = \pi \frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52359877559830.$$

Все необходимые вычисления (с двумя запасными знаками), выполненные по формулам (X.114)—(X.116), приведены в табл. 117. Осуществив контроль вычислений при помощи тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и округлив результаты до 12 десятичных знаков, получаем окончательно

$$\sin 10^\circ = 0{,}173648177667; \quad \cos 10^\circ = 0{,}984807753012;$$
$$\sin 30^\circ = 0{,}500000000000; \quad \cos 30^\circ = 0{,}866025403784 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнение 3. По образцу табл. 117 вычислить с той же точностью $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 1^\circ$ и $x = 20^\circ$.

Указание. При вычислении $\sin x$ и $\cos x$ для $x = 1^\circ$ можно воспользоваться результатами из табл. 117, умножив предварительно каждый член $C_{2\nu}(x)$ и $S_{2\nu+1}(x)$ на $(0{,}1)^n$, где $n = 2\nu$ или $n = 2\nu + 1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$.

Переходим к построению графиков тригонометрических функций для действительных значений аргумента $z = x$, а к случаю комплексного аргумента $z = x + iy$ мы вернемся в § 137.

Так как формулы приведения позволяют свести вычисление тригонометрических функций к сегменту $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, то, в принципе, и их графики достаточно построить только для этого сегмента. Действительно, построив на сегменте $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Таблица 117

	$x = 10° = 0{,}17453292519943$ радиан		$x = 30° = 0{,}52359877559830$ радиан	
ν	$C_{2\nu}(x)$	$S_{2\nu+1}(x)$	$C_{2\nu}(x)$	$S_{2\nu+1}(x)$
0	+1,00000000000000	+0,17453292519943	+1,00000000000000	+0,52359877559830
1	−0,01523087098934	−0,00886096155570	−0,13707783890402	−0,02392459620394
2	+0,00003866323852	+0,00000134960162	+0,00313172231977	+0,00032795319443
3	−0,00000003925832	−0,00000000097884	−0,00002861931518	−0,00000214071977
4	+0,00000000002136	+0,00000000000041	+0,00000014010978	+0,00000000815126
5	−0,00000000000001		−0,00000000042680	−0,00000000002032
6			+0,00000000000089	+0,00000000000004
$\Sigma =$	0,98480775301221	0,17364817766692	0,86602540378444	0,50000000000000
$\{\Sigma\}^2 =$	0,96984631039296	0,03015368960704	0,75000000000000	0,25000000000000
Контроль: $\cos^2 x + \sin^2 x =$	1,00000000000000		1,00000000000000	

четверть волны синусоиды и отразив затем в прямой $y = \frac{\pi}{2}$, параллельной оси ординат, как в зеркале график функции $f(x) = \sin x$, мы согласно формуле

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

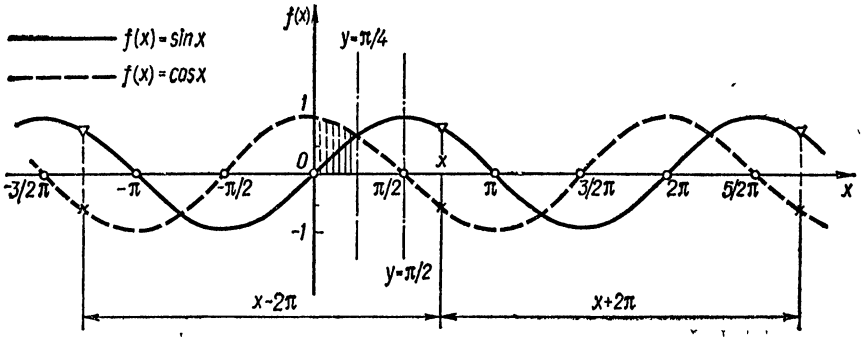


Рис. 276.

распространим этот график на сегмент $[0; \pi]$. Точка $x = \pi$ является нулем функции $\sin x$ и одновременно центром симметрии ее графика. Поэтому, отразив полуволну синусоиды в точке $x = \pi$, получим ее полную волну (рис. 276). Воспользовавшись затем периодичностью функции $\sin x$, т. е. формулой (X.103), мы можем эту волну продолжить в положительном или отрицательном направлении как угодно далеко. Для большей наглядности на рис. 276 при помощи треугольничков (и крестиков для функции $f(x) = \cos x$) показано, что в результате сдвига аргумента на величину $\pm 2\pi$ значение функции остается неизменным.

График функции $f(x) = \cos x$ строим вполне аналогично. Более того, если воспользоваться формулами

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

то исходный сегмент $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ можно сократить еще в два раза. На сегменте $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ графики функций $\sin x$ и $\cos x$ строим по точкам, причем необходимое количество точек легко вычислить по формулам (X.114)—(X.116), так как ряды (X.87), (X.88) сходятся тем быстрее, чем меньше по абсолютной величине аргумент $z = x$.

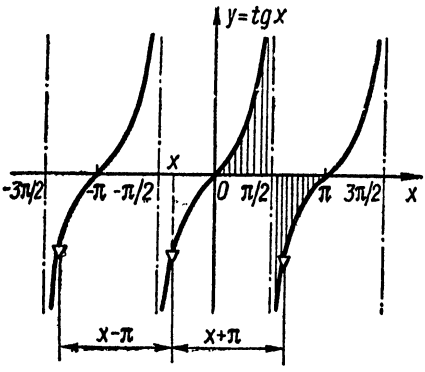


Рис. 277.

Нули функций $\sin x$ и $\cos x$, которые были уже определены в п. 6 § 132, на рис. 276 отмечены кружочками. При этом, поскольку и $\sin x$ и $\cos x$ удовлетворяют уравнению (X.82), их нули одновременно являются точками перегиба.

Далее, нулям $\sin x$ соответствуют экстремальные точки функции $f(x) = \cos x$, и наоборот, так как

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Экстремальные значения функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ (для действительных значений аргумента $z = x$) равны ± 1.

Функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ определены при всех действительных значениях $z = x$, причем их графиками являются сплошные кривые (без разрывов), т. е. функции $\sin x$ и $\cos x$ непрерывны *.

График функции $f(x) = \operatorname{tg} x$, представленный на рис. 277, проще всего построить исходя из формулы (X.105)

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

которой была определена функция тангенс.

График функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ называют *тангенсоидой*.

При действительных значениях аргумента $z = x$ функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2}(2n + 1)$, т. е. на промежутках

$$\frac{\pi}{2}(2n - 1) < x < \frac{\pi}{2}(2n + 1).$$

Точки

$$x = \frac{\pi}{2}(2\pi + 1), \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots, \tag{X.137}$$

в которых $\cos x = 0$, $\sin x \neq 0$, являются полюсами функции $\operatorname{tg} x$; в этих точках $\operatorname{tg} x = \pm\infty$, т. е. тангенсоида терпит разрыв непрерывности. Таким образом, функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ не является непрерывной.

Из других свойств тангенсоиды отметим следующие:

1. Функция $\operatorname{tg} x$ — нечетная и ее график симметричный относительно начала координат.

2. Функция $\operatorname{tg} x$ неограниченная, наибольшего и наименьшего значения не имеет.

3. Нули $\operatorname{tg} x$ совпадают с нулями $\sin x$, т. е.

$$\operatorname{tg} x = 0, \text{ если } x = n\pi, \ n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots, \tag{X.138}$$

так как в этих точках $\cos x = \pm 1 \neq 0$.

* Строгое определение и доказательство непрерывности функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ рассматриваются в более полных курсах высшей математики.

4. Функция $\operatorname{tg} x$ везде, где она определена, возрастает.

5. Функция $\operatorname{tg} x$ периодическая и ее периодом является действительное число π, поскольку

$$\operatorname{tg}(x+n\pi)=\frac{\sin(x+n\pi)}{\cos(x+n\pi)}=\frac{(-1)^n\sin x}{(-1)^n\cos x}=\operatorname{tg} x. \qquad (X.139)$$

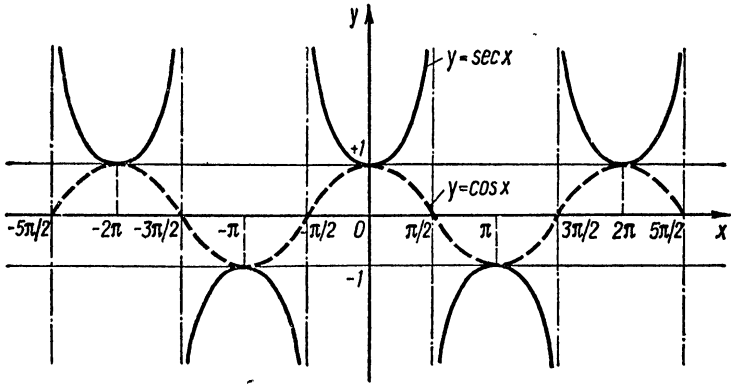


Рис. 278.

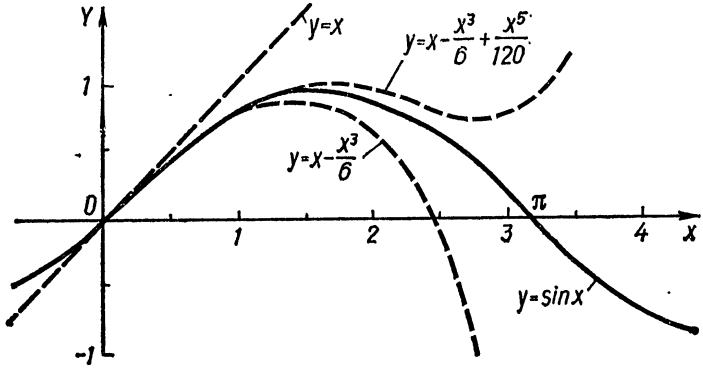


Рис. 279.

График функции $f(x)=\sec x$ проще всего получить из графика косинусоиды, пользуясь зависимостью (X.105):

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}.$$

Значения $\sec x$ для аргументов x будут обратными функции $\cos x$ для тех же аргументов. График функции $f(x)=\sec x$ приведен на рис. 278, на котором также пунктиром показана косинусоида.

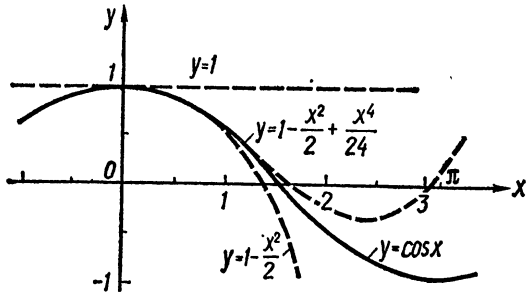


Рис. 280.

Основные свойства функции $\sec x$ читателю полезно вывести самостоятельно, обратив при этом внимание на тот факт, что функция $f(x)=\sec x$ нулей вообще не имеет (как при действительных, так и при комплексных значениях аргумента $z=x+iy$).

Упражнение 4. Построить графики функций $f(x) = \operatorname{ctg} x$ и $f(x) = \operatorname{cosec} x$, воспользовавшись соответствующими формулами (X.105).

В заключение параграфа на рис. 279 и 280 проиллюстрировано, как функции $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ аппроксимируются полиномами, которые получим, оборвав ряды (X.87) и (X.88) соответственно на первом, втором или третьем членах.

§ 136. Геодезическая съемка. Триангуляция

Из всех многочисленных приложений тригонометрии мы остановимся только на геодезической съемке и триангуляции, так как эти вопросы в учебной литературе почти не освещаются. Более подробно вопросы приложений тригонометрии изложены в [106], откуда мы заимствовали данный параграф, и в [132], где приведена и дальнейшая литература.

Снять план данной местности — это значит построить на бумаге фигуру, подобную фигуре, образованной точками местности.

Масштабом плана называется отношение размеров на плане к размерам в натуре.

Для того чтобы осуществить съемку плана, которая называется также *геодезической съемкой*, на данной местности выбирают систему природных или специально созданных опорных точек. Мысленно соединив эти точки между собой, всю местность подразделяют на треугольники, но так, чтобы из каждой опорной точки системы были видны все соседние точки, а из любой точки местности — все три вершины треугольника, к которому эта точка принадлежит.

Основой геодезической съемки является *триангуляция местности* (от латинского *triangulum* — треугольник), т. е. подразделение местности на систему треугольников и последующее их решение.

При дальнейшем изложении этого вопроса мы ограничимся случаем, когда все выбранные точки лежат в одной плоскости.

Вместо измерения отрезков на местности легче и точнее (пользуясь оптическими приборами) измерять углы, а по найденным углам вычислять искомые длины отрезков. Однако в системе треугольников необходимо измерить хотя бы одну сторону, так называемый *базис*. От точности измерения базиса будет зависеть точность всех последующих вычислений. Вершины треугольников закрепляются на местности деревянными или металлическими вышками от 6 до 55 *м* и заглубленными в грунт выполненными из гранита геодезическими центрами, на которых при помощи высеченного креста отмечена заданная точка.

Базис измеряют с точностью до 10^{-3}, 10^{-4}, а в отдельных случаях и до 10^{-6} (т. е. 1 километр измеряется с точностью до $\frac{1}{10}$ миллиметра). Применение для этих целей лазеров может еще более повысить точность измерения базиса.

Для того чтобы свести к минимуму погрешности при дальнейших вычислениях, треугольники строят по возможности более близкими к равносторонним, избегая малых углов (обычно меньше 35—40°).

С другой стороны, при вычерчивании плана легче и точнее откладывать отрезки, чем углы, которые приходится строить при помощи транспортира — инструмента довольно несовершенного.

При съемке планов в основном встречаются следующие задачи:

1. Найти высоту доступного или недоступного предмета.
2. Найти расстояние между двумя доступными или недоступными точками.
3. По трем заданным точкам A, B, C, нанесенным на карте, найти на той же карте положение точки M, зная, что из точки M отрезки AB и AC видны под углами β и α.

Первые две задачи являются элементарными и читателю не представит большого труда решить их самостоятельно. Поэтому мы остановимся только на третьей задаче, которую называют *картографической*.

Наиболее точно точку M можно построить (определив предварительно расстояния MA, MB, MC), как точку пересечения трех окружностей с центрами в A, B и C. Собственно говоря, для построения точки M достаточно пересечения двух окружностей, однако третью окружность следует строить для контроля.

В треугольнике ABC (рис. 281) известны все шесть элементов. Следовательно, зная углы

$$x = \angle MCA \text{ и } y = \angle MBA,$$

найдем искомые отрезки из треугольников ABM и ACM.

Для определения углов x и y составим два уравнения. Во-первых, имеем

$$(x + \alpha) + (y + \beta) + A = 360°,$$

откуда

$$\frac{x+y}{2} = 180° - \frac{A+\beta+\alpha}{2}. \qquad \text{(X.140)}$$

Во-вторых, согласно теореме синусов можем написать

$$\frac{\sin x}{AM} = \frac{\sin\alpha}{b}; \quad \frac{\sin y}{AM} = \frac{\sin\beta}{c},$$

откуда находим

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{c\sin\alpha - b\sin\beta}{c\sin\alpha + b\sin\beta}.$$

Далее, воспользовавшись равенством

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{c\sin\alpha - b\sin\beta}{c\sin\alpha + b\sin\beta} \cdot \operatorname{tg}\frac{A+\alpha+\beta}{2}, \qquad \text{(X.141)}$$

определяем угол $\frac{x-y}{2}$, а затем, присоединив сюда уравнение (X.140), вычисляем углы x и y.

Условие возможности задачи: $A + \alpha + \beta < 360°$.

Метод триангуляции местности с успехом был применен для определения длины меридиана Земли и тем самым для определения радиуса Земли.

Математически правильная идея измерения радиуса Земли восходит к древнегреческому ученому Эратосфену (276—196 гг. до н. э.), затем этой задачей занимались арабы, причем ал Хорезми примерно в 815—820 гг. получил исключительно точные для своего времени результаты (см. § 91). Однако первую научно обоснованную триангуляцию выполнил в 1615—1617 гг. голландский ученый Виллеброрд Снеллиус (Willebrord Snellius, или Snell van Royen, 1581—1626) *. Он провел так называемое *градусное измерение*, т. е. измерил расстояние между городами Алкмаром и Бергеном, которые лежат на одном меридиане. Для этого была построена сетка из 32 треугольников, которые охватывали линию Алкмар — Берген, длиною свыше 100 *км*. Измерив углы во всех треугольниках и базис в одном из них, Снеллиус нашел, что один градус дуги меридиана равняется 28 500 голландских рут, что равно 107,2 *км*. Это немного меньше принятого теперь значения: 1° земного меридиана ≈ 111,3 *км*.

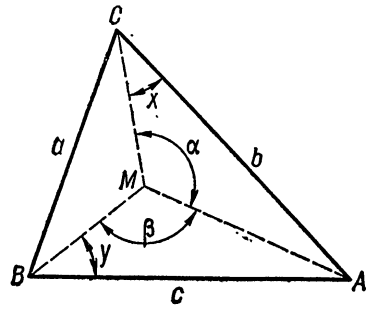


Рис. 281

К наиболее точным измерениям дуги меридиана надо отнести триангуляцию, выполненную всемирно известным русским астрономом и геодезистом В. Я. Струве.

Василий Яковлевич Струве (1793—1864), академик Петербургской академии наук (с 1832 г.), член многих иностранных академий и научных обществ. Окончил Дерптский (теперь Тартуский) университет по курсу филологии (в 1810 г.).

* Снеллиус был не только астрочомом и геодезистом, но также математиком и физиком. В частности, он независимо от Декарта и ранее его установил закон преломления света, носящий его имя. Ряд работ Снеллиуса относится к плоской и сферической тригонометрии.

Василий Яковлевич Струве.

С 1813 г. — профессор математики и астрономии Дерптского университета, в 1818—1838 гг. — директор астрономической обсерватории университета. В. Я. Струве принимал активное участие в создании Пулковской обсерватории и был ее первым директором (1839—1862). Ему принадлежат широкие исследования по определению звездного параллакса, а также постоянных аберрации, нутации и прецессии. Струве установил существование межзвездного поглощения света, увеличения плотности звезд с приближением к плоскости Млечного пути. В 1822—1827 гг. он провел в Прибалтике свое первое градусное измерение дуги меридиана длиною 3° 25′.

Под руководством и при непосредственном участии В. Я. Струве была измерена огромная дуга Земного меридиана в 25° 20′ 8″. Эта дуга начиналась в устье Дуная, вблизи города Измаила (село Старо-Некрасовка, широта 45° 20′ 3″), и заканчивалась на берегу Ледовитого океана в Норвегии (город Фугленес, широта 70° 40′ 11″), имея протяженность свыше 2800 *км*.

Вдоль дуги была построена триангуляционная сеть из 258 треугольников при 10 базисах (дополнительные базисы измерялись для промежуточного контроля). Вся работа продолжалась (с небольшим перерывом) с 1816 по 1851 г. Выполненные при этом вычисления и описание работы изложены в двухтомном труде «Дуга меридиана между Дунаем и Ледовитым океаном».

Для того чтобы выяснить форму Земли, было выполнено еще 8 больших триангуляций вдоль меридианов в разных частях земного шара (точнее, эллипсоида вращения) и более 10 триангуляций вдоль параллелей. На основе этих работ, которые одна экспедиция выполняла бы свыше 200 лет, Международная геодезическая ассоциация в 1924 г. вывела два числа:

радиус земного экватора $R = 6378388 \pm 53$ *м*;

сжатие земного эллипсоида $\alpha = 1 : 297$.

Небольшой участок триангуляции Струве схематически изображен на рис. 282.

Упражнение 1. Найти расстояние между населенными пунктами L и K, приняв в качестве базиса расстояние EG, равное 21 *км*.

В дальнейшем на основе градусных измерений, выполненных в СССР, Западной Европе и США, эти цифры были уточнены и сейчас *геоид* в первом приближении отождествляют с эллипсоидом вращения с большой полуосью равной 6378245 *м* и с полярным сжатием 1 : 298,3.

Этот эллипсоид постановлением Совета Министров СССР от 7 апреля 1946 г. назван *эллипсоидом Красовского*, в честь члена-корреспондента АН СССР Феодосия Николаевича Красовского (1878—1948), по инициативе и под руководством которого была проведена большая работа по определению элементов нашей планеты Земля.

В настоящее время эллипсоид Красовского применяют в СССР и в странах народной демократии при всех градусных и картографических работах вместо *эллипсоида Бесселя*, элементы которого недостаточно точны.

В заключение параграфа приведем еще описание того, как изготовить простейшие угломерные приборы, с помощью которых можно выполнить ряд полезных упражнений по измерению на местности.

Для измерения углов в вертикальной плоскости легко изготовить самодельный прибор, воспользовавшись транспортиром. Для этого в точке A (рис. 283) пробиваем шилом круглое отверстие диаметром 1,0—1,5 *мм*. В точке B прикрепляем суровую нитку с грузиком и сгибаем планку транспортира вдоль пунктирных линий так, чтобы получить прибор, изображенный на том же рис. 283.

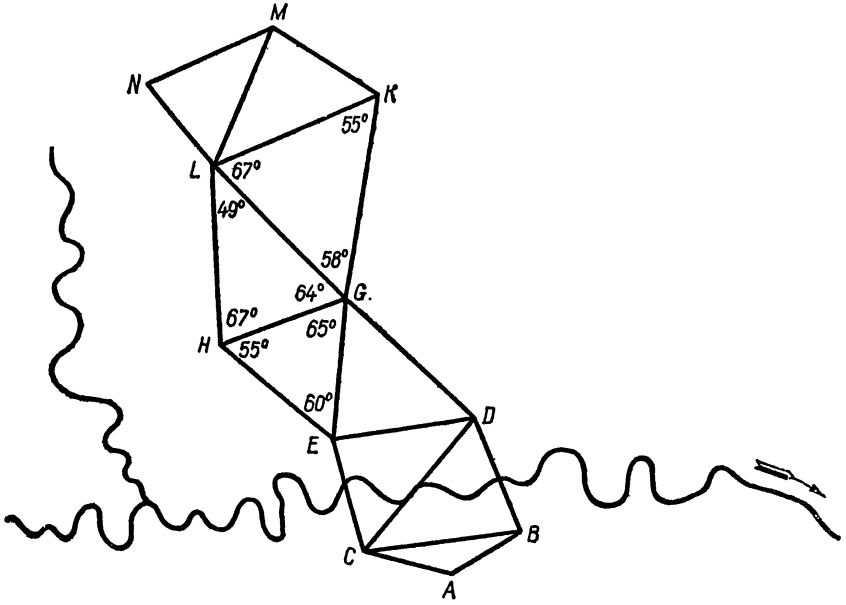


Рис. 282.

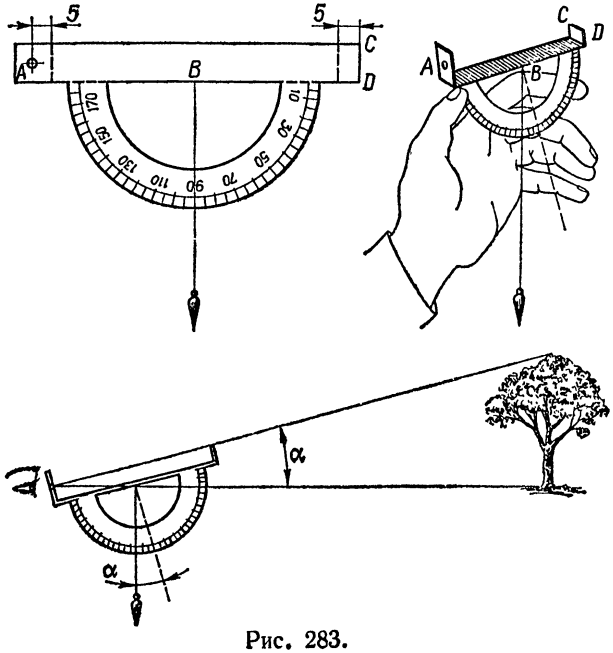


Рис. 283.

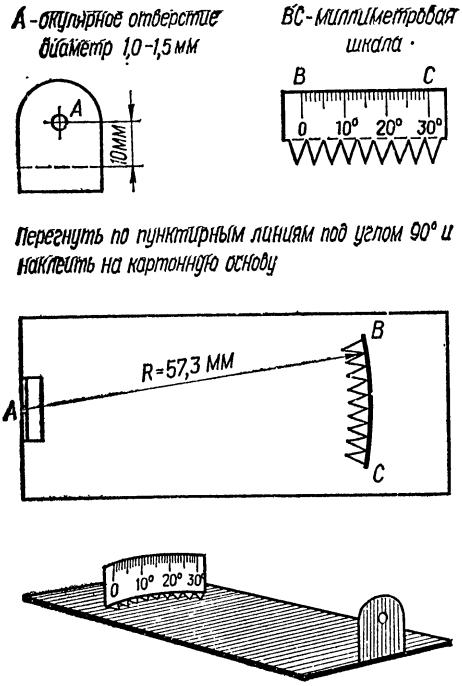


Рис. 284.

Для того чтобы измерить угол, необходимо, воспользовавшись окулярным отверстием A и горизонтальной линией CD, нацелиться на вершину предмета, а потом, слегка повернув прибор вокруг его продольной оси (при этом трение нитки о край транспортира надежно зафиксирует ее положение), прочитать величину измеренного угла.

Для измерений углов в произвольной плоскости служит прибор, изображенный на рис. 284. На плотном картоне проводим радиусом $R = \frac{180}{\pi} \approx 57{,}3$ *мм* небольшую дугу BC. Тогда для этой окружности центральный угол, который опирается на дугу в 1 *мм*, равняется углу в 1°.

Для того чтобы измерить на местности угол между точками D и E, совмещаем (глядя через окулярное отверстие A) точку D с нулем шкалы, после чего против точки E читаем результат измерений непосредственно в градусах.

Упражнения

2. Найти расстояние между точками A и C, которые лежат на противоположных берегах реки, если в треугольнике ABC базис $BC = a = 10$ *м*, угол $C = 90°$, а угол $B = 68°$ (рис. 285).

3. Определить высоту Московского университета, самого высокого универси-

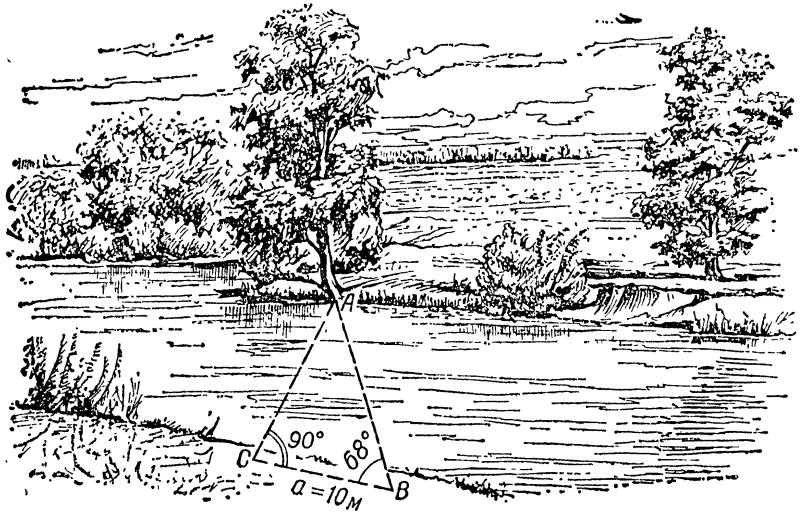


Рис. 285.

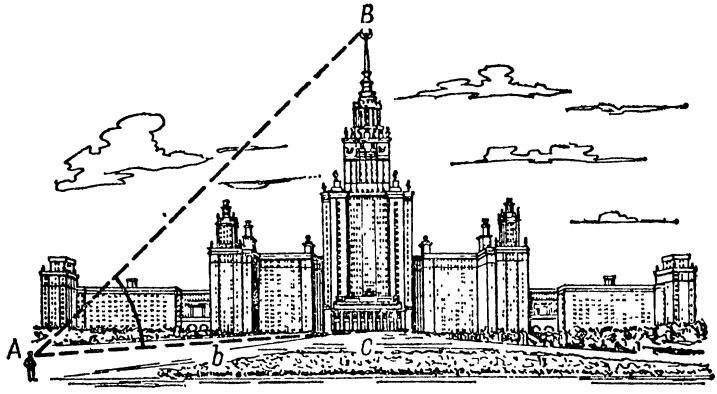


Рис. 286.

тетского здания в мире, найдя при помощи измерения, что базис $AC = b = 138{,}5$ м и угол зрения $A = 60°$ (рис. 286).

4. Пользуясь самодельными угломерными приборами, выполнить геодезическую съемку небольшого участка местности.

§ 137. Гиперболические функции и их связь с показательной и тригонометрическими функциями

Определим гиперболические функции $w = \operatorname{sh} z$ и $w = \operatorname{ch} z$ как фундаментальные решения уравнения

$$w'' = w, \tag{X.142}$$

которые определяются начальными условиями

$w(0) = 0$; $w'(0) = 1$ и, соответственно, $w(0) = 1$; $w'(0) = 0$.

Рекуррентной формулой для уравнения (X.142) будет

$$c_{n+2} = c_n, \tag{X.143}$$

а в таком случае, повторив рассуждения § 132, находим, что гиперболические функции определяются рядами

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} + \cdots, \tag{X.144}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} + \cdots, \tag{X.145}$$

радиус сходимости которых $R = \infty$.

Дифференцируя эти формулы, сразу же находим

$$(\operatorname{sh} z)' = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \operatorname{ch} z, \tag{X.146}$$

$$(\operatorname{ch} z)' = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^6}{5!} + \cdots = \operatorname{sh} z. \tag{X.147}$$

Воспользовавшись рядами

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots,$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^5}{5!} + \dots$$

и взяв полусумму и полуразность этих выражений, получаем формулы

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \tag{X.148}$$

устанавливающие связь между гиперболическими функциями и функцией экспоненциальной. При действительных значениях аргумента $z = x$ формулы (X.148) тождественно совпадают с формулами (V.62) и (V.63) § 65.

Далее непосредственно из формул (X.144), (X.145), (X.148) (вполне аналогично тому, как это было сделано для круговых функций) вытекает основное тождество

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \tag{X.149}$$

свойство четности и нечетности

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z \tag{X.150}$$

и периодичность с чисто мнимым периодом $2\pi i$

$$\operatorname{sh}(z + 2n\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z + 2n\pi i) = \operatorname{ch} z, \quad n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \dots. \tag{X.151}$$

Заменяя в (X.148) z на iz и воспользовавшись формулами Эйлера (X.92), (X.93), устанавливаем связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} iz &= i \sin z, & \operatorname{ch} iz &= \cos z, \\ \sin iz &= i \operatorname{sh} z, & \cos iz &= \operatorname{ch} z. \end{aligned} \tag{X.152}$$

Формулы (X.152) позволяют все результаты, установленные для тригонометрических функций, легко перенести на случай гиперболических функций.

Например, заменяя в формулах (X.101), (X.102) z_1 на iz_1 и z_2 на iz_2, имеем

$$\sin[i(z_1 + z_2)] = \sin iz_1 \cos iz_2 + \cos iz_1 \sin iz_2,$$

$$\cos[i(z_1 + z_2)] = \cos iz_1 \cos iz_2 - \sin iz_1 \sin iz_2.$$

Воспользовавшись теперь формулами (X.152), получаем

$$i \operatorname{sh}(z_1 + z_2) = i \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + i \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 - i^2 \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Сократив первое равенство на i и учтя, что $i^2 = -1$, получаем теоремы сложения для функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$:

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2. \tag{X.153}$$

В качестве упражнения читатель легко может вывести формулы двойного и половинного аргумента для функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.

Из формул (X.152) также следует, что

$$\operatorname{sh} z = 0 \text{ при } z = \pi n i, \text{ где } n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots \tag{X.154}$$

и

$$\operatorname{ch} z = 0 \quad \text{при} \quad z = \frac{\pi}{2}(2n+1)i, \quad \text{где} \quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2,\ \ldots,$$

т. е. все нули функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ расположены на мнимой оси, в том числе и точка $z = 0$, которая также является нулем функции $\operatorname{sh} z$.

Определим действительную и мнимую части тригонометрических и гиперболических функций.

Воспользовавшись теоремами сложения и формулами (X.152), имеем

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,\\
\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,\\
\operatorname{sh} z &= \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y,\\
\operatorname{ch} z &= \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.
\end{aligned} \tag{X.155}$$

Таким образом, функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ от комплексного аргумента $z = x + iy$ выражаются комплексными числами, которые определяются при помощи тригонометрических и гиперболических функций действительного аргумента.

Пример. Вычислить $\sin(1{,}3 + 0{,}5i)$ и $\cos(1{,}3 + 0{,}5i)$.

По таблицам I и II приложения находим

$$\begin{aligned}
&\sin 1{,}3 = 0{,}963558; \qquad &&\operatorname{sh} 0{,}5 = 0{,}521095;\\
&\cos 1{,}3 = 0{,}267499; \qquad &&\operatorname{ch} 0{,}5 = 1{,}127626,
\end{aligned}$$

и по формулам (X.155) вычисляем

$$\begin{aligned}
\sin(1{,}3 + 0{,}5i) &= 1{,}086533 + 0{,}139392i;\\
\cos(1{,}3 + 0{,}5i) &= 0{,}301639 - 0{,}502105i.
\end{aligned}$$

Можно эти же вычисления проводить и непосредственно с комплексными числами при помощи рядов, которыми определяются функции $\sin z$, $\cos z$, однако это приведет к значительно большему объему вычислений.

Кроме функций $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ еще получили распространение функции $\operatorname{th} z$ — *гиперболический тангенс* и $\operatorname{cth} z$ — *гиперболический котангенс*, которые определяются формулами

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = -i \operatorname{tg} iz,\\
\operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{\operatorname{th} z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = i \operatorname{ctg} iz.
\end{aligned} \tag{X.156}$$

Графики гиперболических функций для действительного аргумента $z = x$ были рассмотрены в § 65 (рис. 174), а более подробные сведения о гиперболических функциях можно найти в книге [163].

Отметим еще, что в теории функций комплексного переменного тригонометрические и гиперболические функции, по сути, теряют право на самостоятельное существование, так как они являются весьма простыми рациональными функциями от показательной функции e^z.

Их самостоятельное существование обусловлено тем, что исторически эти функции возникли и изучались вначале только для действительных значений аргумента, а в области действительных аргументов между ними нет никакой связи.

§ 138. Логарифмическая функция

Логарифмической функцией от комплексного переменного $z = x + iy$ называется функция, обратная к показательной, т. е. функция w, которая определяется уравнением

$$e^w = z \qquad (z \neq 0). \tag{X.157}$$

Значение $z = 0$ из рассмотрения исключается, так как функция e^w никогда не принимает значения нуль.

Обозначается логарифмическая функция символом

$$w = \operatorname{Log} z. \tag{X.158}$$

Определим действительную и мнимую части функции $\operatorname{Log} z$.

Положим

$$w = u + iv,$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad (-\pi < \varphi \leqslant \pi).$$

Тогда из (X.157), воспользовавшись теоремой сложения для показательной функции, имеем

$$e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi}.$$

Сравнивая модули и аргументы правых и левых частей полученного комплексного равенства, находим

$$e^u = r, \qquad \text{т. е.} \quad u = \ln r,$$

и

$$v = \varphi + 2n\pi,$$

где $\ln r$ — натуральный (неперов) логарифм положительного числа r.

Таким образом,

$$w = \ln r + i(\varphi + 2n\pi), \qquad n = 0; \quad \pm 1; \quad \pm 2; \ldots, \tag{X.159}$$

или, вводя обычные обозначения для модуля и аргумента комплексного числа, получим

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z. \tag{X.160}$$

Логарифм (как функция комплексного переменного некоторого числа $z = x + iy$) есть бесконечнозначная функция, действительная часть которой определяется однозначно и равна натуральному логарифму его модуля, а мнимая, — равная аргументу числа, — определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Такое понимание логарифма принадлежит Эйлеру; он изложил его в работе 1749 г.: «О споре между Бернулли и Лейбницем о логарифмах отрицательных и мнимых чисел».

Пример. Определить логарифм числа* $z = 4 - 3i$.

Решение. В данном случае $x = +4$, $y = -3$, следовательно,

$$r = |z| = +\sqrt{x^2 + y^2} = 5; \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{4}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-0\ 75) = 2{,}49809 \text{ рад};$$

$$\ln|z| = 1{,}60944; \qquad \operatorname{Arg} z = 2{,}49809 + 2n\pi,$$

Для точных вычислений построены специальные таблицы [137]. При вычислениях с меньшим числом знаков (как это обычно и встречается на практике) можно пользоваться любыми таблицами натуральных логарифмов и таблицами функций $\operatorname{arctg} x$ или $\operatorname{tg} x$.

так что

$$\operatorname{Log}(4-3i) = 1{,}60944 + i\,(2{,}49809 + 2n\pi), \qquad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots .$$

Отметим особо важные частные случаи.

1. z — положительное число: $z = x$, $x > 0$, $y = 0$.
Тогда $|z| = x$; $\operatorname{tg}\varphi = 0$; $\varphi = 0$; $\operatorname{Arg} z = 2n\pi$ и

$$\operatorname{Log} x = \ln x + 2n\pi i, \qquad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots ,$$

т. е. $\operatorname{Log} x$ имеет бесконечное множество значений:

$$\ldots ,\ \ln x - 4\pi i,\ \ln x - 2\pi i,\ \ln x,\ \ln x + 2\pi i,\ \ln x + 4\pi i,\ \ldots ,$$

но только одно из них (при $n = 0$) действительное: именно то значение $\ln x$, которое известно из элементарной алгебры.

2. z — отрицательное число: $z = x$, $x < 0$, $y = 0$. Тогда $|z| = -x$; $\operatorname{tg}\varphi = -0$; $\varphi = \pi$; $\operatorname{Arg} z = (2n+1)\pi$ и для $\operatorname{Log} z$ получаем следующие значения:

$$\ldots ,\ \ln(-x) - 3\pi i,\ \ln(-x) - \pi i,$$
$$\ln(-x) + \pi i,\ \ln(-x) + 3\pi i,\ \ldots$$
$$(-x > 0).$$

Значений $\operatorname{Log} z$ и в этом случае будет бесконечное множество, но среди них нет ни одного действительного, в силу чего в элементарной алгебре и утверждают, что отрицательные числа не имеют логарифмов.

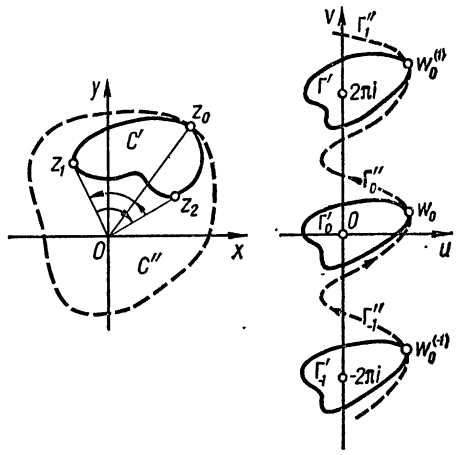


Рис. 287.

3. Модуль числа z равен единице: $|z| = 1$. Тогда $\ln|z| = 0$ и

$$\operatorname{Log} z = i \operatorname{Arg} z,$$

т. е. все значения логарифма чисто мнимые.

Многозначность функции $\operatorname{Log} z$ есть следствие того, что e^w суть периодическая функция.

Действительно, поскольку

$$e^{w+2n\pi i} = e^w,$$

то уравнение $e^w = z$ должно иметь бесконечное число корней $w_0 + 2n\pi i$, где w_0 — одно из решений этого уравнения.

Значение логарифма, которое получают из (X.159) при $n = 0$, называют *главным значением* и обозначают его

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\pi < \arg z \leqslant \pi. \tag{X.161}$$

Тогда

$$\operatorname{Log} z = \ln z + 2n\pi i \qquad (n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots). \tag{X.162}$$

Рассмотрим подробнее вопрос о связи между различными значениями функции $\operatorname{Log} z$.

Предположим, что точка z, начиная от положения z_0, описывает некоторую замкнутую кривую C, не имеющую точек самопересечения.

Каждому значению z соответствует бесконечное число значений функции $\operatorname{Log} z$, которые при непрерывном изменении z также изменяются непрерывно и опишут в плоскости $w = u + iv = \operatorname{Log} z$ кривые $\ldots\ \Gamma_{-2}, \Gamma_{-1}, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$.

Если кривая C' (рис. 287) не содержит внутри себя точку $z = 0$, то $\arg z$, изменяясь непрерывно вдоль C' и достигнув в точках z_1 и z_2 наибольшего и наимень-

шего значений, после завершения полного оборота вернется к своей первоначальной величине $\arg z_0$, совершив лишь маятникообразное движение. Следовательно, главное значение $\ln z$ опишет некоторую замкнутую кривую Γ_0' (так как начальное и конечное значения $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ будут совпадать), все же остальные значения $\operatorname{Log} z = \ln z + 2n\pi i$ опишут кривые Γ_n', отличающиеся от Γ_0' лишь сдвигом на постоянный вектор $2n\pi i$, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots$ (рис. 287, сплошные линии).

Если же кривая C'' будет содержать внутри себя точку $z = 0$, то при полном ее обходе модуль $r = |z|$, как и в первом случае, примет свое первоначальное значение, но $\operatorname{Arg} z$ не вернется к значению $\arg z_0$, а получит приращение 2π; следовательно, каждое значение $\operatorname{Log} z$ увеличится на $2\pi i$, т. е. перейдет в следующее значение (рис. 287, пунктирные линии).

Учитывая такой непрерывный переход одного значения $\operatorname{Log} z$ в другое при обходе начала координат $z = 0$, все эти значения рассматриваются как различные ветви одной бесконечнозначной функции $\operatorname{Log} z$. Точка $z = 0$, в которой как бы соединяются все ветви $\operatorname{Log} z$, называется *точкой разветвления* (бесконечного порядка) этой функции.

На плоскости с разрезом, идущим из точки $z = 0$ (например, вдоль отрицательной половины действительной оси), который исключает возможность полного обхода точки $z = 0$, каждое значение $\operatorname{Log} z$ будет непрерывной однозначной функцией; такой же будет каждая ветвь и во всякой односвязной области, которая не содержит нулевой точки.

Во всякой такой области каждая ветвь $\operatorname{Log} z$ будет функцией регулярной.

Взяв одно из значений $\operatorname{Log} z$, согласно теореме о производной обратной функции (§ 127) и равенству (X.49), найдем прозводную функции $\operatorname{Log} z = w$ $(e^w = z)$:

$$w' = (\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \qquad \text{(X.163)}$$

Заметим, что производная будет одна и та же для всех ветвей $\operatorname{Log} z$.

Таким образом, $\operatorname{Log} z$ есть бесконечнозначная аналитическая функция на всей открытой плоскости z, регулярная во всех точках, кроме точки $z = 0$.

Основные свойства логарифмической функции выражаются равенствами

$$\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2,$$

$$\operatorname{Log}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2,$$

$$\operatorname{Log} z^m = m \operatorname{Log} z. \qquad \text{(X.164)}$$

Докажем первое из этих равенств, так как остальные являются его следствием.

Для двух каких-либо значений

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ и } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

имеем

$$\operatorname{Log} z_1 = \ln r_1 + i(\varphi_1 + 2n_1\pi), \quad \operatorname{Log} z_2 = \ln r_2 + i(\varphi_2 + 2n_2\pi).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 = \ln(r_1 \cdot r_2) + i[(\varphi_1 + \varphi_2) + 2(n_1 + n_2)\pi] = \operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2),$$

так как

$$(z_1 \cdot z_2) = (r_1 \cdot r_2)[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

В связи с бесконечнозначностью функции $\operatorname{Log} z$ это равенство надо понимать в том смысле, что сумма некоторого значения $\operatorname{Log} z_1$ и некоторого значения $\operatorname{Log} z_2$ равняется одному из значений $\operatorname{Log}(z_1 \cdot z_2)$.

Для главных значений $\ln z$ равенства (X.164) имеют обычный однозначный смысл.

Переход от равенства вида

$$z_1 = z_2$$

к равенству

$$\operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} z_2$$

называется *логарифмированием равенства* $z_1 = z_2$.

Логарифмируя равенство вида

$$e^{z_1} = e^{z_2},$$

результат в связи с многозначностью функции $\operatorname{Log} z$ следует записывать в виде

$$z_1 = z_2 + 2n\pi i.$$

§ 139. Общая степенная и общая показательная функции

Общая степенная функция комплексной переменной z^α, где α есть произвольное комплексное (в частности, действительное) число, определяется при помощи показательной и степенной функции следующим образом:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}. \tag{X.165}$$

В связи с тем, что $\operatorname{Log} z = \ln z + 2k\pi i$ — бесконечнозначная функция, общая степенная функция, вообще говоря, будет также иметь бесконечное количество значений:

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)} = e^{\alpha \ln z} \cdot e^{2\alpha k\pi i} \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots), \tag{X.166}$$

но многозначность на этот раз входит не через слагаемое, как в случае $\operatorname{Log} z$, а через множитель $e^{2\alpha k\pi i}$.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1. α — целое число: $\alpha = n$.

В этом случае, благодаря периодичности e^z,

$$e^{2\alpha k\pi i} = e^{2nk\pi i} \equiv 1,$$

так как nk — число целое.

Таким образом, при α — целом числе z^α согласно (X.166) будет иметь единственное значение, т. е. будет алгебраической рациональной (целой при $\alpha > 0$ и дробной при $\alpha < 0$) функцией, что полностью совпадает с результатами § 129.

2. α — дробное рациональное число: $\alpha = \frac{m}{n}$ (где m и n — целые числа, не имеющие общих делителей и $n > m$). В этом случае z^α будет иметь только n различных значений

$$z^\alpha = z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\ln z} \cdot e^{\frac{2mk\pi i}{n}} \quad (k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ n-1),$$

так как при $k = n$, $n+1$, $n+2$, ... мы будем получать для множителя $e^{\frac{2mk\pi i}{n}}$ те же значения, что и при $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1$, например при $k = n$ имеем $e^{\frac{2mn\pi i}{n}} = e^{2m\pi i} = 1 = e^0$. В этом случае z^α будет алгебраической иррациональной функцией.

3. α — иррациональное или мнимое число. Тогда все значения выражения $e^{2\alpha k\pi i}$ различны и, следовательно, z^α будет бесконечнозначной.

Если α не равно целому числу или нулю, то z^α, как и логарифмическая функция, имеет точку разветвления $z = 0$.

На плоскости z с разрезом, идущим из точки $z = 0$ (например, вдоль отрицательной полуоси x), каждая ветвь z^α будет регулярной функцией.

Применяя правило дифференцирования функции, из равенства (X.165) получаем

$$(z^{\alpha})' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \operatorname{Log} z} = \frac{\alpha z^{\alpha}}{z} = \alpha z^{\alpha-1}. \qquad \text{(X.167)}$$

Общая показательная функция комплексного переменного a^z определяется формулой

$$a^z = e^{z \operatorname{Log} a}, \quad a \neq 0. \qquad \text{(X.168)}$$

Функция a^z имеет бесконечное количество значений, так как $\operatorname{Log} a = \ln a + 2k\pi i$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$, представляет собой совокупность однозначных регулярных функций, не переходящих одна в другую.

На основании (X.168) для производной имеем

$$(a^z)' = \operatorname{Log} a \cdot e^{z \operatorname{Log} a} = a^z \cdot \operatorname{Log} a. \qquad \text{(X.169)}$$

§ 140. Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Функция комплексной переменной w, обратная к функции $\sin w$, обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$ (читается арксинус z) и, следовательно, определяется уравнением

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}. \qquad \text{(X.170)}$$

Решая это уравнение относительно w, будем иметь последовательно:

$$z = \frac{e^{2iw} - 1}{2ie^{iw}}, \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \quad e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

$$w \equiv \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (iz + \sqrt{1 - z^2}). \qquad \text{(X.171)}$$

Таким образом, функция $\operatorname{Arcsin} z$ тесно связана с логарифмической функцией, что в действительной области не может иметь места.

Функция $\operatorname{Arcsin} z$ бесконечнозначная, а именно, каждому значению z соответствует две бесконечные серии значений функции, которые происходят, с одной стороны, от двух значений корня $\pm \sqrt{1 - z^2}$ и, с другой стороны, от бесконечного числа значений логарифма.

То значение $\operatorname{Arcsin} z$, которое получим, взяв в формуле (X.171) главное значение логарифма, называется *главным значением функции арксинус* и обозначается

$$\arcsin z.$$

Можно показать [130, гл. IV, § 5], что все остальные значения $\operatorname{Arcsin} z$ будут выражаться через его главное значение следующими двумя формулами:

$$\operatorname{Arcsin} z = 2k\pi + \arcsin z \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots)$$

и

$$\operatorname{Arcsin} z = (2k + 1)\pi - \arcsin z \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots),$$

которые легко объединить и представить в таком виде:

$$\operatorname{Arcsin} z = k\pi + (-1)^k \arcsin z \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots). \qquad \text{(X.172)}$$

Если z — действительное число ($z = x$), то главное значение функции определяется неравенствами

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(X.173)}$$

Производную функции $w = \operatorname{Arcsin} z$ найдем, пользуясь правилом дифференцирования обратных функций (формула (X.49) § 127).

Для того чтобы иметь право пользоваться теоремой о дифференцировании обратной функции, необходимо предварительно установить, что единственными особыми точками функции $\operatorname{Arcsin} z$ будут точки ± 1, которые являются точками разветвления. Краткое, но исчерпывающее изложение этого вопроса можно найти в цитированной выше книге Ю. Д. Соколова [130, гл. IV, § 5].

В данном случае обратной функцией является функция $z = \sin w$ и, следовательно,

$$(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{(\sin w)'} = \frac{1}{\cos w} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 w}} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}. \qquad (X.174)$$

Таким образом, $\operatorname{Arcsin} z$ есть бесконечнозначная аналитическая функция на всей плоскости z, регулярная во всех ее точках, кроме точек $z = \pm 1$, в которых производная $(\operatorname{Arcsin} z)'$ теряет смысл.

Аналогично определяется и функция $w = \operatorname{Arccos} z$ (читается арккосинус z) при помощи соотношения

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \qquad (X.175)$$

откуда

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} = z + i\sqrt{1 - z^2}$$

и

$$w \equiv \operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Log} (z + i\sqrt{1 - z^2}), \qquad (X.176)$$

а также функция $w = \operatorname{Arctg} z$ (читается арктангенс z) из соотношения

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}, \qquad (X.177)$$

откуда

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z}$$

и

$$w \equiv \operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{i - z}{i + z}. \qquad (X.178)$$

Функция $\operatorname{Arccos} z$ имеет те же особые точки, что и функция $\operatorname{Arcsin} z$; особыми точками $\operatorname{Arctg} z$ согласно (X.178) будут точки $z = \pm i$, так как в этих точках подлогарифмическое выражение соответственно обращается в нуль и бесконечность. Во всех остальных точках плоскости z обе функции регулярны.

Если в формулах (X.176), (X.178) взять главные значения логарифма, то получим главные значения $\operatorname{arccos} z$ и $\operatorname{arctg} z$, через которые выражаются все остальные значения этих функций:

$$\operatorname{Arccos} z = 2k\pi \pm \operatorname{arccos} z \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots), \qquad (X.179)$$

$$\operatorname{Arctg} z = k\pi + \operatorname{arctg} z \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots). \qquad (X.180)$$

Производные от $\operatorname{Arccos} z$ и $\operatorname{Arctg} z$, как и в случае действительного аргумента, определяются равенствами

$$(\operatorname{Arccos} z)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad (X.181)$$

$$(\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1 + z^2}. \qquad (X.182)$$

Между обратными тригонометрическими функциями, вполне аналогично случаю действительного аргумента, легко установить следующие формулы (при этом мы ограничиваемся главными значениями рассматриваемых функций):

$$\begin{aligned}
\arcsin z &= \arccos\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos z,\\
\arccos z &= \arcsin\sqrt{1-z^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \frac{\pi}{2} - \arcsin z,\\
\operatorname{arctg} z &= \arcsin\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.
\end{aligned} \qquad (X.183)$$

Например, воспользовавшись тождеством $\sin^2 w + \cos^2 w = 1$, имеем

$$w = \arcsin z; \quad z = \sin w = \sqrt{1-\cos^2 w};$$

$$\cos w = \sqrt{1-z^2}; \quad w = \arccos\sqrt{1-z^2}$$

и, следовательно,

$$w = \arcsin z = \arccos\sqrt{1-z^2}.$$

Аналогично, исходя из формулы

$$z = \cos w = \sin\left(\frac{\pi}{2} - w\right),$$

получаем

$$w = \arccos z; \quad \frac{\pi}{2} - w = \arcsin z$$

и, после исключения w,

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z.$$

Тем же путем любое тригонометрическое тождество можно преобразовать в тождество для обратных тригонометрических функций.

Перейдем к рассмотрению функций, обратных по отношению к гиперболическим, которые определяются совершенно аналогично обратным тригонометрическим (круговым) функциям.

Из равенств

$$z = \operatorname{sh} w = \frac{e^w - e^{-w}}{2},$$

$$z = \operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2},$$

$$z = \operatorname{th} w = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}},$$

решая каждое из них относительно w и вводя соответствующую функцию, получаем

$$\begin{aligned}
w &\equiv \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2+1}),\\
w &\equiv \operatorname{Arch} z = \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2-1}),\\
w &\equiv \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+z}{1-z}.
\end{aligned} \qquad (X.184)$$

Заметим, что иногда, особенно в американской и английской литературе, для обозначения обратных функций употребляются символы

$$\sin^{-1} z \equiv \operatorname{Arcsin} z; \quad \cos^{-1} z; \quad \operatorname{tg}^{-1} z; \quad \operatorname{sh}^{-1} z; \quad \operatorname{ch}^{-1} z; \quad \operatorname{th}^{-1} z \equiv \operatorname{Arth} z.$$

Обратные гиперболические функции называются, соответственно, ареа-синус, ареа-косинус, ареа-тангенс (отметим, что для обратных круговых функций употребляется приставка Arc, а для гиперболических — приставка Ar).

Производные этих функций, как и в случае действительного аргумента, определяются равенствами

$$\begin{aligned}(\operatorname{Arsh} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2+1}},\\ (\operatorname{Arch} z)' &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}},\\ (\operatorname{Arth} z)' &= \frac{1}{1-z^2}.\end{aligned} \tag{X.185}$$

Эти производные можно также определить согласно равенствам (X.184), пользуясь правилом дифференцирования сложной функции (формула (X.40) § 126). Например,

$$(\operatorname{Arsh} z)' = [\operatorname{Log}(z+\sqrt{z^2+1})]' = \frac{1}{z+\sqrt{z^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2z}{2\sqrt{z^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}.$$

Особыми точками обратных гиперболических функций будут точки, в которых знаменатель производной обращается в нуль, т. е. $z=\pm i$ для $\operatorname{Arsh} z$ и $z=\pm 1$ для $\operatorname{Arch} z$ и $\operatorname{Arth} z$.

Таким образом, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ суть бесконечнозначные функции во всей плоскости z, регулярные во всех точках, за исключением отмеченных выше, особых точек.

Главными значениями обратных гиперболических функций называются те, которые получим, взяв в формулах (X.184) главные значения логарифма. Специальных обозначений для главных значений $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ обычно не применяют, ограничиваясь оговоркой в тексте, что речь идет о главных значениях.

Между обратными тригонометрическими и обратными гиперболическими функциями существуют следующие зависимости (мы их приводим только для главных значений):

$$\begin{aligned}\arcsin z &= -i\operatorname{Arsh} iz, & \operatorname{Arsh} z &= i\arcsin iz,\\ \arccos z &= -i\operatorname{Arch} z, & \operatorname{Arch} z &= i\arccos z,\\ \operatorname{arctg} z &= -i\operatorname{Arth} iz, & \operatorname{Arth} z &= i\operatorname{arctg} iz.\end{aligned} \tag{X.186}$$

В справедливости этих равенств проще всего убедиться, переходя к логарифмическим функциям.

Например, согласно формулам (X.171) и (X.184) из равенства

$$\arcsin z = -i\operatorname{Arsh} iz$$

получаем выражение

$$\frac{1}{i}\operatorname{Log}(iz+\sqrt{1-z^2}) = -i\operatorname{Log}(iz+\sqrt{-z^2+1}),$$

которое является тождеством, если учесть, что

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i.$$

Легко также доказать, ограничиваясь главными значениями, что

$$\begin{aligned}\operatorname{Arsh}(-z) &= -\operatorname{Arsh} z,\\ \operatorname{Arth}(-z) &= -\operatorname{Arth} z,\end{aligned} \tag{X.187}$$

т. е. что функции $\operatorname{Arsh} z$ и $\operatorname{Arth} z$ — нечетные. Функция $\operatorname{Arch} z$ не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности.

Тождества, связывающие между собой обратные гиперболические функции, доказываются, исходя из тождеств для функций $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, буквально так же, как в случае обратных тригонометрических функций.

§ 141. Эллиптические функции Якоби

В § 66 мы рассматривали эллиптические интегралы. Введем понятие об эллиптических функциях, которые в некотором отношении подобны тригонометрическим функциям и являются их обобщением.

Отметим предварительно, что тригонометрические функции, например $w = \sin z$, можно получить при помощи так называемого *обращения интеграла*.

Рассмотрим интеграл

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}} = \arcsin w, \tag{X.188}$$

величина которого z является функцией верхнего предела интеграла w. Будем рассматривать обратную функцию, т. е. будем рассматривать верхний предел w как функцию величины интеграла z. В результате получим однозначную, регулярную и периодическую функцию

$$w = \sin z.$$

Говорят, что эта функция получена путем обращения интеграла (X.188).

Точно так же если возьмем эллиптический интеграл первого рода

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}},$$

то в результате его обращения, как оказывается, получается аналитическая однозначная функция $w = f(z)$.

Эта функция, однако, будет уже мероморфной *, а не целой, как $w = \sin z$, и будет обладать не одним, а двумя существенно различными периодами, что мы выясним в дальнейшем.

Остановимся на рассмотрении эллиптического интеграла первого рода в тригонометрической форме (см. § 66 гл. V):

$$z = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}; \quad 0 \leqslant k^2 \leqslant 1. \tag{X.189}$$

Случай $k^2 > 1$ легко привести к случаю $k^2 < 1$ (см., напр., [123, стр. 42—43]), поэтому мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением только случая $0 \leqslant k^2 \leqslant 1$.

Интеграл (X.189) есть функция от α, определенная для любого вещественного α. Более того, функция z непрерывна при любом α и имеет конечную и отличную от нуля производную

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Так как последняя всегда положительна, то z монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, когда α увеличивается от $-\infty$ до $+\infty$. Действительно, подынтегральное выражение всегда больше или равно единице, следовательно, $|z| \geqslant |\alpha|$.

---

* Напомним, что мероморфной называется аналитическая функция, не имеющая во всей незамкнутой комплексной плоскости других особых точек, кроме полюсов (см. § 112).

Мероморфную функцию всегда можно представить в виде отношения двух целых функций. Сам термин «мероморфный» происходит от греческих слов μερος (часть, дробь) и μορφος (форма, вид) и означает «подобный дроби».

Отсюда вытекает, что α также является однозначной функцией от z, определенной для любого z; непрерывной и имеющей конечную производную:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}, \tag{X.190}$$

т. е. α является аналитической функцией от z. Эту функцию Карл Густав Якоби (Karl Gustav Jacobi, 1804—1851) назвал *амплитудой* * интеграла z и обозначил ее

$$\alpha = \operatorname{am}(z, k),$$

или короче

$$\alpha = \operatorname{am} z.$$

Кроме функции $\alpha = \operatorname{am} z$ Якоби ввел в рассмотрение в качестве самостоятельных функций **

$$\begin{gathered} \sin \alpha = \sin (\operatorname{am} z), \\ \cos \alpha = \cos (\operatorname{am} z), \\ \Delta (\operatorname{am} z) = + \sqrt{1 - k^2 (\operatorname{sinam} z)^2} \end{gathered} \tag{X.191}$$

и назвал их соответственно *синус амплитуды*, или *эллиптический синус*, *косинус амплитуды*, или *эллиптический косинус*, и *дельта амплитуды*.

Функции $\operatorname{sinam} z$, $\operatorname{cosam} z$ и $\Delta \operatorname{am} z$, как аналитические функции от $\alpha = \operatorname{am} z$, являются также однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями от z.

Они получили общее название *эллиптических функций Якоби* и, по предложению Гудерманна, обозначаются короче следующим образом:

$$\operatorname{sinam} z = \operatorname{sn} z; \quad \operatorname{cosam} z = \operatorname{cn} z; \quad \Delta \operatorname{am} z = \operatorname{dn} z. \tag{X.192}$$

Последние обозначения в настоящее время общеприняты и читаются так: эс эн зет, це эн зет, де эн зет.

Функции Якоби в силу самого их определения связаны между собой простыми алгебраическими соотношениями

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1, \tag{X.193}$$

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = 1, \tag{X.194}$$

которые позволяют любые две из этих функций выразить через третью. Например,

$$\operatorname{cn} z = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 z}, \tag{X.195}$$

$$\operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}. \tag{X.196}$$

Произведя в интеграле (X.189) замену переменных:

$$\sin \alpha = w; \quad d\alpha = \frac{dw}{\cos \alpha} = \frac{dw}{\sqrt{1 - w^2}}$$

и учтя, что верхним пределом полученного интеграла является величина $w = \sin \alpha = \operatorname{sn} z$, имеем

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}} = \int_0^{\operatorname{sn} z} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}. \tag{X.197}$$

* Этим термином мы пользовались в § 66.

** Знак, стоящий перед корнем, обозначает, что берется только положительное значение корня.

Таким образом, функция Якоби $\operatorname{sn} z$ получена в результате обращения эллиптического интеграла первого рода.

Иначе говоря, $\operatorname{sn} z$ *равен верхнему пределу интеграла* $z = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$,

причем этот предел $w = \operatorname{sn} z$ *мы рассматриваем как функцию от величины самого интеграла* z.

Поскольку функция $\operatorname{sn} z$ зависит также и от модуля k, то в тех случаях, когда необходимо отметить эту зависимость, вместо обозначения $\operatorname{sn} z$ употребляют обозначение $\operatorname{sn}(z, k)$ и, аналогично, $\operatorname{cn}(z, k)$ и $\operatorname{dn}(z, k)$. Из самого определения эллиптических функций легко установить, что $\operatorname{sn} z$ есть нечетная функция, а $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — функции четные, к чему мы вернемся в § 143.

Найдем производные от функций Якоби. Дифференцируя обе части равенства

$$\operatorname{sn} z = \sin\alpha$$

и учитывая (X.190), имеем

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \cos\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dz} = \cos\alpha \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}.$$

Но согласно (X.191) и (X.192)

$$\cos\alpha = \operatorname{cn} z; \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha} = \operatorname{dn} z,$$

так что получаем

$$\frac{d \operatorname{sn} z}{dz} = \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z. \tag{X.198}$$

Аналогичным путем находим

$$\frac{d \operatorname{cn} z}{dz} = -\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z, \tag{X.199}$$

$$\frac{d \operatorname{dn} z}{dz} = -k^2 \operatorname{sn} z \operatorname{cn} z. \tag{X.200}$$

Эллиптические функции Якоби для действительных значений аргумента $z = x$ легко вычисляются при помощи таблицы эллиптических интегралов первого рода $F(\alpha, 0)$.

Пример. Вычислить функции $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$, $\operatorname{dn}(z, k)$, если $z = x = 0{,}50441$; $k = 0{,}88295$.

Прежде всего из равенства $\sin\theta = k$ определяем *модулярный угол:*

$$\arcsin k = \theta = 62°.$$

По таблице эллиптических интегралов первого рода (см., например, [123, стр. 322—352]) по заданному значению $z = x = F(\alpha, 0) = 0{,}50441$ в колонке $\theta = 62°$ находим амплитуду

$$\alpha = 28°.$$

Следовательно, на основании формул

$$\operatorname{sn} z = \sin\alpha, \quad \operatorname{cn} z = \cos\alpha, \quad \operatorname{dn} z = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}$$

получаем (при $k = 0{,}88295$)

$$\operatorname{sn} 0{,}50441 = \sin 28° = 0{,}46947,$$

$$\operatorname{cn} 0{,}50441 = \cos 28° = 0{,}88295,$$

$$\operatorname{dn} 0{,}50441 = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - (0{,}88295 \cdot 0{,}46947)^2} = 0{,}91004.$$

Таким образом, основная трудность при вычислении функций Якоби заключается в определении амплитуды α по заданным $z = F(\alpha, \theta)$ и $k = \sin\theta$, т. е. в решении первой обратной табличной задачи, что и было выполнено в § 81 гл. VI.

В заключение рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций Якоби.

Если модуль $k = 0$ или 1, то эллиптические функции вырождаются в тригонометрические или гиперболические.

Действительно, при $k = 0$ из формулы (X.189) имеем

$$z = \alpha = \operatorname{am} z$$

и, следовательно, согласно (X.192)

$$\operatorname{sn}(z;\ 0) = \sin z, \tag{X.201}$$

$$\operatorname{cn}(z;\ 0) = \cos z. \tag{X.202}$$

Из формулы (X.194) находим, что при $k = 0$ функция $\operatorname{dn} z$ превращается в постоянную величину

$$\operatorname{dn}(z;\ 0) \equiv 1. \tag{X.203}$$

Этот же результат непосредственно следует из формулы (X.197), так как при $k = 0$

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arcsin w,$$

т. е. совпадает с интегралом (X.188) и, следовательно,

$$w = \operatorname{sn}(z;\ 0) = \sin z.$$

При $k = 1$ имеем

$$z = \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \int_0^w \frac{dw}{1-w^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+w}{1-w}.$$

Обращая это равенство, т. е. решая его относительно w, находим

$$\frac{1+w}{1-w} = e^{2z};\quad w = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}.$$

Но выражение $\dfrac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ есть гиперболический тангенс (см. § 137), поэтому при $k = 1$

$$\operatorname{sn}(z;\ 1) = \operatorname{th} z; \tag{X.204}$$

$$\operatorname{cn}(z;\ 1) = \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(z;\ 1)} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{ch} z}; \tag{X.205}$$

$$\operatorname{dn}(z;\ 1) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(z;\ 1)} = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 z} = \operatorname{cn}(z;\ 1) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}. \tag{X.206}$$

Таким образом, тригонометрические и гиперболические функции представляют собой лишь весьма частные случаи функций эллиптических.

§ 142. Двоякопериодичность эллиптических функций Якоби

Для эллиптических функций Якоби имеют место следующие теоремы сложения [123, гл. I, § 30]; [125, т. III, ч. 2, § 182]; [142, т. II, стр. 379—384]:

$$\operatorname{sn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{sn} z_1 \operatorname{cn} z_2 \operatorname{dn} z_2 + \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{dn} z_1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}, \tag{X.207}$$

$$\operatorname{cn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2 - \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}, \tag{X.208}$$

$$\operatorname{dn}(z_1 + z_2) = \frac{\operatorname{dn} z_1 \operatorname{dn} z_2 - k^2 \operatorname{sn} z_1 \operatorname{sn} z_2 \operatorname{cn} z_1 \operatorname{cn} z_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z_1 \operatorname{sn}^2 z_2}. \tag{X.209}$$

При $k = 0$, как было показано в предыдущем параграфе, $\operatorname{sn} z = \sin z$, $\operatorname{cn} z = \cos z$, $\operatorname{dn} z \equiv 1$ и формулы (X.207), (X.208) переходят в известные формулы сложения для тригонометрических функций, а формула (X.209) обращается в тождество.

Формулы (X.207)—(X.209) позволяют вычислять значения функций Якоби от суммы аргументов, если известны значения этих функций для каждого аргумента в отдельности. Проиллюстрируем это, рассмотрев наиболее важные частные случаи.

Если в эллиптическом интеграле (X.197) верхний предел равен единице, то интеграл называется *полным* и обозначается символом * K:

$$K = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}. \tag{X.210}$$

Обращая интеграл (X.210), находим

$$\operatorname{sn}(K, k) = 1.$$

Подставив этот результат в формулы (X.195), (X.196), получаем

$$\operatorname{cn}(K, k) = 0; \quad \operatorname{dn}(K, k) = \sqrt{1 - k^2} = k',$$

где

$$k' = +\sqrt{1 - k^2} \tag{X.211}$$

называется *дополнительным модулем.*

Таким образом, значения эллиптических функций при $z = K$ даются формулами

$$\operatorname{sn} K = 1; \quad \operatorname{cn} K = 0; \quad \operatorname{dn} K = k'. \tag{X.212}$$

Воспользуемся полученными результатами и покажем, что эллиптические функции Якоби являются функциями периодическими. Положив в формулах (X.207) — (X.209) $z_1 = z$, $z_2 = K$, имеем

$$\operatorname{sn}(z + K) = \frac{\operatorname{sn} z \operatorname{cn} K \operatorname{dn} K + \operatorname{sn} K \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z \operatorname{sn}^2 K} = \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}$$

и окончательно

$$\operatorname{sn}(z + K) = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}, \tag{X.213}$$

так как согласно (X.194) $1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z = \operatorname{dn}^2 z$.

Аналогичным путем доказываем, что

$$\operatorname{cn}(z + K) = -\frac{k' \operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}; \quad \operatorname{dn}(z + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} z}. \tag{X.214}$$

Отсюда, учтя, что $z + 2K = (z + K) + K$, находим

$$\operatorname{sn}(z + 2K) = \frac{\operatorname{cn}(z + K)}{\operatorname{dn}(z + K)} = -\frac{\dfrac{k' \operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}}{\dfrac{k'}{\operatorname{dn} z}} = -\operatorname{sn} z \tag{X.215}$$

---

* Формула (X.210), если в ней произвести замену $w = \sin\alpha$ и учесть, что $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, тождественно совпадает с формулой (V.92)

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

которой в § 66 был определен полный эллиптический интеграл первого рода.

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(z+2K)=-\operatorname{cn} z;\quad \operatorname{dn}(z+2K)=\operatorname{dn} z. \tag{X.216}$$

Повторив эти преобразования для аргумента $z+4K=(z+2K)+2K$, получаем

$$\operatorname{sn}(z+4K)=-\operatorname{sn}(z+2K)=\operatorname{sn} z;\quad \operatorname{cn}(z+4K)=\operatorname{cn} z. \tag{X.217}$$

Таким образом, *действительная величина* $\tau=4K$ *является периодом функций* $\operatorname{sn} z$ *и* $\operatorname{cn} z$, *в то время как функция* $\operatorname{dn} z$ *согласно (X.216) имеет меньший действительный период* $\tau=2K$.

Кроме действительного периода эллиптические функции обладают и чисто мнимым периодом, к доказательству чего мы и переходим.

Полный эллиптический интеграл первого рода, взятый при дополнительном модуле k', обозначается той же буквой K, но со штрихом:

$$K'\equiv K(k'), \tag{X.218}$$

или

$$K'=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}, \tag{X.219}$$

т. е. K' является той же функцией от k', что и K от k. Произведя в (X.219) замену переменных $w=\dfrac{1}{1-k'^2t^2}$ и учтя, что $k^2=1-k'^2$, после несложных преобразований придаем этому интегралу следующий вид:

$$K'=\int_1^{1/k} \frac{dw}{\sqrt{(w^2-1)(1-k^2w^2)}}=\frac{1}{i}\int_1^{1/k} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}. \tag{X.220}$$

Воспользовавшись формулами (X.210) и (X.54), имеем

$$K+iK'=\int_0^1+\int_1^{1/k}=\int_0^{1/k} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}. \tag{X.221}$$

Обращая интеграл (X.221), находим

$$\operatorname{sn}(K+iK')=\frac{1}{k}, \tag{X.222}$$

а затем согласно* (X.195) и (X.196)

$$\operatorname{cn}(K+iK')=-i\frac{k'}{k};\quad \operatorname{dn}(K+iK')=0. \tag{X.223}$$

Положив в формулах (X.207) — (X.209)

$$z_1=z-K,\quad z_2=K+iK',\quad z_1+z_2=z+iK',$$

---

* Подставив $z=K+iK'$ в формулу (X.195) и приняв во внимание (X.222), получаем

$$\operatorname{cn} z=\sqrt{1-\operatorname{sn}^2 z}=\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}=\sqrt{-\frac{1-k^2}{k^2}}=\sqrt{-\frac{k'^2}{k^2}}=\pm i\frac{k'}{k},$$

так как $1-k^2=k'^2$. Из двух найденных значений $\operatorname{cn} z$ мы должны выбрать значение $-i\dfrac{k'}{k}$, при котором сохраняется непрерывность исследуемой ветви аналитической функции $\operatorname{cn} z$. Более подробно этот вопрос изложен в [142, т. II, стр. 387—390].

после несложных преобразований получаем необходимые нам равенства

$$\operatorname{sn}(z+iK') = \frac{1}{k\operatorname{sn} z}; \tag{X.224}$$

$$\operatorname{cn}(z+iK') = -i\frac{\operatorname{dn} z}{k\operatorname{sn} z};\quad \operatorname{dn}(z+iK') = -i\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z}. \tag{X.225}$$

Повторным применением этих формул найдем

$$\begin{aligned} &\operatorname{sn}(z+2iK') = \operatorname{sn} z; && \operatorname{sn}(z+4iK') = \operatorname{sn} z;\\ &\operatorname{cn}(z+2iK') = -\operatorname{cn} z; && \operatorname{cn}(z+4iK') = \operatorname{cn} z;\\ &\operatorname{dn}(z+2iK') = -\operatorname{dn} z; && \operatorname{dn}(z+4iK') = \operatorname{dn} z. \end{aligned} \tag{X.226}$$

Следовательно, *функции* $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ *имеют период* $\tau' = 4iK'$, *в то время как* $\operatorname{sn} z$ *имеет меньший период* $\tau' = 2iK'$.

Объединив формулы (X.217), (X.226) и выполнив очевидные преобразования, получим окончательно

$$\operatorname{sn}(z+4mK+2niK') = \operatorname{sn} z, \tag{X.227}$$

где m; $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ — произвольные целые числа.

Свойство, выраженное формулой (X.227), и означает, что функция $\operatorname{sn}(z, k)$ имеет два существенно различных периода $\tau = 4K$ и $\tau' = 2iK'$, отношение которых равно чисто мнимой величине. Таким образом, $\operatorname{sn}(z, k)$ суть *двоякопериодическая функция*.

Величина периодов зависит от модуля k. В частности, при $k = 0$ имеем $K = \frac{\pi}{2}$, $K' = \infty$ и, следовательно, $\tau = 2\pi$, $\tau' = \infty$, т. е. второй период перестает существовать. Так как $\operatorname{sn}(z; 0) = \sin z$, то мы вновь доказали, что период функции $\sin z$ равен 2π.

Аналогично при $k = 1$ имеем $K = \infty$, $K' = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, функция $\operatorname{th} z = \operatorname{sn}(z; 1)$ имеет чисто мнимый период $i\pi$.

Впервые таблицы полных и неполных эллиптических интегралов (первого и второго рода) были вычислены А. М. Лежандром в его трехтомном мемуаре «Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes», t. 1—3, Paris, 1825—1832. Впоследствии многие авторы воспроизводили таблицы Лежандра с сокращением до 4, 5 или 6 знаков. Список наиболее распространенных таблиц с краткой характеристикой можно найти в [148, стр. 790—792], а в табл. IV приложения приведены семизначные таблицы величин K и K'. При этом в качестве аргумента удобнее брать не сам модуль k, а его квадрат k^2.

Функции $\operatorname{cn}(z, k)$ и $\operatorname{dn}(z, k)$, которые выражаются через функцию $\operatorname{sn}(z, k)$, также являются двоякопериодическими. Другие основные свойства функций Якоби легко изучить, воспользовавшись полученными выше результатами. Поэтому мы ограничимся табл. 118 и 119, в которых приведены самые необходимые сведения о функциях Якоби.

В качестве пояснений найдем значения функций Якоби для $z = \frac{K}{2}$, а также определим полюсы этих функций. Все остальные результаты читателю полезно получить самостоятельно.

Будем исходить из формул (X.213), (X.214) и положим в них $z = -\frac{K}{2}$. Тогда, принимая во внимание, что $\operatorname{sn} z$ есть нечетная функция, а $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — функции четные, находим

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{\operatorname{cn}\frac{K}{2}}{\operatorname{dn}\frac{K}{2}};\quad \operatorname{cn}\frac{K}{2} = \frac{k'\operatorname{sn}\frac{K}{2}}{\operatorname{dn}\frac{K}{2}};\quad \operatorname{dn}\frac{K}{2} = \sqrt{k'}. \tag{X.228}$$

Таблица 118

Некоторые частные значения функций Якоби

z	0	$\frac{K}{2}$	K	$2K$	$i\frac{K'}{2}$	iK'	$2iK'$	$K+iK'$
$\operatorname{sn} z$	0	$\frac{1}{\sqrt{1+k'}}$	1	0	$\frac{i}{\sqrt{k}}$	∞	0	$\frac{1}{k}$
$\operatorname{cn} z$	1	$\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$	0	-1	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	∞	-1	$-i\frac{k'}{k}$
$\operatorname{dn} z$	1	$\sqrt{k'}$	k'	1	$\sqrt{1+k}$	∞	-1	0

Таблица 119

Периоды, нули и полюсы функций Якоби

Функция	Периоды	Нули	Полюсы
$\operatorname{sn} z$	$4K$ и $2iK'$	$2mK+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
$\operatorname{cn} z$	$4K$ и $2K+2iK'$	$(2m+1)K+2niK'$	$2mK+(2n+1)iK'$
$\operatorname{dn} z$	$2K$ и $4iK'$	$(2m+1)K+$ $+(2n+1)iK'$	$2mK+(2n+1)iK'$

Примечание. Здесь m и n суть произвольные целые числа: $m, n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$

Воспользовавшись тождествами (X.194), (X.193), по известному $\operatorname{dn}\frac{K}{2} = \sqrt{k'}$ мы и получаем

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}};\quad \operatorname{cn}\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{k'}{1+k'}}. \tag{X.229}$$

Переходим к определению полюсов функций Якоби. Если верхний предел w интеграла (X.197) положить равным нулю, то согласно формуле (V.29) § 59, которая остается справедливой и в комплексной области, величина самого интеграла $z = \int_0^0 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$ будет также равна нулю. Следовательно,

$$\operatorname{sn}(0; k) = 0,\ \operatorname{cn}(0; k) = \operatorname{dn}(0; k) = 1. \tag{X.230}$$

Переходя в формулах (X.224), (X.225) к пределу $z \to 0$, убеждаемся, что величина $z = iK'$ будет одним из полюсов одновременно для всех трех функций Якоби. Прибавив к найденной величине iK' (или отняв от нее) любое количество периодов $4K$ и $2iK'$ функции $\operatorname{sn} z$, мы получим значения всех полюсов, которые и приведены в табл. 119.

В качестве иллюстрации на рис. 288—290 приведены графики функций Якоби для действительного аргумента $z = x$ (который чаще всего и встречается на практике) соответственно при значениях модуля $k^2 = 0;\ 0{,}5;\ 1$.

При значениях k, не слишком близких к единице, графики функций $w = \operatorname{sn} x$ и $w = \operatorname{cn} x$ еще очень сильно напоминают синусоиду и косинусоиду, а график функции $w = \operatorname{dn} x$ мало отличается от прямой $w = 1$ (максимальные значения $\operatorname{dn} 0 = \operatorname{dn} 2K = \operatorname{dn} 4K = \cdots = 1$, а минимальные $\operatorname{dn} K = \operatorname{dn} 3K = \cdots = k' = \sqrt{1 - k^2}$). По мере приближения модуля k к единице действительный период этих функций растет, а графики все больше и больше отличаются, соответственно, от синусоиды, косинусоиды и прямой $w = 1$.

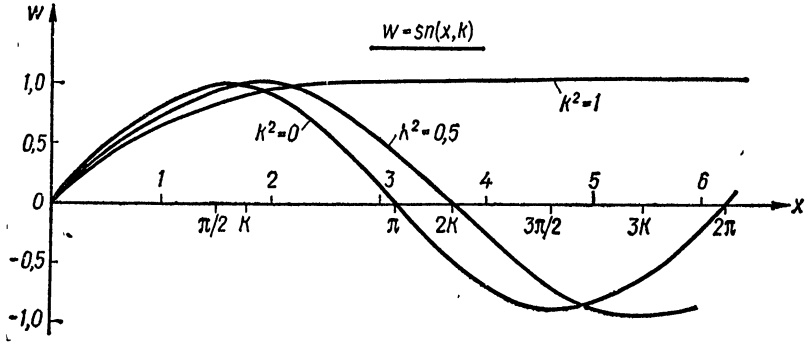


Рис. 288.

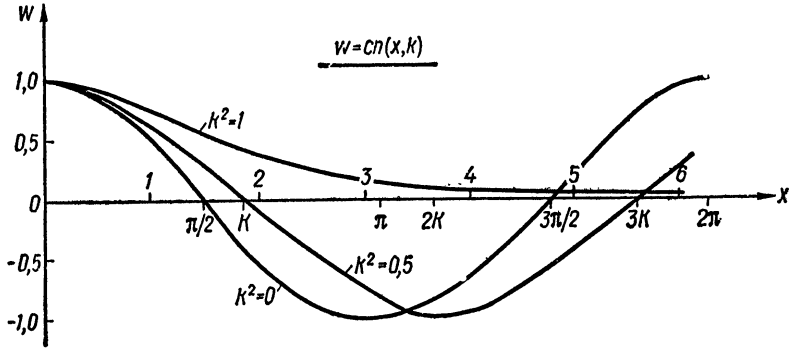


Рис. 289.

Отметим еще одно обстоятельство. Косинусоиду, как известно, можно совместить с синусоидой простым перемещением на $\frac{\pi}{2}$ вдоль оси x. Возможность такого совмещения есть следствие соотношения

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Но из формулы

$$\operatorname{sn}(x + K) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}$$

мы видим, что от прибавления четверти периода K к аргументу x функция $\operatorname{sn} x$ не переходит в $\operatorname{cn} x$. Поэтому график $\operatorname{sn} x$ с графиком $\operatorname{cn} x$ (кроме случая $k = 0$) совместить нельзя.

Пример. Определить периоды функции $\operatorname{sn}(z, k)$ при $k^2 = 0{,}95$ и вычислить (с четырьмя значащими цифрами) ее значения в точках $z = \frac{1}{2}K$; K; $\frac{3}{2}K$; $2K$; $\frac{5}{2}K$; $3K$; $\frac{7}{2}K$ и $z = i\frac{K'}{2}$.

Решение. Будем вести все вычисления с четырьмя значащими цифрами. Периодами для функции $\operatorname{sn}(z, k)$ являются величины $\tau = 4K$ и $\tau' = 2iK'$. Поэтому, определив по табл. IV приложения (с одним запасным знаком) для заданного $k^2 = 0{,}95$, что $K = 2{,}9083$; $K' = 1{,}5910$, решаем первую часть задачи:

$$\tau = 4K = 11{,}6332 \approx 11{,}63; \quad \tau' = 2iK' \approx 3{,}182i.$$

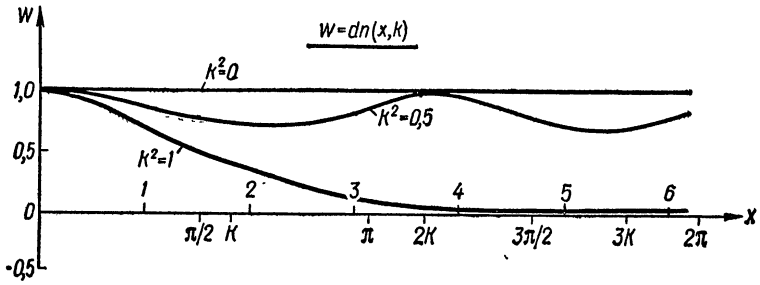


Рис. 290.

Далее, согласно (X.229)

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}2236}} = \frac{1}{1{,}1061} = 0{,}9041,$$

так как $k'^2 = 1 - k^2$ и, следовательно, $k' = +\sqrt{0{,}05} = 0{,}2236$.

По найденному $\operatorname{sn}\frac{K}{2}$, воспользовавшись формулами приведения (X.215) и (X.217), определяем

$$\operatorname{sn}(z + 2K) = -\operatorname{sn} z; \quad \operatorname{sn}(z + 4K) = \operatorname{sn} z$$

и, учтя, что $\operatorname{sn} z$ есть функция нечетная, находим последовательно:

$$\operatorname{sn}\frac{3}{2}K = \operatorname{sn}\left(-\frac{1}{2}K + 2K\right) = -\operatorname{sn}\left(-\frac{K}{2}\right) = \operatorname{sn}\frac{K}{2} = 0{,}9041;$$

$$\operatorname{sn}\frac{5}{2}K = \operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}K + 2K\right) = -\operatorname{sn}\frac{K}{2} = -0{,}9041;$$

$$\operatorname{sn}\frac{7}{2}K = \operatorname{sn}\left(-\frac{1}{2}K + 4K\right) = \operatorname{sn}\left(-\frac{K}{2}\right) = -0{,}9041.$$

При $z = K$, $2K$, $3K$ независимо от величины модуля k имеем соответственно:

$$\operatorname{sn} K = 1;$$
$$\operatorname{sn} 2K = \operatorname{sn}(0 + 2K) = -\operatorname{sn} 0 = 0;$$
$$\operatorname{sn} 3K = \operatorname{sn}(K + 2K) = -\operatorname{sn} K = -1,$$

а при $z = i\frac{K'}{2}$, положив в формуле (X.224) $z = -i\frac{K'}{2}$, получаем

$$\operatorname{sn}\left(i\frac{K'}{2}\right) = \operatorname{sn}\left(-i\frac{K'}{2} + iK'\right) = \frac{1}{k\operatorname{sn}\left(-i\frac{K'}{2}\right)} = \frac{1}{-k\operatorname{sn}\left(i\frac{K'}{2}\right)}.$$

Отсюда

$$\operatorname{sn}^2\left(i\frac{K'}{2}\right) = \frac{-1}{k};\ \operatorname{sn}\left(i\frac{K'}{2}\right) = \frac{i}{\sqrt{k}} = \frac{i}{\sqrt{0{,}9747}} = 1{,}013i,$$

так как $k = +\sqrt{k^2} = +\sqrt{0{,}95} = 0{,}9747$.

Упражнения

1. Определить при $k^2 = 0{,}95$ периоды функций $\operatorname{cn}(z, k)$ и $\operatorname{dn}(z, k)$ и вычислить (с четырьмя значащими цифрами) значения этих функций в точках $z = \pm\frac{1}{2}K$; K; $\frac{3}{2}K$; $2K$; $\frac{5}{2}K$; $3K$; $\frac{7}{2}K$ и $z = i\frac{K'}{2}$.

2. По результатам, полученным в упражнении 1 (а также в приведенном выше примере), построить для действительных значений аргумента $z = x$ графики функций $\operatorname{sn}(z, k)$; $\operatorname{cn}(z; k)$; $\operatorname{dn}(z, k)$ при $k^2 = 0{,}95$ и сравнить их с графиками, построенными на рис. 288—290.

3. Вывести для тригонометрических функций формулы приведения, положив $k = 0$ в (X.213) — (X.217) и учтя, что $K(0) = \frac{\pi}{2}$.

§ 143. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эллиптические функции Якоби

Из формул (X.198) — (X.200) непосредственно вытекает, что эллиптические функции Якоби

$$w_1 = \operatorname{sn}(z, k);\ w_2 = \operatorname{cn}(z, k);\ w_3 = \operatorname{dn}(z, k) \qquad (X.231)$$

удовлетворяют системе трех нелинейных уравнений первого порядка

$$w_1' = w_2w_3;\ w_2' = -w_1w_3;\ w_3' = -k^2w_1w_2 \qquad (X.232)$$

при начальных условиях (для точки $z_0 = 0$)

$$w_1(0) = 0;\ w_2(0) = w_3(0) = 1. \qquad (X.233)$$

Этот факт имеет важное значение, так как позволяет применить результаты гл. IX к изучению эллиптических функций.

Действительно, если представить рассматриваемые функции рядами с центром в точке $z_0 = 0$:

$$w_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n;\ w_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n;\ w_3 = \sum_{n=0}^{\infty} c_nz^n, \qquad (X.234)$$

то согласно результатам § 113 гл. IX искомые коэффициенты будут определяться рекуррентными формулами

$$\dot{a}_{n+1} = [b_nc_n];\ \dot{b}_{n+1} = -[a_nc_n];\ \dot{c}_{n+1} = -k^2[a_nb_n]. \qquad (X.235)$$

Отсюда, заменяя $\dot{a}_{n+1}$, $\dot{b}_{n+1}$, $\dot{c}_{n+1}$ их истинными значениями (IX.111):

$$\dot{a}_{n+1} = (n+1)a_{n+1};\ \dot{b}_{n+1} = (n+1)b_{n+1};\ \dot{c}_{n+1} = (n+1)c_{n+1},$$

получаем необходимые расчетные формулы

$$a_{n+1} = \frac{[b_n c_n]}{n+1};\ b_{n+1} = -\frac{[a_n c_n]}{n+1};\ c_{n+1} = -\frac{k^2[a_n b_n]}{n+1}, \qquad \text{(X.236)}$$

где согласно начальным условиям (X.233)

$$a_0 = 0;\ b_0 = c_0 = 1.$$

Вычислив по формулам (X.236) необходимое количество коэффициентов a_n, b_n, c_n (на технике этих вычислений мы остановимся несколько позже), находим для

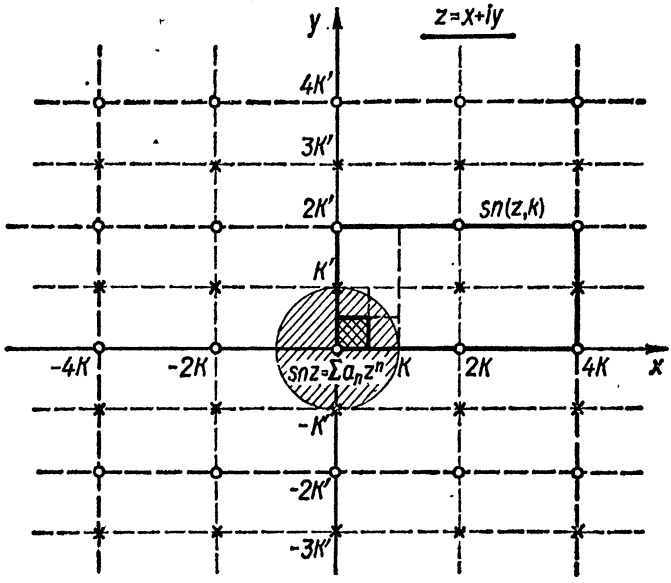


Рис. 291.

эллиптических функций Якоби наиболее простым способом степенные разложения:

$$\operatorname{sn}(z,\ k) = z - \frac{1+k^2}{3!}z^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{5!}z^5 - \frac{1+135(k^2+k^4)+k^6}{7!}z^7 + \cdots, \qquad \text{(X.237)}$$

$$\operatorname{cn}(z,\ k) = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1+4k^2}{4!}z^4 - \frac{1+44k^2+16k^4}{6!}z^6 + \cdots, \qquad \text{(X.238)}$$

$$\operatorname{dn}(z,\ k) = 1 - \frac{k^2}{2!}z^2 + \frac{4k^2+k^4}{4!}z^4 - \frac{16k^2+44k^4+k^6}{6!}z^6 + \cdots. \qquad \text{(X.239)}$$

Как было показано в предыдущем параграфе, особыми точками всех трех рассматриваемых функций являются полюсы

$$z = 2mK + (2n+1)iK';\ m,\ n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots,$$

где K и K' — суть полные эллиптические интегралы первого рода, а m и n —

произвольные целые числа. Ближайшими к точке $z_0 = 0$ будут два полюса (рис. 291)

$$z = \pm iK',$$

так что все три ряда (X.237) — (X.239) имеют один и тот же радиус сходимости

$$R = K'; \quad \frac{\pi}{2} \leqslant K' \leqslant \infty,$$

поскольку радиус сходимости степенного ряда равен расстоянию между центром ряда $z_0 = 0$ и ближайшей к нему особой точкой заданной функции.

Пример 1. Вычислить при $k^2 = 0{,}5$ (с пятью десятичными знаками) значения эллиптических функций Якоби для $z = 1$, i, $\frac{K}{2}$, $i\frac{K'}{2}$.

Решение. Все вычисления будем вести с одним запасным знаком. Положив в формулах (X.236) $k^2 = 0{,}5$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$, по известным $a_0 = 0$, $b_0 = c_0 = 1$ находим последовательно

$$a_1 = \frac{[b_0c_0]}{1} = b_0c_0 = 1; \; b_1 = -\frac{[a_0c_0]}{1} = -a_0c_0 = 0; \; c_1 = 0 \text{ (при } n = 0);$$

$$a_2 = 0; \; b_2 = -\frac{[a_1c_1]}{2} = -\frac{1}{2}(a_0c_1 + a_1c_0) = -\frac{1}{2}; \; c_2 = -\frac{0{,}5\,[a_1b_1]}{2} = -\frac{1}{4};$$

$$a_3 = \frac{[b_2c_2]}{3} = \frac{1}{3}(b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \; b_3 = 0; \; c_3 = 0, \ldots.$$

Результаты дальнейших вычислений приведены в табл. 120, причем коэффициенты a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} определяются по формулам (X.236) в один прием, без промежуточных записей. Для этого по уже найденным a_n, b_n, c_n вычисляем согласно формуле (IX.223) § 113 величины $[b_nc_n]$, $[a_nc_n]$, $k^2[a_nb_n]$ и полученный результат делим на $n + 1$.

Все вычисленные коэффициенты a_n, b_n, c_n в данном примере проще всего проконтролировать, воспользовавшись тождествами (X.193) и (X.194)

$$\mathrm{cn}^2 z + \mathrm{sn}^2 z = 1; \quad \mathrm{dn}^2 z + k^2 \mathrm{sn}^2 z = 1.$$

Согласно (X.231) и (X.234) при $z = 1$ и $z = i$ имеем

$$\mathrm{sn}\,1 = w_1(1) = \sum_{n=0}^{24} a_n = 0{,}803002; \quad \mathrm{sn}\,i = w_1(i) = i\sum_{n=0}^{24} |a_n| = 1{,}347372i;$$

$$\mathrm{cn}\,1 = w_2(1) = \sum_{n=0}^{24} b_n = 0{,}595977; \quad \mathrm{cn}\,i = w_2(i) = \sum_{n=0}^{24} |b_n| = 1{,}677919;$$

$$\mathrm{dn}\,1 = w_3(1) = \sum_{n=0}^{24} c_n = 0{,}823161; \quad \mathrm{dn}\,i = w_3(i) = \sum_{n=0}^{24} |c_n| = 1{,}381197,$$

поскольку при $z = i$

$$z^2 = i^2 = -1; \; z^3 = i^3 = -i; \; z^4 = i^4 = +1; \ldots.$$

Подставив найденные при $z = 1$ значения в правые части контрольных тождеств, получаем

$$\mathrm{cn}^2\,1 + \mathrm{sn}^2\,1 = (0{,}595977)^2 + (0{,}803002)^2 = 0{,}355189 + 0{,}644812 = 1{,}000001;$$

$$\mathrm{dn}^2\,1 + k^2\,\mathrm{sn}^2\,1 = (0{,}823161)^2 + \frac{1}{2}(0{,}803002)^2 = 0{,}677594 + 0{,}322406 = 1{,}000000$$

и, аналогично, при $z = i$

$$\mathrm{cn}^2\,i + \mathrm{sn}^2\,i = (1{,}677919)^2 + (1{,}347372i)^2 = 2{,}815412 - 1{,}815411 = 1{,}000001;$$

$$\mathrm{dn}^2\,i + k^2\,\mathrm{sn}^2\,i = (1{,}381197)^2 + \frac{1}{2}(1{,}347372i)^2 = 1{,}907705 - 0{,}907706 = 0{,}999999.$$

Таблица 120

$k^2 = 0{,}5$; $\operatorname{sn} z = \sum a_n z^n$; $\operatorname{cn} z = \sum b_n z^n$; $\operatorname{dn} z = \sum c_n z^n$

$a_{n+1} = \frac{[b_n c_n]}{n+1}$; $b_{n+1} = -\frac{[a_n c_n]}{n+1}$; $c_{n+1} = -\frac{0{,}5\,[a_n b_n]}{n+1}$

$\operatorname{Re} z^{n+1} = x \operatorname{Re} z^n - y \operatorname{Im} z^n$

$\operatorname{Im} z^{n+1} = x \operatorname{Im} z^n + y \operatorname{Re} z^n$

n	a_n	b_n	c_n	$z_1 = \frac{1}{2}K$	$z_2 = 0{,}247351 + 0{,}153802i$	
				z_1^n	$\operatorname{Re} z_2^n$	$\operatorname{Im} z_2^n$
0	0	+1,000000	+1,000000	1,000000	+1,000000	0
1	+1,000000	0	0	0,927037	+0,247351	+0,153802
2	0	−0,500000	−0,250000	0,859398	+0,037527	+0,076086
3	−0,250000	0	0	0,796693	−0,002420	+0,024592
4	0	+0,125000	+0,093750	0,738564	−0,004381	+0,005711
5	+0,068750	0	0	0,684676	−0,001962	+0,000739
6	0	−0,037500	−0,026563	0,634720	−0,000599	−0,000119
7	−0,020313	0	0	0,588409	−0,000130	−0,000122
8	0	+0,010938	+0,007715	0,545477	−0,000013	−0,000050
9	+0,005892	0	0	0,505677	+0,000004	−0,000014
10	0	−0,003177	−0,002248	0,468782		
11	−0,001714	0	0	0,434578		
12	0	+0,000924	+0,000654	0,402870		
13	+0,000499	0	0	0,373475		
14	0	−0,000269	−0,000190	0,346225		
15	−0,000145	0	0	0,320964		
16	0	+0,000078	+0,000055	0,297545		
17	+0,000042	0	0	0,275835		
18	0	−0,000023	−0,000016	0,255710		
19	−0,000012	0	0	0,237052		
20	0	+0,000007	+0,000005	0,219756		
21	+0,000004	0	0	0,203722		
22	0	−0,000002	−0,000001	0,188858		
23	−0,000001	0	0			
24	0	+0,000001	0,000000			
$\sum(1)$	0,803002	0,595977	0,823161	Контроль по формулам (X.228)		
$\sum(i)$	$1{,}347372i$	1,677919	1,381197	$\operatorname{cn}\frac{K}{2} : \operatorname{dn}\frac{K}{2} = 0{,}765367 = \operatorname{sn}\frac{K}{2}$		
$\sum\left(\frac{K}{2}\right)$	0,765367	0,643594	0,840896	$k' \operatorname{sn}\frac{K}{2} : \operatorname{dn}\frac{K}{2} = 0{,}643595 = \operatorname{cn}\frac{K}{2}$		
$\sum\left(i\frac{K}{2}\right)$	$1{,}189207i$	1,553774	1,306563	$\operatorname{dn}^2\frac{K}{2} = (0{,}840896)^2 = 0{,}707106 = k'$		

В табл. 120 вычислена также колонка z_1^n для $z = z_1 = \frac{K}{2} = \frac{K'}{2} = 0{,}927037$, умножив которую на соответствующую колонку коэффициентов a_n, b_n, c_n и их модулей $|a_n|$, $|b_n|$, $|c_n|$, а затем просуммировав результаты, находим

$$\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \sum_{n=0}^{22} a_n z_1^n = 0{,}765367; \quad \operatorname{sn} i\frac{K'}{2} = i\sum_{n=0}^{22} |a_n| z_1^n = 1{,}189207i;$$

$$\operatorname{cn}\frac{K}{2}=\sum_{n=0}^{22}b_n z_1^n=0{,}643594;\qquad \operatorname{cn} i\frac{K'}{2}=\sum_{n=0}^{22}|b_n|\,z_1^n=1{,}553774;$$

$$\operatorname{dn}\frac{K}{2}=\sum_{n=0}^{22}c_n z_1^n=0{,}840896;\quad \operatorname{dn} i\frac{K'}{2}=\sum_{n=0}^{22}|c_n|\,z_1^n=1{,}306563.$$

Полученные результаты проще всего проконтролировать при помощи формул (X.228). Действительно, воспользовавшись приведенными выше значениями эллиптических функций Якоби и учтя, что при $k^2=0{,}5$ дополнительный модуль $k'=\pm\sqrt{1-k^2}=\pm\sqrt{0{,}5}=0{,}707107$, имеем

$$\frac{\operatorname{cn}\frac{K}{2}}{\operatorname{dn}\frac{K}{2}}=\frac{0{,}643594}{0{,}840896}=0{,}765367=\operatorname{sn}\frac{K}{2};$$

$$\frac{k'\operatorname{sn}\frac{K}{2}}{\operatorname{dn}\frac{K}{2}}=\frac{0{,}707107\cdot 0{,}765367}{0{,}840896}=0{,}643595=\operatorname{cn}\frac{K}{2};$$

$$\operatorname{dn}^2\frac{K}{2}=(0{,}840896)^2=0{,}707106=k'$$

и, следовательно, в пределах точности вычислений найденные значения $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ при $z=\frac{K}{2}$ удовлетворяют формулам (X.228). Полные эллиптические интегралы K и K', необходимые для этих вычислений, определяем по табл. IV приложения, согласно которой при $k^2=0{,}5$

$$K(0{,}5)=K'(0{,}5)=1{,}8540747.$$

Полученные в табл. 120 результаты надо округлить до пяти десятичных знаков, что читатель легко выполнит самостоятельно.

Пример 2. Вычислить при $k^2=0{,}5$ (с той же точностью, что и в примере 1) $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ для комплексного значения аргумента $z=0{,}247351+0{,}153802i$.

Решение. Коэффициенты рядов (X.234) при $k^2=0{,}5$ мы уже нашли, решая пример 1. Теперь необходимо для заданного комплексного числа $z=x\pm iy$ определить соответствующие степени

$$z^n=\operatorname{Re} z^n+i\operatorname{Im} z^n. \tag{X.240}$$

Эти величины вычисляем по рекуррентной формуле, которую получим, воспользовавшись результатами § 121:

$$\begin{aligned} z^{n+1}&=z\cdot z^n=(x+iy)(\operatorname{Re} z^n+i\operatorname{Im} z^n)=\\ &=(x\operatorname{Re} z^n-y\operatorname{Im} z^n)+i(x\operatorname{Im} z^n+y\operatorname{Re} z^n), \end{aligned} \tag{X.241}$$

так как при $n=1$

$$\operatorname{Re} z^n=x;\quad \operatorname{Im} z^n=y.$$

Разделив в (X.241) действительные и мнимые части, приходим к искомым расчетным формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z^{n+1}&=x\operatorname{Re} z^n-y\operatorname{Im} z^n,\\ \operatorname{Im} z^{n+1}&=x\operatorname{Im} z^n+y\operatorname{Re} z^n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \end{aligned} \tag{X.242}$$

Все необходимые нам степени комплексного числа z^n, до $n = 9$ включительно, вычислены для заданного $z = z_2 = 0{,}247351 + 0{,}153802i$ в двух последних колонках табл. 120.

Заканчиваем решение примера, перемножив стоящие в одних строках a_n, b_n, c_n и z^n и просуммировав результаты, что выполняется в один прием, без промежуточных записей, и дает

$$\operatorname{sn} z = w_1(z) = \sum_{n=0}^{9} a_n z^n = 0{,}247824 + 0{,}147707i;$$

$$\operatorname{cn} z = w_2(z) = \sum_{n=0}^{9} b_n z^n = 0{,}980711 - 0{,}037325i;$$

$$\operatorname{dn} z = w_3(z) = \sum_{n=0}^{9} c_n z^n = 0{,}990223 - 0{,}018483i.$$

Возводя эти числа в квадрат, имеем

$$\operatorname{sn}^2 z = 0{,}039599 + 0{,}073210i,$$
$$\operatorname{cn}^2 z = 0{,}960401 - 0{,}073210i,$$
$$\operatorname{dn}^2 z = 0{,}980200 - 0{,}036605i.$$

Подставив найденные значения в тождества (X.193) и (X.194), получаем

$$\operatorname{sn}^2 z + \operatorname{cn}^2 z = 1{,}000000,$$
$$\operatorname{dn}^2 z + \frac{1}{2}\operatorname{sn}^2 z = 0{,}9999995,$$

что является надежным контролем всех выполненных вычислений.

Пример 3. Вычислить $\operatorname{sn}(z, k)$ при $k^2 = 0{,}5$ и $z = 18{,}788098 + 3{,}861951i$.

Решение. По табл. IV приложения находим для заданного квадрата модуля $k^2 = 0{,}5$ полные эллиптические интегралы первого рода:

$$K(0{,}5) = K'(0{,}5) = 1{,}8540747.$$

Вычтя теперь из аргумента функции $\operatorname{sn} z$ два ее действительных периода $8K = 14{,}8325976 \approx 14{,}832598$ и один чисто мнимый период $2iK' = 3{,}7081494 \approx 3{,}708149$, т. е. воспользовавшись формулой (X.227) при $m = 2$ и $n = 1$, имеем

$$\operatorname{sn}(18{,}788098 + 3{,}861951i) = \operatorname{sn}[(3{,}955500 + 14{,}832598) + (0{,}153802 + 3{,}708149)i] =$$
$$= \operatorname{sn}[(3{,}955500 + 0{,}153802i) + (8K + 2iK')] = \operatorname{sn}(3{,}955500 + 0{,}153802i).$$

Найденный аргумент по формуле приведения (X.215) можно еще уменьшить на величину $2K = 3{,}708149$, в результате чего получим

$$\operatorname{sn}(3{,}955500 + 0{,}153802i) = \operatorname{sn}[(0{,}247351 + 3{,}708149) + 0{,}153802i] =$$
$$= \operatorname{sn}[(0{,}247351 + 0{,}153802i) + 2K] = -\operatorname{sn}(0{,}247351 + 0{,}153802i).$$

Воспользовавшись результатами решения примера 2, получаем окончательно

$$\operatorname{sn}(18{,}788098 + 3{,}861951i) = -\operatorname{sn}(0{,}247351 + 0{,}153802i) =$$
$$= -(0{,}247824 + 0{,}147707i).$$

Примеры 1—3 носят вполне общий характер, и аналогичным путем можно вычислить эллиптические функции Якоби при любом действительном или комплексном аргументе.

При этом результаты, полученные при $k^2 = 0{,}5$, являются наименее точными, в силу чего они хорошо иллюстрируют эффективность выведенных формул. Действительно, при

$$0 \leqslant k^2 < 0{,}5$$

сходимость рядов (X.234) будет лучше, чем при $k^2 = 0{,}5$. Если же $0{,}5 < k^2 \leqslant 1$, то согласно известным формулам перехода от мнимого аргумента к действительному

$$\operatorname{sn}(iy,\ k) = i\frac{\operatorname{sn}(y,\ k')}{\operatorname{cn}(y,\ k')}; \tag{X.243}$$

$$\operatorname{cn}(iy,\ k) = \frac{1}{\operatorname{cn}(y,\ k')};\ \operatorname{dn}(iy,\ k) = \frac{\operatorname{dn}(y,\ k')}{\operatorname{cn}(y,\ k')} \tag{X.244}$$

при помощи подстановки $z^* = iz$ всегда можно перейти к дополнительному модулю

$$k'^2 = 1 - k^2 < 0{,}5.$$

Далее, воспользовавшись периодичностью функций Якоби и формулами приведения (X.213)—(X.217), (X.224)—(X.226), аргумент, взятый в любой точке комплексной области, можно привести к значению $z = x + iy$, расположенному в дважды заштрихованном квадрате на рис. 291.

Таким образом, при взятом фиксированном числе членов в рядах (X.234) самые грубые результаты мы получим при

$$k^2 = \frac{1}{2} \text{ и } z = \frac{K + iK'}{2},$$

а для всех других значений k и z точность будет выше. Эффективность полученных формул можно усилить путем выделения особенностей из рядов (X.234), что более подробно изложено в [148, гл. 6, § 50].

Рекуррентные формулы (X.236) позволяют определять коэффициенты рядов (X.234) не только при заданном числовом значении k^2, но и в общем виде. В табл. 121 в качестве образца выполнены все необходимые вычисления до $n = 9$ включительно, а читателю полезно продублировать эту таблицу и продолжить ее до $n = 11$.

Воспользовавшись коэффициентами a_n, b_n, c_n, найденными в табл. 121, мы можем продолжить ряды (X.237)—(X.239) еще на два члена каждый.

Эллиптические функции Якоби двоякопериодические и, как уже отмечалось, имеют бесчисленное множество полюсов, отмеченных на рис. 291 крестиками. На том же рисунке кружочками отмечены нули функции $\operatorname{sn} z$ и ее основной параллелограмм периодов — прямоугольник со сторонами $4K$ и $2K'$. Основным параллелограммом периодов для функции $\operatorname{cn} z$ будет параллелограмм с основанием $4K$, высотой $2K'$ и острым углом $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{K'}{K}$, а для $\operatorname{dn} z$ — прямоугольник со сторонами $2K$ и $4K'$.

При $k = 0$ из формул (X.237)—(X.239) получаем

$$\operatorname{sn}(z;\ 0) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sin z; \tag{X.245}$$

$$\operatorname{cn}(z;\ 0) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \cos z; \tag{X.246}$$

$$\operatorname{dn}(z;\ 0) \equiv 1,$$

и мы снова доказали, что в этом частном случае эллиптические функции Якоби переходят в тригонометрические. Поскольку при $k = 0$

$$K(0) = \frac{\pi}{2};\quad K'(0) = \infty,$$

Таблица 121

$w_1' = w_2 w_3$; $w_2' = -w_1 w_3$; $w_3' = -k^2 w_1 w_2$; $w_1(0) = 0$; $w_2(0) = w_3(0) = 1$;
$w_1 = \operatorname{sn}(z, k) = \sum a_n z^n$; $w_2 = \operatorname{cn}(z, k) = \sum b_n z^n$; $w_3 = \operatorname{dn}(z, k) = \sum c_n z^n$;
$a_{n+1} = \frac{[b_n c_n]}{n+1}$; $b_{n+1} = -\frac{[a_n c_n]}{n+1}$; $c_{n+1} = -k^2 \frac{[a_n b_n]}{n+1}$

n	a_n	b_n	c_n	$[b_n c_n]$	$[a_n b_n]$	$[a_n c_n]$	n
0	0	$+1$	$+1$	$+1$	0	0	0
1	$+1$	0	0	0	$+1$	$+1$	1
2	0	$-\frac{1}{2!}$	$-\frac{1}{2!}k^2$	$-\frac{1}{2!}(k^2+1)$	0	0	2
3	$-\frac{1}{3!}(1+k^2)$	0	0	0	$-\frac{1}{3!}[3+(1+k^2)]$	$-\frac{1}{3!}[3k^2+(1+k^2)]$	3
4	0	$+\frac{1}{4!}(1+4k^2)$	$+\frac{k^2}{4!}(4+k^2)$	$+\frac{1}{4!}(1+14k^2+k^4)$	0	0	4
5	$+\frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)$	0	0	0	$+\frac{1}{5!}(16+44k^2+k^4)$	$+\frac{1}{5!}(1+44k^2+16k^4)$	5
6	0	$-\frac{1}{6!}(1+44k^2+16k^4)$	$-\frac{k^2}{6!}(16+44k^2+k^4)$	$-\frac{1}{6!}(1+135k^2+135k^4+k^6)$	0	0	6
7	$-\frac{1}{7!}(1+135k^2+135k^4+k^6)$	0	0	0	$-\frac{1}{7!}(64+912k^2+408k^4+k^6)$	$-\frac{1}{7!}(1+408k^2+912k^4+64k^6)$	7
8	0	$+\frac{1}{8!}(1+408k^2+912k^4+64k^6)$	$+\frac{k^2}{8!}(64+912k^2+408k^4+k^6)$	$+\frac{1}{8!}(1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8)$	0	0	8
9	$+\frac{1}{9!}(1+1228k^2+5478k^4+1228k^6+k^8)$	0	0				9

то чисто мнимый период $2iK'$ исчезает и, следовательно, у тригонометрических функций $\sin z$ и $\cos z$ остается только действительный период

$$4K = 2\pi.$$

При $k = 1$

$$K(1) = \infty; \quad K'(1) = \frac{\pi}{2},$$

а из (X.237) находим

$$\operatorname{sn}(z; 1) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \cdots = \operatorname{th} z. \qquad (X.247)$$

Поэтому функция $\operatorname{th} z$ (в которую при $k = 1$ переходит эллиптический синус $\operatorname{sn} z$) имеет чисто мнимый период

$$2iK' = \pi.$$

Так как наименьший по абсолютному значению полюс функции $\operatorname{th} z \equiv \operatorname{sn}(z; 1)$ находится в точке $z = iK'(1) = i\frac{\pi}{2}$, то радиус сходимости ряда (X.247) есть $R = K'(1) = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 291), в то время как для рядов (X.245)—(X.246) $R = K'(0) = \infty$.

Отметим также, что свойство четности и нечетности эллиптических функций Якоби устанавливается непосредственно по их степенным разложениям, а именно: $\operatorname{sn} z$ — функция нечетная, а $\operatorname{cn} z$ и $\operatorname{dn} z$ — функции четные, поскольку ряды (X 237) и (X.238), (X.239) содержат соответственно только нечетные или четные степени z.

На этом мы заканчиваем краткое знакомство с эллиптическими функциями, которое можно рассматривать лишь как самое элементарное введение в теорию этих функций. При таком конспективном изложении мы совершенно не затронули вопросов, связанных с тета-функциями и эллиптическими функциями Вейерштрасса, играющих первостепенную роль в общей теории этих функций.

Именно К. Вейерштрасс первый развил теорию эллиптических функций в наиболее общем виде, исходя из определения, согласно которому эллиптической функцией называется двоякопериодическая аналитическая функция, не имеющая никаких особых точек, кроме полюсов в конечной части плоскости.

Читателям, желающим подробнее ознакомиться с этими вопросами, рекомендуем книгу Ю. С. Сикорского [123], носящую более прикладной характер, а также книги Н. И. Ахиезера [2] и Э. Т. Уиттекера и Дж. Н. Ватсона [142], в которых материал изложен в весьма изящной и компактной форме. Вычислительная сторона вопроса более подробно изложена в книге [147].

Упражнения

1. Продублировать табл. 120, а затем при помощи формул

$$\operatorname{sn} i\frac{K}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}}; \quad \operatorname{cn} i\frac{K}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{k}}; \quad \operatorname{dn} i\frac{K}{2} = \sqrt{1+k}$$

проверить результаты, полученные для $z = i\frac{K}{2}$.

2. Проверить результаты, полученные в табл. 120 для $z = \frac{K}{2}$, при помощи тождеств (X.193) и (X.194).

3. Вычислить $\operatorname{cn}(z, k)$ и $\operatorname{dn}(z, k)$ при $\kappa^2 = 0{,}5$ и $z = 18{,}788098 + 3{,}861951i$.

§ 144. Заключительные замечания

Теория функций комплексного переменного является одной из ведущих дисциплин современного математического анализа и охватывает очень широкий круг вопросов. Без теории функций комплексного переменного невозможно было бы получить многие результаты в теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории аппроксимации, алгебре, аналитической теории чисел, геометрии, гидро- и аэродинамике, теории упругости, радио- и электротехнике, корабле- и самолетостроении, электронной оптике, теории фильтрации и других областях науки и техники.

Естественно, что мы вынуждены были многие из этих вопросов изложить конспективно и, кроме того, исключить из рассмотрения ряд важных разделов теории функции комплексного переменного (например, теорию конформных отображений и римановых поверхностей, теорию контурных интегралов, операционный метод и его приложения), которые далеко выходят за рамки данной книги.

Читатели, желающие углубить и систематизировать свои знания в этом направлении, должны обратиться к одному из курсов, указанных в списке литературы, и в первую очередь к курсам [27; 28; 30; 36; 48; 50; 68; 70; 76—78; 111; 120; 125; 126; 130; 134; 150; 152; 153], в большинстве которых приведена и дальнейшая литература.

К концу XVII и началу XVIII века накопилось много сведений относительно свойств элементарных функций, в которые вместо действительного аргумента подставлен аргумент комплексный. Не владея геометрическим представлением комплексного числа (которое, как отмечалось в § 119, впервые было введено Гауссом лишь в 1799 г.) и рассуждая по аналогии, математики той эпохи часто приходили к парадоксальным результатам. Так, Лейбниц и И. Бернулли спорили о том, являются ли логарифмы отрицательных чисел мнимыми или действительными числами, причем ни тот, ни другой не предлагали какого бы то ни было определения логарифма в комплексной области. Такое определение, учитывающее многозначность логарифма, было дано Эйлером в 1749 г. Заметим попутно, что символ i также был введен Эйлером, а термин «комплексный» — Гауссом в 1831 г.

Базой для дальнейшего развития этого направления послужили работы Непера, Абеля, Гаусса, Грина, Даламбера, Дирихле, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Эйлера, опираясь на которые Коши, Риман и Вейерштрасс заложили основы современной теории функций комплексного переменного.

После фундаментальных работ основоположников очень широко развернулись исследования как общей теории, так и отдельных важных классов функций: алгебраических, эллиптических, автоморфных* и др. Этим вопросам посвящено большое число работ выдающихся математиков: Ж. С. Адамара, С. Н. Бернштейна, Э. Бореля, В. Вольтерра, Д. Гильберта, В. В. Голубева, Г. Жюлиа, К. Каратеодори, Ф. Клебша, Ф. Клейна, Э. Кристоффеля, Э. Линделёфа, Н. Н. Лузина, Б. Монтеля, Р. Неванлинна, П. Пенлеве, Э. Пикара, И. И. Привалова, А. Пуанкаре, Ю. В. Сохоцкого, Г. Шварца, Ш. Эрмита и многих других. Область приложений этой теории была обогащена блестящими исследованиями Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина в гидро- и аэродинамике, Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили — в теории упругости.

Большое значение для развития теории функций комплексного переменного и ее многочисленных приложений имели глубокие исследования отечественных ученых: С. Н. Бернштейна, И. Н. Векуа, И. М. Виноградова, В. М. Глушкова, Б. В. Гнеденко, В. В. Голубева, Г. М. Голузина, Д. А. Граве, А. А. Дородницына, Н. Е. Жуковского, А. Ю. Ишлинского, Л. В. Канторовича, М. В. Келдыша, Н. Е. Кочина, П. Я. Кочиной, М. А. Лаврентьева, Н. Н. Лузина, А. И. Маркушевича, М. Д. Миллионщикова, Н. И. Мусхелишвили, А. И. Некрасова, Н. Н. Павловского, И. И. Привалова, Г. Н. Савина, Л. И. Седова, В. И. Смирнова, С. Л. Соболева, Ю. Д. Соколова, В. В. Соколовского, Ю. В. Со-

* Автоморфными называются однозначные аналитические функции, которые не изменяются при некоторой группе дробно-линейных преобразований аргумента; к ним принадлежат функции тригонометрические, гиперболические, эллиптические и модулярные.

хоцкого, Л. Н. Сретенского, В. А. Стеклова, Б. С. Стечкина, А. Н. Тихонова, С. А. Христиановича, С. А. Чаплыгина и многих других.

Фундаментальным вкладом в развитие теории функций комплексного переменного, в построение и разработку ряда сложных проблем механики и решения важных задач народнохозяйственного значения являются работы Михаила Алексеевича Лаврентьева. С именем Лаврентьева связано возникновение и развитие нового направления в теории приближенных конформных отображений. Речь идет о вариационных методах теории конформных отображений. С помощью этих методов М. А. Лаврентьев получил в 1938 г. классические результаты по теории волн и теории струй. Он применил их также к решению проблемы существования определенных классов течений несжимаемой жидкости. Вариационные методы Лаврентьева, как и все его основные работы, содержат не только результаты теоретического значения, но и являются средством эффективного решения прикладных задач и основой приближенных методов расчетов.

Важные задачи теории конформных отображений и их многочисленных приложений решены в совместных работах М. А. Лаврентьева и М. В. Келдыша. В этих исследованиях дано решение задачи жесткого удара о воду, изучены вопросы устойчивости решения задачи Дирихле и о единственности решения задачи Неймана, т. е. глубоко изучены вопросы математической теории и ее приложений. М. А. Лаврентьеву и М. В. Келдышу принадлежат исследования о движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, ставшие теоретической основой новой, быстроразвивающейся отрасли современной гидродинамики — теории корабля на подводных крыльях.

Исследования М. А. Лаврентьева относятся также к области механики сплошной среды, где он создал новые теории и направления, впервые поставил и решил очень важные народнохозяйственные задачи. Так, в частности, он разработал гидродинамическую теорию кумуляции, вместе с А. Ю. Ишлинским создал новую теорию динамической устойчивости стержней.

Особого внимания заслуживают открытые в 1960 г. М. А. Лаврентьевым новые приложения гидродинамики идеальной жидкости, где теория функций комплексного переменного нашла самое неожиданное применение в теории детонации и теории направленного взрыва. Благодаря этим его работам взрыв из вечного разрушителя превратился во взрыв-созидатель, с помощью которого в течение считанных секунд создают грандиозные земляные плотины и дамбы или сваривают металлы, которые другими способами соединить бывает очень трудно.

М. А. Лаврентьев создал на Украине, в Москве и Новосибирске широко известные научные школы в области теории функций комплексного переменного и механики сплошной среды. Много внимания ученый уделяет вопросам повышения эффективности преподавания математики в средней школе.

В настоящее время Михаил Алексеевич Лаврентьев продолжает с большим успехом вести огромную научно-организационную работу, являясь вице-президентом Академии наук СССР и председателем Сибирского отделения Академии наук СССР, одним из самых активных и непосредственных создателей которого он является.

Фундаментальные результаты в различных областях математики и механики получил Мстислав Всеволодович Келдыш. Основные его работы по математике относятся к теории функций комплексного переменного, теории приближений в комплексной области, теории приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, теории несамосопряженных операторов и теории потенциала.

В области приложений М. В. Келдыш посвятил часть своих работ изучению неустановившегося движения тел в жидкости, влиянию сжимаемости на обтекание тел, развитию теории волновых движений и упругих колебаний в воздушном потоке, динамической прочности и вибрации самолетов. Он установил, что при некоторых видах вибрации крыла возникает тяговая сила, разработал теорию подъемной силы, приложенной к крылу самолета, с учетом сжимаемости воздуха. Ему принадлежит ряд основных результатов в теории движения подводного крыла, а также в теории волнового сопротивления.

Труды М. В. Келдыша являются образцом сочетания глубоких теоретических изысканий с их блестящим приложением к решению математических и технических

проблем, связанных с практикой нашего грандиозного строительства. На заре возникновения современной скоростной авиации ученые и конструкторы столкнулись с непонятным и грозным явлением: при подходе к известной границе скорости оперение и крылья самолета начинали безудержно вибрировать. Вибрация достигала такой силы, что машина распадалась в воздухе. Это явление было названо *флаттером*. Никакими мерами по усилению прочности самолета не удавалось устранить флаттер. М. В. Келдыш разработал полную математическую теорию флаттера, которая привела к конструктивному решению, устраняющему это явление. Так был преодолен один из барьеров, препятствовавших увеличению скорости в авиации. Келдыш разработал теорию автоколебаний колеса с пневматиками, а на основе этой теории — конструктивные принципы устранения автоколебаний трехколесных шасси при посадке самолета.

М. В. Келдыш и Л. И. Седов в совместной работе установили формулу, позволившую эффективно решить смешанную краевую задачу для гармонических функций и получившую многочисленные практические приложения.

Джон Непер.

С именем М. В. Келдыша связано становление новой науки — вычислительной математики, возникшей из задач новой техники. Его идеи и вычислительные методы сыграли большую роль в решении проблемы овладения ядерной энергией.

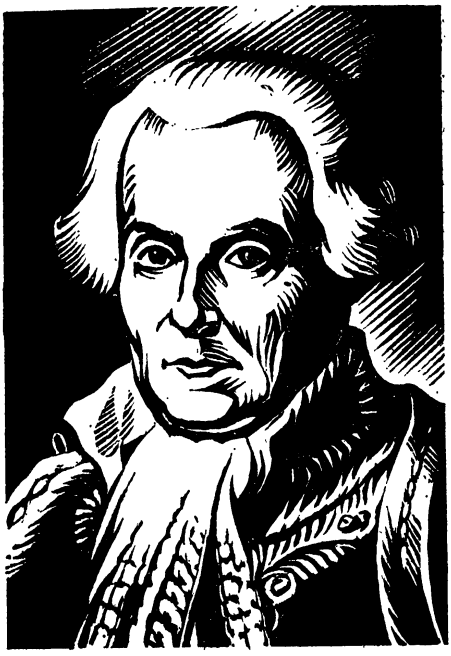
М. В. Келдыш внес выдающийся вклад в развитие советской космической науки и техники. Он выступил одним из инициаторов широкого развертывания в нашей стране работ по изучению и освоению космоса. С его деятельностью связаны такие блестящие достижения нашей науки и техники, как первые советские искусственные спутники Земли, первый космический полет человека, эксперименты на автоматических станциях, стартовавших к Луне и к планетам.

С 1961 г. Мстислав Всеволодович Келдыш является президентом Академии наук СССР и на этом ответственном посту счастливо сочетает в себе способности выдающегося исследователя-первооткрывателя, крупнейшего ученого-организатора и видного государственного деятеля.

Не имея возможности в данной книге более полно осветить работы по теории функций комплексного переменного, рекомендуем читателю обратиться к историческим очеркам, помещенным в книгах М. В. Келдыша и Л. И. Седова [51], А. И. Маркушевича [77] и Ю. Д. Соколова [130, стр. 161—171]. Подробный обзор работ отечественных ученых вместе с исчерпывающей библиографией по этим вопросам приведен в Истории отечественной математики [45, т. 4, книга 1, стр. 9—367].

Джон Непер (John Neper, Napier, 1550—1617), шотландский математик, изобретатель логарифмов*. Родился в знатной дворянской семье баронов Мерчистонских. После завершения образования в Эдинбурге и путешествия по

* Независимо от Непера логарифмы были открыты швейцарским механиком, мастером часовых дел, астрономом и математиком Иостом Бюрги (Jobst Bürgi, 1552—1632), который, однако, опубликовал свои таблицы в 1620 г., когда таблицы Непера уже получили широкое распространение (см. § 37).



Пьер Симон Лаплас.

Германии, Франции и Испании, в возрасте двадцати одного года навсегда поселился в родовом поместье близ Эдинбурга. К открытию логарифмов Непер пришел не позднее 1594 г., но затем потребовалось еще двадцать лет упорного труда, прежде чем он опубликовал свое «Описание удивительной таблицы логарифмов» («Mirifici logarithmorum canonis descriptio», Edinburgi, 1614 г.), содержавшее определение неперовых логарифмов, их свойства и таблицы логарифмов синусов и косинусов от 0 до 90° с шагом в 1′, а также разности этих логарифмов, дающие логарифмы тангенсов. В работе «Построение удивительной таблицы логарифмов» («Mirifici logarithmorum canonis constructio», Edinburgi, 1619 г.), написанной, вероятно, раньше, чем «Описание . . .», и изданной после смерти Непера, изложена теория созданных им логарифмов и указано, как перейти к десятичным логарифмам. Эта идея Непера была реализована профессором Оксфордского университета Генри Бриггом (Henry Briggs. 1561—1631), который вычислил и опубликовал первые в истории математики таблицы десятичных логарифмов, названные в его честь *бригговыми*.

Помимо логарифмов Непер получил ряд результатов в арифметике и в сферической тригонометрии. Особенно известны удобные для логарифмирования «аналогии», т. е. пропорции Непера, применяемые при решении сферических треугольников по двум сторонам и углу между ними, а также по двум углам и прилежащей к ним стороне.

Открытые Непером логарифмы явились не только мощным средством для выполнения вычислений, но и привели к появлению логарифмической функции, играющей важную роль во всем математическом анализе и, в частности, в теории функций комплексного переменного. В этой связи можно без преувеличения сказать вместе с Лапласом, что изобретение логарифмов «сократив труды астронома, удвоило его жизнь».

Пьер Симон Лаплас (Pierre Simon Laplace, 1749—1827), знаменитый французский астроном, математик и физик, член Парижской академии наук (с 1785 г.). Родился в Бомоне-ан-Ож (Нормандия) в крестьянской семье*. Первоначальное образование получил в школе ордена бенедиктинцев, однако вышел из нее атеистом. Профессор Парижской военной школы (с 1766 г.), он принимал участие в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнической школ. С 1790 г. Лаплас занимал пост главы Палаты мер и весов.

Лапласу принадлежит ряд открытий в механике, теории дифференциальных уравнений, теории ошибок, теории вероятностей, одним из основоположников которой он является. В своем пятитомном сочинении «Трактат о небесной механике» (1798—1825 г.) Лаплас объединил все важнейшие достижения (в том числе и свои собственные) в этой области астрономии со времен Ньютона.

Работы Лапласа по физике относятся к теории капиллярности, акустике, теплоте, молекулярной физике и ряду других областей. В частности, он вывел

---

* См., например, Ocagne M. d'., Histoire abrégée des scienses mathematique. Paris, 1922, p. 173.

барометрическую формулу, при помощи которой определяется изменение плотности воздуха в зависимости от высоты.

В математической физике широко известно уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

простейшее уравнение эллиптического типа. Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа, называются *функциями Лапласа* или *гармоническими функциями*. Действительная и мнимая части всякой аналитической функции являются функциями гармоническими.

В 1878—1912 гг. в Париже было издано четырнадцатитомное собрание сочинений Лапласа («Oeuvres...», Paris, 1878—1912).

Огюстен Луи Коши.

Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857), великий французский математик, член Парижской академии наук (с 1816 г.). Родился в Париже в семье крупного административного чиновника. Окончил Политехническую школу (в 1807 г.) и Школу мостов и шоссе (в 1810 г.).

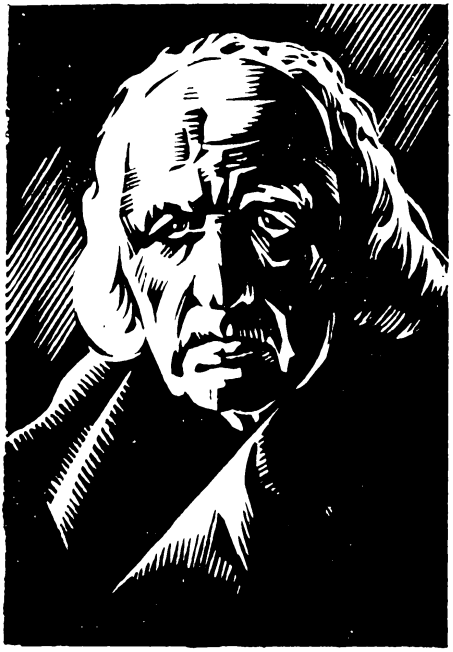
Коши принадлежит более 750 работ, относящихся ко всем областям математики и многим областям механики и физики. Он является одним из основоположников теории функций комплексного переменного. Ему принадлежит вывод формулы, которая выражает аналитическую функцию через интеграл, получивший название *интеграла Коши*. Пользуясь этой формулой, Коши получил разложение аналитической функции в степенной ряд, построил теорию вычетов и дал различные применения этой теории.

В теории дифференциальных уравнений Коши принадлежит постановка одной из самых важных задач — так называемой *задачи Коши*. Кроме того, он доказал теорему о существовании решений обыкновенных дифференциальных уравнений, разработал теорию уравнений в частных производных первого порядка. Ряд работ Коши относится также к математической физике, геометрии, алгебре, теории чисел.

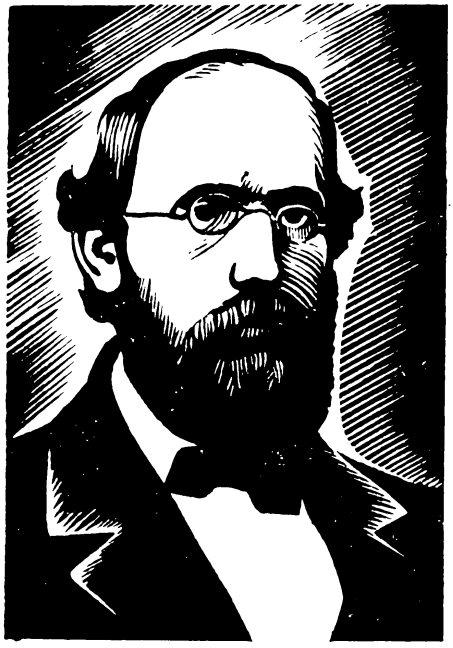
Одной из основных заслуг Коши является создание им курсов анализа, в которых дано строгое обоснование понятий и положений дифференциального и интегрального исчисления путем систематического использования понятия предела.

В 1882—1932 гг. в Париже было издано полное собрание сочинений Коши («Oeuvres complètes», série 1, t. 1—12; série 2, t. 1—13, Paris, 1882—1932).

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (Karl Theodor Wilgelm Weierstraß, 1815—1897), выдающийся немецкий математик, член Берлинской академии наук (с 1857 г.). Родился в Остенфельде (окр. Мюнстер). Изучал юридические науки в Бонне и математику в Мюнстере. В 1842—1855 гг. Вейерштрасс преподавал математику в средних учебных заведениях, а с 1856 г. стал профессором Берлинского университета. Большинство работ Вейерштрасса опубликовано после его смерти. Они относятся к математическому анализу, вариационному исчислению, теории функций комплексного переменного, линейной алгебре и дифференциальной геометрии. Большое значение имеют работы Вейерштрасса по обоснованию математического анализа. В основу теории аналитических функций он положил сте-



Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс.



Георг Фридрих Бернгард Риман.

пенные ряды. Вейерштрасс, независимо от Якоби, создал теорию эллиптических функций, положив в основу этой теории введенные и детально изученные им функции $\zeta(z)$, $\sigma(z)$ и $\rho(z)$, которые носят его имя. Вейерштрасс разработал также одну из теорий иррациональных чисел.

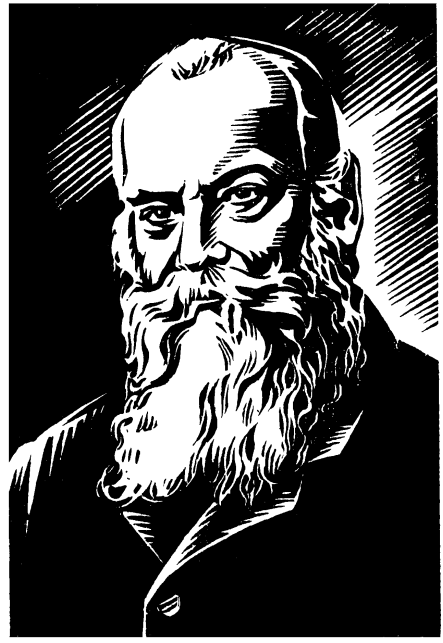
Георг Фридрих Бернгард Риман (Georges Friedrich Bernhard Riemann, 1826—1866), великий немецкий математик, один из создателей теории функций комплексного переменного, в которой положил начало новому геометрическому направлению. Родился в Брезеленце (в настоящее время провинция Ганновер, ФРГ). Образование получил в Геттингенском и Берлинском университетах. С 1857 г.— профессор Геттингенского университета. Его работы по теории функций комплексного переменного, по геометрии, механике, математическому анализу и теории чисел составили эпоху в каждой из этих областей и до сегодняшнего дня не утратили своего значения.

Для развития математики и геометрии важное значение имела прочитанная Риманом в 1854 г. лекция «О гипотезах, которые лежат в основе геометрии». В этой лекции впервые был высказан общий взгляд на геометрию, как на теорию аналитических многообразий (римановых пространств), в которых каждый элемент определяется при помощи упорядоченной совокупности чисел, а расстояние между двумя бесконечно близкими элементами — при помощи некоторой квадратичной формы. В зависимости от выбора коэффициентов квадратичных форм риманово пространство может быть евклидовым пространством, пространством Лобачевского и т. д. Риман также широко применил геометрию для построения теории аналитических функций, введя в рассмотрение *римановы поверхности* (однолистные и многолистные). Такой подход позволил наиболее простым путем изучать многозначные функции и те отображения, которые они реализуют. В теории конформных отображений Риман доказал основную теорему, которая носит его имя.

В математическом анализе большую роль сыграли роботы Римана по теории рядов и теории интеграла. Для дальнейшего развития теории чисел, а также для теории функций комплексного переменного существенную роль сыграла работа Римана «О количестве простых чисел, кото-

рые не превышают данную величину». В этой работе Риман подробно изучил свойства так называемой *дзета-функции*. Проблема определения нулей этой функции не решена до настоящего времени.

В 1948 г. Гостехиздатом были опубликованы «Сочинения» Римана (в переводе с немецкого), с большой обзорной статьей и примечаниями В. Л. Гончарова.



Николай Егорович Жуковский.

Николай Егорович Жуковский (1847—1921), крупнейший русский ученый, основоположник современной гидро- и аэромеханики, член-корреспондент Петербургской академии наук (с 1894 г.). Родился близ с. Орехова Владимирской губернии (теперь г. Орехово-Зуево Московской обл.) в семье инженера путей сообщения. В 1868 г. окончил Московский университет. С 1872 г. — преподаватель математики в Московском высшем техническом училище (ныне им. Баумана), в котором работал до конца своей жизни. В 1876 г. он блестяще защитил магистерскую диссертацию «Кинематика жидкого тела», а в 1882 г. был удостоен ученой степени доктора прикладной математики за работу «О прочности движения». С 1886 г.— профессор Московского университета. В 1900 г. Жуковского выдвинули в действительные члены академии. Однако он отказался от этого предложения, поскольку работа в академии требовала переезда в Петербург, а покидать Москву он не хотел.

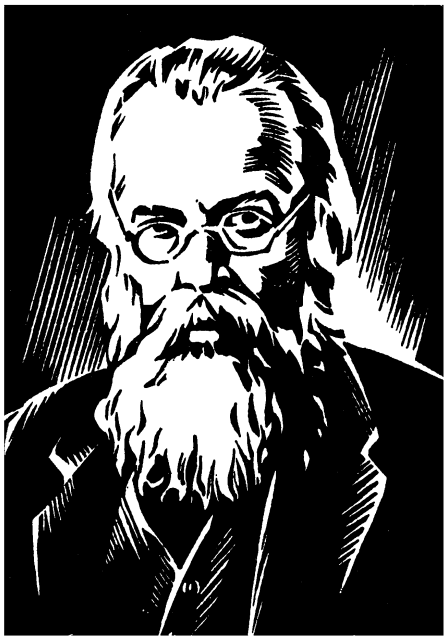
По инициативе Н. Е. Жуковского в 1918 г. был организован Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), носящий его имя и пользующийся мировой известностью. После Великого Октября многогранная деятельность Н. Е. Жуковского получила высокую правительственную оценку. Пятидесятилетие его научной деятельности было отмечено специальным Постановлением Совета Народных Комиссаров от 3 декабря 1920 г.* В. И. Ленин назвал его «отцом русской авиации».

Научные исследования Жуковского характеризуются большим разнообразием тем: исследования в области аэродинамики, гидравлики и гидромеханики, механики неизменяемых систем, математики и астрономии. Особенно успешные исследования Жуковский провел в области гидромеханики и аэромеханики. Он создал теорию так называемого гидравлического удара, открыл закон, определяющий величину подъемной силы крыла самолета, разработал вихревую теорию воздушного винта, определил наивыгоднейшие профили крыльев и лопастей винта самолета. Теоретически предсказанная Жуковским возможность выполнения «мертвой петли» была осуществлена впервые в 1913 г. русским летчиком П. Н. Нестеровым.

Характерной особенностью всего его научного творчества является широкое внедрение геометрических методов не только в механике, но и в математике. С его именем связано также широкое применение в прикладных вопросах методов теории функций комплексного переменного.

В 1935—1937 гг. было издано десятитомное «Полное собрание сочинений» Н. Е. Жуковского под редакцией А. П. Котельникова.

* Текст Постановления приведен в первом томе «Полного собрания сочинений» Н. Е. Жуковского.



Владимир Андрсевич Стеклов.

Владимир Андреевич Стеклов (1863—1926), выдающийся отечественный математик и механик, академик Петербургской академии наук (с 1912 г.); вице-президент АН СССР (1919—1926 гг.). Родился в Нижнем Новгороде (теперь г. Горький) в семье преподавателя духовной семинарии. В 1887 г. окончил Харьковский университет, в котором работал с 1889 по 1906 г. (профессор с 1896 г). Одновременно работал в Харьковском технологическом институте (1893—1905 гг.). В 1906 г. переехал в Петербург и до 1919 г. был профессором Петербургского университета.

Научным руководителем В. А. Стеклова был А. М. Ляпунов. Это в значительной степени определило проблематику исследований молодого ученого, в частности его диссертаций: магистерской — «О движении твердого тела в жидкости» (1893 г.) и докторской — «Общие методы решения задач математической физики» (1902 г.).

Работы Стеклова относятся к математическому анализу, теории упругости, гидромеханике, математической физике, теориии дифференциальных уравнений. Он решил задачу о движении по инерции твердого тела в несжимаемой жидкости, задачу о движении тяжелого тела в тяжелой жидкости, а также ряд задач по теории потенциала. Стеклов разработал общую тсорию фундаментальных функций, ввел понятие замкнутости ортогональной системы функций. Некоторые работы Стеклова посвящены разложению функций в ряд по фундаментальным функциям данной ортогональной системы.

В. А. Стеклов был организатором и первым директором Физико-математического института, разделенного впоследствии на три института, один из которых — Математический институт АН СССР — носит теперь его имя. Научное наследие Стеклова составляет около 130 работ. С 1932 г. Математический институт АН СССР возглавляет выдающийся советский математик Герой Социалистического Труда академик И. М. Виноградов.

Дмитрий Александрович Граве (1863 — 1939), выдающийся украинский математик, академик АН УССР (с 1919 г.), почетный член АН СССР (с 1929 г.). Родился в г. Кирилловке Новгородской губернии (теперь Вологодской обл.). Отец его был уездным предводителем дворянства и земским деятелем. В 1885 г. окончил Петербургский университет, а в 1889 г. защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка». В 1896 г. Граве защитил докторскую диссертацию «Об основных задачах математической теории построения географических карт», в которой, опираясь на труды Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Чебышева, Коркина, Маркова, Дарбу, внес свой существенный вклад в решение проблем дифференциальной геометрии, имеющих прямое отношение к картографии.

Большое внимание Граве уделял вопросам просвещения. Преподавал в высших учебных заведениях Петербурга: в университете (с 1889 г.), в Институте инженеров путей сообщения (с 1890 г.) и на Высших женских курсах с (1892 г.); в Харьковском университете (1897—1899 гг.) и в Киевском университете (с 1899 г.). В 1893 г. был издан его «Курс аналитической геометрии». В 1892—1894 гг. Граве принимал участие в работе над многотомным «Энциклопедическим словарем», издававшимся Брокгаузом и Ефроном, где поместил ряд статей, в том числе и больших по объему — «Геометрия», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисле-

ние», «Интегрирование дифференциальных уравнений». В 1908—1915 гг. он издал ряд курсов и учебных пособий по математическому анализу, высшей алгебре, теории групп, теории чисел, теории эллиптических функций, аналитической геометрии. Большой интерес представляет его капитальная работа «Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения», Киев, 1912, 601 с., которая не потеряла своего значения до настоящего времени. Работа по изданию учебников была продолжена затем в 1924—1939 гг.

Монографии, курсы и учебные пособия Д. А. Граве сыграли большую роль в развитии математического образования. Один из его выдающихся учеников Н. Г. Чеботарев писал: «Можно без особого преувеличения сказать, что книги Граве воспитали и привили вкус к математике большинству современных математиков Союза»*.

Дмитрий Александрович Граве.

Граве принимал активное участие в строительстве советской науки и культуры, в частности в реформе высшей школы В 1934 г. при непосредственном участии Граве был создан Институт математики АН УССР, который он возглавил и работой которого руководил до последних дней своей жизни. В этот же период Граве создал в Киеве школу выдающихся специалистов по алгебре и теории чисел, из которой вышли такие ученые, как В. П. Вельмин, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев, О. Ю. Шмидт и многие другие.

Перу Д. А. Граве принадлежит свыше 130 работ, основные из которых приведены в книге «Українська математична бібліографія», Изд-во АН УССР, К., 1963, стр. 94—98.

Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942), выдающийся советский ученый в области теоретической механики, аэро- и гидродинамики, академик АН СССР (с 1929 г.), Герой Социалистического Труда. Родился в г. Ряженбурге Рязанской области (ныне г. Чаплыгин). В 1890 г. блестяще окончил физико-математический факультет Московского университета и начал заниматься научными исследованиями. Уже в ранний период своей научной деятельности Чаплыгин решает труднейшие проблемы классической механики. Его первые исследования относятся к теории движения твердых тел в жидкости. Этой же теме посвящена и его магистерская диссертация «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости» (1897 г.). Докторской диссертацией «О газовых струях» (1902 г.) Чаплыгин положил начало современной аэродинамике звуковых и сверхзвуковых скоростей. Дальнейшие исследования Чаплыгина относятся к различным областям математики и механики: приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, динамике твердого тела, динамике неголономных систем, гидроаэромеханике, баллистике, аналитической механике. Эти работы, получившие широкое распространение, положены в основу многочисленных исследований современных советских и зарубежных ученых.

С 1921 г., после смерти Н. Е. Жуковского (учеником и последователем которого он был) Чаплыгин принял на себя научное руководство Центральным аэрогидродинамическим институтом (ЦАГИ). Большое внимание он уделял также

* Сборник, посвященный памяти акад. Д. А. Граве, Гостехиздат, М. — Л., 1940, стр. 12.

Сергей Алексеевич Чаплыгин

Николай Николаевич Лузин.

преподавательской деятельности и воспитанию научных кадров. Научная школа, которую создал Чаплыгин, получила всеобщее признание как в нашей стране, так и далеко за ее пределами. Более подробно о математических работах Чаплыгина хорошо изложено в книге М. В. Келдыша и Л. И. Седова [51] и во вступительной статье [159, стр. 5—8], принадлежащей М. В. Келдышу и Д. Ю. Панову, а также в биографическом очерке В. В. Голубева «Сергей Алексеевич Чаплыгин», Изд-во МГУ, 1951.

Четырехтомное «Собрание сочинений» С. А. Чаплыгина издано Гостехиздатом в 1948—1950 гг.

Николай Николаевич Лузин (1883—1950), выдающийся советский математик, академик АН СССР (с 1929 г.). Родился в Томске в семье служащего. В 1908 г. окончил Московский университет и по рекомендации профессора Д. Ф. Егорова был оставлен при университете для подготовки к преподавательской деятельности. В 1909 г. он сдал магистерский экзамен, а в 1910 г. — получил звание приват-доцента. Его докторская диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд», опубликованная в 1915 г. и защищенная в 1916 г., получила высокую оценку ряда крупнейших специалистов того времени.

Основные работы Лузина относятся к теории функций действительного переменного, к математическому анализу, дифференциальным уравнениям, дифференциальной геометрии. Н. Н. Лузин является одним из основоположников дескриптивной теории функций и множеств. Ему принадлежат новые определения аналитических множеств и ряд глубоких результатов по теории проективных множеств. Широкое распространение получили также учебники по дифференциальному и интегральному исчислению и по теории функций действительного переменного.

Вместе со своим учителем Д. Ф. Егоровым Н. Н. Лузин является основателем Московской математической школы, занимающей одно из первых мест в мировой математической науке.

В 1953—1959 гг. вышло в свет трехтомное «Собрание сочинений» Н. Н. Лузина, а список его печатных трудов помещен в новом издании книги «Интеграл и тригонометрический ряд», Гостехиздат, М.— Л., 1951, стр. 538—545.

Контрольные упражнения

1. Записать в тригонометрической форме числа:

а) $-7i$; б) $1+i$; в) $\sqrt{3}-i$; г) $1-i\sqrt{3}$; д) $2+5i$.

2. Найти:

а) $\dfrac{1+i}{1-i}$; б) $\dfrac{2}{i}$; в) $(1+i\sqrt{3})^3$; г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt{3+4i}$.

3. Доказать, что если $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, то точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами правильного треугольника, вписанного в круг радиуса 1 с центром в начале координат.

4. Найти частные производные первого порядка от функции

$$u(x, y)=e^x+3xy^2-\cos(x+y).$$

5. Проверить условия Коши — Римана для функций:

а) $w=z^3$; б) $w=\cos z$; в) $w=z^2+\sin z$.

6. Вычислить по формулам (VIII.51) с шестью значащими цифрами значение функции $w=e^z$ при $z=0{,}4$; $-0{,}4$; $0{,}4i$; $\dfrac{\pi}{2}i$.

7. Вычислить с той же точностью, что и в упражнении 6 значения функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ при $z=0{,}4$; $-0{,}4$; $0{,}4i$; $\dfrac{\pi}{2}i$, а затем результаты проконтролировать при помощи тождеств $\cos^2 z+\sin^2 z=1$; $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$.

8. Доказать тождества:

а) $\sin 2z=2\sin z\cos z$; б) $\operatorname{sh} 2z=2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z$;

в) $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$; г) $\operatorname{ch} 2z=\operatorname{sh}^2 z+\operatorname{ch}^2 z$;

д) $\operatorname{tg} 2z=\dfrac{2\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg}^2 z}$; е) $\operatorname{th} 2z=\dfrac{2\operatorname{th} z}{1+\operatorname{th}^2 z}$.

9. Найти:

а) $\operatorname{Arcsin} 3$; б) $\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}-i)$; в) $\operatorname{Arth} i$.

10. Построить графики функций $w=\operatorname{sn} x$; $w=\operatorname{cn} x$ и $w=\operatorname{dn} x$ при $k^2=0{,}9$

11. Определить величину периодов функций Якоби при $k^2=0{,}35$.

12. Вычислить с пятью верными десятичными знаками $\operatorname{sn}(z, k)$ при $z=0{,}77+0{,}61i$ и $k^2=0{,}5$.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава I

§ 1. *Упражнение 1.* Точка (5; 4) находится в первом квадранте, точка (—3; 5) — во втором.

Упражнение 3. A (3,5; 2,0), B (2; 2) C (—2; —1), D (—4; —2).

Упражнение 5. Координаты произвольной точки второго квадранта ($-x$, $+y$), четвертого — ($+x$, $-y$).

Упражнение 6. Для оси ординат $x = 0$; координаты начала $x = 0$, $y = 0$.

Упражнение 7. Точек, симметричных к M (—4; —3), будет три (+4; —3), (+4; +3), (—4; +3).

§ 2. *Упражнение 1.* Расстояние от начала координат точки (8; 3) будет

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54;$$

для точки (—8; —3), как симметричной относительно начала к точке (8; 3), расстояние будет также $\approx 8{,}54$; для точки (2; 7) $r = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \approx 7{,}28$; для точки (0; 5) $r = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$.

Упражнение 2. Вычислить для заданных точек расстояния от начала координат, а затем сравнить их.

Упражнение 3. Расстояние между точками M_1 (2; 4) и M_2 (5; 8)

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (8 - 4)^2} = 5,$$

между точками A (3; —2) и B (—4; —7)

$$r_{12} = \sqrt{(-4 - 3)^2 + [-7 - (-2)]^2} = \sqrt{49 + 25} \approx 8{,}60.$$

Упражнение 4. Длину сторон треугольника находим как расстояние между двумя точками, соответствующими его вершинам: $AB = 3$; $BC = 5$; $AC = 4$.

Упражнение 5. При $b = 0$.

Упражнение 6. Здесь $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 6$, $y_2 = 13$; $m = 3$; $n = 1$. Искомые координаты будут $x = 5$, $y = 10{,}5$.

Упражнение 7. Координаты концов симметричного относительно оси отрезка будут: A (—2; 3), B (—6; 13).

Упражнение 8. Координаты середины стороны AB — (0,5; 3) AC — (0,5; —0,5), BC — (3; 1,5),

Упражнение 9. Для середины AB — (—1; 3,5), AC — (—1; 0,5) BC — (—2; 0). Вершины B и C симметричны относительно оси x.

Упражнение 11. Здесь $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, $x_3 = 4$; $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 5$. Искомая площадь $S = 11$.

§ 5. *Упражнение 1.* $k = 0{,}014$; $k = -0{,}010$; $k = 0{,}0264$.

Упражнение 4. $x^* = x - (-5) = x + 5$; $y^* = y - 3$.

Упражнение 5. Новые координаты определяются формулами

$$x^* = x - 7;\ y^* = y - 2$$

и, например, для точки (7; —8) они будут $x^* = 7 - 7 = 0$, $y^* = -8 - 2 = -10$.

Упражнение 6. Для первой пары точек (7; 2) и (—5; —10) расстояние:

$$r = \sqrt{[7 - (-5)]^2 + [2 - (-10)]^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}.$$

В новой системе координаты точек будут (0; 0) и (—12; —12) и по-прежнему

$$r = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}.$$

Для точек (0; 3) и (—2; 0) $r = \sqrt{13}$.

Для точек (7; —8) и (4; 1) $r = 3\sqrt{10}$.

Упражнение 7. Примем точку (x_1, y_1) за начало новой системы координат, тогда новые координаты концов отрезка будут для $M_1(0; 0)$, для $M_2(x^* = x_2 - x_1,\ y^* = y_2 - y_1)$, а в таком случае в новой системе согласно формуле (I.1)

$$r = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}.$$

Заменяя здесь x^* и y^* их значениями, получаем искомую формулу

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Упражнение 8. $b = +7$.

Упражнение 9. $y = 5x - 2$; $y = \frac{1}{2}x + 12$.

§ 6. *Упражнение 2.* $x = 0$; $y = 5$.

Упражнение 4. а) $k = 2$, $b = \frac{15}{4} = 3{,}75$; в) $k = 3{,}5$, $b = -4$.

§ 7. *Упражнение 1.* Уравнение в отрезках на осях будет

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1.$$

Обратите внимание на то, что мы уравнению всегда придаем канонический вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, а знак минус, в случае необходимости, относим к величине отрезков a и b.

Итак, в данном примере $a = 5$, $b = -4$.

Упражнение 2. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$ или в виде с угловым коэффициентом $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

§ 8. *Упражнение 1.* Уравнение пучка

$$y - 7 = k(x - 2).$$

Для прямой с $k = \frac{1}{2}$ уравнение будет $y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2)$ или $y = \frac{1}{2}x + 6$; уравнение прямой, проходящей параллельно оси x $(k = 0)$,

$$y - 7 = 0.$$

Угловой коэффициент к соответствующей прямой пучка, проходящей через точку $M_2(5; 13)$, найдем, если подставим ее координаты $x = 5$ и $y = 13$ в уравнение пучка, так как точка лежит на искомой прямой. Тогда имеем

$$(13 - 7) = k(5 - 2), \text{ откуда } k = 2,$$

и уравнение прямой будет $y = 2x + 3$.

Упражнение 2. $\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-4}{5-4}$ или $y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$;

$\frac{x-0}{-3-0} = \frac{y-(-2)}{-5-(-2)}$ или $y = x - 2$;

$\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-2}{5-2}$ или $y = x + 2$.

Упражнение 3. $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

§ 9. *Упражнение 1.* $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 135°$.

Упражнение 2. $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{7}{4}$. При изменении значения свободных членов C_1 и C_2 величина рассматриваемого угла останется прежней.

§ 10. *Упражнение 1.* а) Параллельны; б) не параллельны.

Упражнение 2. $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

§ 11. *Упражнение 1.* а) $x = -\frac{30}{31}$, $y = \frac{44}{31}$; б) прямые параллельны.

Упражнение 2. Координаты точки пересечения перпендикуляров (0; 0); $R = 5$.

§ 12. *Упражнение 5.* Число встречных экспрессов равно 14, что ясно из рис. 292, на котором движение экспресса по маршруту Москва — Владивосток изображено полужирной линией, а движение экспрессов по маршруту Владивосток — Москва изображено пунктирными линиями.

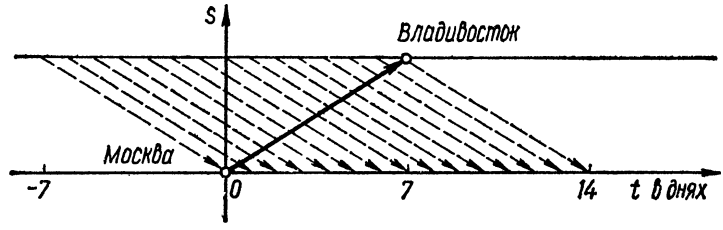


Рис. 292.

Контрольные упражнения

4. $y^* + 5 = 7(x^* + 3) - 10$ или $y^* = 7x^* + 6$; $a = 0$, $b = -10$.

5. Находим прежде всего отрезки на осях $a = 6$, $b = -14$.

Тогда $S = \frac{1}{2}ab = 42$.

6. $S = 2$.

7. $\frac{x}{6} + \frac{y}{-10} = 1$.

8. Начертите прямую $-10x + 7y = 14$ и отметьте на плоскости рассматриваемые точки.

9. Прямая симметричная относительно оси y, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{5} = 1$;

прямая симметричная относительно оси x, $\frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$;

прямая симметричная относительно начала координат, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-5} = 1$.

12. Уравнение стороны AB, $2x - y = 4$;
уравнение стороны BC, $4x + 3y = 28$;
уравнение стороны AC, $x + 2y = 7$;
уравнение медианы, $3x + y = 16$.

14. Так как заданное уравнение можно разделить на любое число, в частности на один из его коэффициентов, например C, то уравнению можно придать вид

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 1.$$

Следовательно, независимых параметров только два: отношение двух коэффициентов к третьему.

Глава II

§ 14. *Упражнение 1.* $x^2+y^2=16$; $(x-3)^2+(y+2)^2=49$.

Упражнение 2. $x=x^*+3$, $y=y^*-2$; $(x^*)^2+(y^*)^2=49$.

Упражнение 3. Внутри окружности лежат точки (0, 2; —0,3), $\left(-\frac{3}{5};\ \frac{2}{7}\right)$; на окружности — (0; 1), (0,6; —0,8), $\left(-\frac{7}{13};\ -\frac{12}{13}\right)$; вне окружности — (1; 2), (2,7; 0,7).

Упражнение 5. M_1 и M_2 лежат, M_3 не лежит.

Упражнение 6. Решений два: $x_1=0$; $x_2=-4$.

Упражнение 8. $r=6$.

Упражнение 9. $x+2y+5=0$.

§ 15. *Упражнение 2.* $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{6}$; $\varepsilon=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Упражнение 3. $2a=26$; $2b=10$; $2c=24$; $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}$.

Упражнение 6. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$.

Упражнение 7. В данном случае фокусы эллипса расположены на оси ординат, так что $b>a$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $c=5$. Искомое уравнение будет $36x^2+20y^2=1125$.

Упражнение 8. A и B лежат, C не лежит.

Упражнение 9. $y_1=+3$, $y_2=-3$, $r_{12}=6$.

Упражнение 10. $\left(\frac{6}{7};\ \frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$, $\left(\frac{6}{7};\ -\frac{12\sqrt{3}}{7}\right)$.

§ 17. *Упражнение 1.* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$; $c=13$; $\varepsilon=\frac{13}{5}=2{,}6$.

Упражнение 2. M_1 и M_2 лежат на гиперболе, M_3 и M_4 не лежат. Точка B лежит на асимптоте $y=-\frac{3}{2}x$, точки A и C не лежат.

Упражнение 3. а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; б) $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$; в) задача невозможна, так как $c=3$, $2a=8$ и, следовательно, $a>c$.

Упражнение 5. $a=4$, $b=3$, $c=5$, $\varepsilon=1{,}25$. Уравнение асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Упражнение 6. Точки пересечения заданной прямой с гиперболой будут $\left(\pm 2\sqrt{3};\ \mp\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$. С асимптотами прямая $2x+3y=0$ пересекается в начале координат.

§ 18. *Упражнение 1.*

$$x^*=(x-4)\cos\alpha+(y-5)\sin\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}[(x-4)\sqrt{3}+(y-5)],$$
$$y^*=-(x-4)\sin\alpha+(y-5)\cos\alpha=\frac{1}{2}[(4-x)+(y-5)\sqrt{3}].$$

Упражнение 2. M_2 лежит, M_1 и M_3 не лежат.

Упражнение 4. а) $x_1=1{,}8$; $x_2=-0{,}7$; б) $x_1\approx 1{,}372$; $x_2\approx -0{,}578$.

Упражнение 5. Ординаты точек пересечения определяются уравнением $9y^4-144y^2+16=0$. Поэтому искомыми точками (с четырьмя десятичными знаками) будут (0,2509; 3,9860), (—0,2509; —3,9860), (2,9895; 0,3345), (—2,9895; —0,3345).

§ 19. *Упражнение 2.* Координаты вершин будут

$$\begin{cases} m=-1, \\ n=2, \end{cases} \quad \begin{cases} m=-\frac{5}{6}, \\ n=-10\frac{1}{12}, \end{cases} \quad \begin{cases} m=\frac{7}{4}, \\ n=-16\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Упражнение 3. M_2 и M_3 лежат, M_1 и M_4 не лежат.

Упражнение 5. а) При вычислениях с тремя десятичными знаками:

$$M_1(1{,}386;\ -0{,}686),\ M_2(0{,}802;\ -4{,}189),\ r_{12}=\sqrt{12{,}607}=3{,}551.$$

в) Прямая $y=x+1$ заданную параболу не пересекает.

§ 20. *Упражнение 3.* (0; 0) и (4; 4). Абсциссы искомых точек находим из уравнения $4x^2=4x$.

Упражнение 5. В данном случае $\frac{p}{2}=3$, $p=6$, следовательно, уравнение искомой параболы будет $y^2=2px=12x$.

Упражнение 8. $a=4p\sqrt{3}$. Треугольник расположен симметрично относительно оси параболы; одна из его вершин совпадает с вершиной параболы, а противолежащая сторона перпендикулярна к оси параболы.

Упражнение 11. $\left(+\sqrt{15};\ \frac{5}{4}\right),\ \left(-\sqrt{15};\ \frac{5}{4}\right)$.

Упражнение 13. $h=5$ *м*.

Упражнение 14. Парабола, имеющая данную точку фокусом и данную прямую — директрисой.

Контрольные упражнения

3. $(x+5)^2+(y-3)^2=100$. Уравнению окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ должны удовлетворять координаты данных точек. Подставляя последовательно вместо текущих координат координаты этих точек, получим три уравнения относительно неизвестных величин a, b и R, решив эту систему, найдем искомое уравнение.

5. $B=A$, $C=A$, $D=-2A$, $E=-3A$, $F=-12A$.

Уравнение окружности радиуса 5 с центром в точке (2; 3) может быть написано в виде $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, или, раскрывая скобки и перенося все члены в левую часть уравнения: $x^2+y^2-4x-6y-12=0$. Так как уравнение $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ должно выражать эту же окружность, то коэффициенты этого уравнения должны быть пропорциональны коэффициентам написанного выше уравнения.

12. $y=\pm\frac{1}{3}x$.

18. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{5}=1$.

19. $a=\frac{p}{\varepsilon^2-1}=\frac{5}{3}$; $b=\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}=\frac{5}{3}\sqrt{3}$.

22. Правая ветвь гиперболы $y^2-\frac{x^2}{3}=1$.

26. $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, $(-1;\ -1)$.

28. $x=\rho\cos\varphi=3\frac{\sqrt{3}}{2}$; $y=\rho\sin\varphi=\frac{3}{2}$.

30. Искомая кривая есть спираль Архимеда.

Глава III

§ 24. *Упражнение 1.* При $x = 0{,}05a$ объем $V = 0{,}0405a^3$.

§ 26. *Упражнение 2.* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Упражнение 3. а) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x+4}{x-3} = 7$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x(x-1)^2 - (x-1)\sin(x-1)}{(x-1)^2} = 2$.

§ 28. *Упражнение 2.* На сегменте $[-2\pi; 2\pi]$ функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет разрывы второго рода в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$.

§ 29. *Упражнение 1.* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \infty$.

§ 35. *Упражнение 1.* Положив в формуле (III. 54) $n = -2$, имеем $y' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

Упражнение 3. $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$; $y'|_{x=3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}21$; $y'|_{x=0} = \dfrac{1}{3}$.

Упражнение 4. $y' = 3(x^2 - 4x + 3)$; $y(0) = -2$; $y'(0) = 9$; $y(1) = 2$; $y'(1) = 0$.

§ 38. *Упражнение 1.* а) $y' = \dfrac{4x^3+3}{x^4+3x-1}$; б) $y' = \dfrac{M(4x^3+3)}{x^4+3x-1}$.

Упражнение 4. $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$; $y'(0) = 1$.

Контрольные упражнения

2. $f(0) = -7$; $f(1) = f(-1) = -6$; $f(2) = f(-2) = 9$; $f(3) = f(-3) = 74$.

3. Нечетные в случаях а) и д), четные в случаях в) и е), в случаях б) и г) заданные функции не обладают ни свойством четности, ни свойством нечетности.

4. $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{3\left(\dfrac{1}{x}\right)-2} = \dfrac{1+x^2}{x(3-2x)}$; $\dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{3x-2}{1+x^2}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+4}{1+x^2} = 1$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) = 1$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-5}{x^3+2} = -\dfrac{5}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{\cos x} = 3$.

7. $x = 0$; $x = 1$; $x = -3$.

8. Величины $\sin 2x$, $3x\cos x$ и xe^{x^2} есть бесконечно малые того же порядка, что и x. Бесконечно малыми высшего порядка будут величины x^3 и $x\operatorname{tg} x$, а величина $\sqrt{x(2+x)}$ есть бесконечно малая более низкого порядка, чем x.

9. При $x \to 1$ бесконечно малые величины $(1-x)$ и $(1-\sqrt{x})$ не эквивалентны, так как $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-x)'}{(1-\sqrt{x})'} = \lim\limits_{x\to 1} 2\sqrt{x} = 2$.

15. в) $y' = 200x^3(x^4-1)^{49}$; е) $f'(x) = \cos x + \dfrac{3}{x}$; и) $y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$.

Глава IV

§ 41. *Упражнение 1.* В данном случае $f'(x) = -x$. Тогда если $-\infty < x < 0$, то $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$, если $0 < x < +\infty$. Точка $x = 0$ является стационарной, так как $f'(0) = 0$.

Упражнение 3. На участке $(0; \pi)$ убывает и возрастает на участке $(\pi, 2\pi)$, а точки $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ являются для функции $f(x) = \cos x$ стационарными.

§ 42. *Упражнение 1.* $y' = 2(x + 1)$; в точке $x = -1$ функция имеет минимум. Других экстремумов исследуемая функция не имеет.

Упражнение 5. $y' = \cos x$; при $x = \frac{\pi}{2}$ исследуемая функция имеет максимум, а при $x = \frac{3}{2}\pi$ — минимум.

§ 43. *Упражнение 1.*

а) $y' = 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, б) $y' = e^x + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$,

$y'' = 6x - \frac{1}{4}x^{-3/2} = 6x - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$, $y'' = e^x - \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$,

$y''' = 6 + \frac{3}{8}x^{-5/2} = 6 + \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$, $y''' = e^x - \frac{1}{8}\cos\frac{x}{2}$.

Упражнение 2. а) $y'' = 6x$. На участке $-\infty < x < 0$ кривая выпукла, на участке $0 < x < +\infty$ кривая вогнута. Точка $x = 0$ является точкой перегиба.

б) $y'' = 12x^2 \geqslant 0$. Кривая всюду вогнута, а в точке $x = 0$ имеет минимум.

Упражнение 3. $x = 0$; π; 2π; 3π; 4π.

§ 45. *Упражнение 2.* Минимум дает квадрат со стороной $a = 20$ *м*.

Упражнение 4. Из всех прямоугольников с заданной площадью наименьшим периметром обладает квадрат.

Упражнение 5. Прямоугольник с вершинами в точках $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$; $y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}$.

Упражнение 6. Высота цилиндра равна $\frac{1}{3}$ высоты конуса.

Упражнение 7. Радиус основания цилиндра равен $\sqrt{\frac{2}{3}}R$, высота цилиндра равна $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Упражнение 8. Радиус полукруга равен высоте прямоугольника.

Упражнение 9. Каждая часть должна быть равна 6.

Упражнение 10. Каждая часть должна быть равна 5.

Упражнение 11. $x = \frac{1}{x} = 1$.

Упражнение 12. $R \approx 0{,}63$ *м*.

Упражнение 13. Ширина балки $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ *см*, высота ее $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ *см*.

Упражнение 14. $V' = 12x^2 - 8ax + a^2$; $x_{\max} = \frac{1}{6}a$; $V_{\max} = \frac{2a^3}{27}$.

Упражнение 15. $(2; \pm 2)$.

§ 46. *Упражнение 1.* Здесь $x_0 = 1$; $y_0 = 2$; $y' = 4x^3 - 2$; $f'(x_0) = y'|_{x=1} = 2$ и уравнение касательной будет $y - 2 = 2(x - 1)$ или $y = 2x$.

Упражнение 3. $y' = \frac{5x^4 - y}{5y^4 + x}$.

§ 47. *Упражнение 3.* $R_a = \frac{b^2}{a}$, $x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $y_c = 0$ для вершины $A(a; 0)$; $R_b = \frac{a^2}{b}$, $x_c = 0$, $y_c = -\frac{a^2 - b^2}{b}$ для вершины $B(0; b)$.

§ 48. *Упражнение 1.* Обе кривые имеют вертикальную асимптоту $x = 1$.

Упражнение 2. В случае параболы $y = f(x) = x^2$ первое условие (IV.28) не выполняется, так как

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty.$$

§ 49. *Упражнение 1.* Первый вариант: кривая имеет вертикальную асимптоту $x = \frac{3}{2}$ и наклонную асимптоту $y = \frac{1}{3}x + 3$; в точке с абсциссой $x = 9\frac{1}{2}$ кривая имеет минимум. Второй вариант: кривая имеет асимптоты $x = -2$ и $y = x - \frac{5}{2}$; в точке с абсциссой $x = -5$ кривая имеет максимум.

Упражнение 4. б) Исследуемая кривая в точке $(-1; -1)$ имеет минимум, в точке $(1; 1)$ — имеет максимум; точки $\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0; 0)$ $\left(+\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ суть ее точки перегиба; прямая $y = 0$ является ее единственной асимптотой.

Контрольные упражнения

2. а) $y_{\min} = -14$ при $x = -2$; г) $y_{\min} = -1$ при $x = 0$.

3. б) Наибольшее значение $y = 3$ при $x = -1$, наименьшее $y = -\frac{1}{5}$ при $x = 3$.

5. Длина боковой стороны равна $\sqrt{\frac{S}{\sin \alpha}} = \sqrt{2S}$.

6. Прямая отсекает на осях отрезки 4 и 6, т. е. имеет уравнение $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$, или $6x + 4y - 24 = 0$.

7. $x = 1$.

8. Центральный угол сектора равен $2\pi\sqrt{2/3}$.

10. а) $y'' = 24x + 14$, $y''' = 24$, $y^{IV} = 0$;

б) $y'' = 2 - \sin x - \frac{1}{(1+x)^2}$, $y''' = -\cos x + \frac{2}{(1+x)^3}$.

Глава V

§ 52. *Упражнение.* а) $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$; б) $\int \frac{3}{x^2}\,dx = -\frac{3}{x} + C$.

§ 53. *Упражнение 2.* $y = -2\sin x + C$; $C = 1$.

§ 55. *Упражнение 2.* а) $\frac{1}{2}x^2 + \ln x + C$; б) $\frac{3}{2}x^2 - 2x + 5\ln x + C$;

в) $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C$; г) $\frac{1}{4}x^4 - 2\cos x - 3\sin x + C$.

Упражнение 3. $y = \int (x^2 + 2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x + C$, где $C = 5$.

§ 56. *Упражнение 1.* а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \ln x + C$; б) $4x + \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2 + C$;

в) $\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)}\,dx = \int \frac{(1 + x^2) + x^2}{x^2(1 + x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$.

Упражнение 2. а) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}+C$; б) $\frac{1}{2}\sin(2x-5)+C$.

Упражнение 3. а) $-2\sqrt{1-x^2}+C$; б) $\frac{3}{2}\ln(1+x^2)+C$. в) Воспользовавшись подстановкой $\ln x = t$, получаем

$$\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

д) Воспользоваться подстановкой $\operatorname{arctg} x = t$; $\frac{dx}{1+x^2} = dt$.

Упражнение 4. а) $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$; в) $2\operatorname{arctg} x^2 + C$.

§ 57. *Упражнение 1.* $\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C$;

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x + C;$$

$$\int x^3\cos x\,dx = (3x^2-6)\cos x + (x^3-6x)\sin x + C.$$

Упражнение 2. а) $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$; б) $xe^x - e^x + C$; в) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$; г) искомый интеграл представить в виде суммы двух интегралов.

Упражнение 3. б) $(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C$; в) положить $u = \arcsin x$; $dv = dx$ и тогда получим

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

§ 58. *Упражнение 1.* а) $\int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$; в) $\int_0^2 e^x\,dx = e^x\Big|_0^2 = e^2 - 1$.

Упражнение 2. а) $\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{2\pi} = 0$; б) $\int_{-\pi/2}^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_{-\pi/2}^{\pi} = 1$.

§ 60. *Упражнение 1.* а) Воспользовавшись подстановкой $\sin x = \tau$, $\cos x\,dx = d\tau$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$, получаем

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\sin^3 x\,dx = \int_{-1}^{1}\tau^3\,d\tau = \frac{1}{4}\tau^4\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Упражнение 2. в) Представить $\sin^3 x = \sin x\cdot\sin^2 x = \sin x(1-\cos^2 x)$ и перейти к новой переменной $\cos x = \tau$, $-\sin x\,dx = d\tau$.

§ 63. *Упражнение 2.* $I_8 = 0{,}785398126$; $I_4 = 0{,}785392157$; $I_2 = 0{,}783333333$; $\varepsilon_8 = \frac{1}{15}(I_8 - I_4) = 0{,}000000398$; $\varepsilon_4 = \frac{1}{15}(I_4 - I_2) = 0{,}000137255$. Фактическая погрешность $\varepsilon_{8,\text{точн}} = \frac{\pi}{4} - I_8 = 0{,}000000037$; $\varepsilon_{4,\text{точн}} = \frac{\pi}{4} - I_4 = 0{,}000006006$.

§ 64. *Упражнение 2.* а) Табулированная функция есть $f(x) = e^x - 0{,}7236$.

§ 66. *Упражнение 2.* При $n = 4$ для $I = F(\varphi, k)$ получаем $\frac{h}{3} = \frac{7^\circ}{3} =$

$= 0{,}04072435$ *рад*, $\Sigma_4 = 12{,}234877$, $I_4 = \frac{h}{3}\Sigma_4 = 0{,}4982574$, и, соответственно, для $l = \mathcal{E}(\varphi, k)$ имеем $\Sigma_4 = 11{,}773089$, $I_4 = \frac{h}{3}\Sigma_4 = 0{,}4794514$.

Точные значения: $F(\varphi, k) = 0{,}4982577$; $\mathcal{E}(\varphi, k) = 0{,}4794505$.

§ 67. *Упражнение 1.* $Q = \int\limits_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}$.

Упражнение 2. $Q = \pi r^2$.

§ 68. *Упражнение 1.* $S = 4 \operatorname{sh} 0{,}75 = 3{,}28927$.

Упражнение 2. При $n = 4$ имеем $\Sigma_4 = 9{,}75156$, $I_4 = 1{,}27648 \approx 1{,}2765$. Точное значение для $k = 0{,}8$ будет $E(k) = 1{,}2763499$.

§ 69. *Упражнение 2.* $V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$.

Контрольные упражнения

1. а) $\frac{1}{8}x^8 + C$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{1}{4}x^4 + \cos x + C$; г) $e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\sin 2x + C$.

2. в) $(\operatorname{arctg} x)^2 + C$; г) $e^{-\cos x} + C$; д) $(\arcsin x)^2 + C$; е) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + C$.

3. а) $\sin x - x\cos x + C$; б) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$; в) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$; г) $x^4\left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{16}\right) + C$; д) $\frac{1}{2}(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$; е) $x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$.

5. $y = \int (2\sin x - 3\cos x)\,dx = -(2\cos x + 3\sin x) + C$, где $C = 15$.

6. $y = 2x^3 - 5x + 3$.

7. в) $e - \frac{1}{e} = 2\operatorname{sh} 1$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{4}$.

14. $V = \frac{1}{2}\pi^2$.

15. $s = t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 3t$.

Глава VI

§ 74. *Упражнение 1.* Для $\pi \approx 3{,}1416$ $\varepsilon = 0{,}000007$ и $\delta = 0{,}00022\%$;
для $\pi \approx 3{,}142$ $\varepsilon = 0{,}00041$ и $\delta = 0{,}013\%$;
для $\pi \approx 3{,}14$ $\varepsilon = 0{,}016$ и $\delta = 0{,}51\%$.

Упражнение 2. Для $\pi \approx 3\frac{1}{7} \approx 3{,}14286$ $\varepsilon = 0{,}00127$ и $\delta = 0{,}040\%$;

для $\pi \approx 3\frac{10}{71} \approx 3{,}14085$ $\varepsilon = 0{,}00074$ и $\delta = 0{,}024\%$;

для $\pi \approx 3{,}141855$ $\varepsilon = 0{,}00026$ и $\delta = 0{,}008\%$.

Упражнение 3. Относительная погрешность δ_1 взвешивания железнодорожного вагона в 18 раз меньше относительной погрешности δ_2, допущенной при взвешивании лекарства, так как

$$\delta_1 = \frac{50 \cdot 100}{45000} = 0{,}11\%, \text{ а } \delta_2 = \frac{0{,}01 \cdot 100}{0{,}5} = 2{,}0\%.$$

§ 75. *Упражнение 1.* При вычислении с одним запасным знаком

$$x = 1{,}047 + 0{,}785 + 5{,}385 + 6{,}557 = 13{,}774 \approx 13{,}77.$$

При вычислении с двумя запасными знаками

$$x = 1{,}0472 + 0{,}7854 + 5{,}3852 + 6{,}5574 = 13{,}7752 \approx 13{,}78.$$

Упражнение 2. $x = 3{,}1428571 - 3{,}1415927 = 0{,}0012644 \approx 0{,}00126$.

§ 77. *Упражнение 2.* Воспользовавшись таблицами [14], по известному $\lg y = \lg \sqrt[10]{10} = \frac{1}{10} \lg 10 = 0{,}1000000$ находим, что $y = 1{,}258926$. Подставив найденное значение $y = a_0$ в формулу (VI.13), получаем

$$a_1 = \sqrt[10]{10} = \frac{1}{10}\left(9 \cdot 1{,}2589260000 + \frac{10}{7{,}9433157493}\right) = 1{,}2589254118.$$

Возведя теперь y и c_1 в десятую степень, имеем

$$y^{10} = 10{,}0000467230; \quad a_1^{10} = 10{,}0000000006,$$

что позволяет судить о точности, с какой вычислены эти величины.

§ 79. *Упражнение 3.* Положив в формуле $y = A_0 + A_1 u$ соответственно $u = 0$ и $u = 1$, получаем систему двух уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_0 и A_1:

$$\left.\begin{aligned} y_{-1} &= A_0, \\ y_{+1} &= A_0 + A_1. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $A_0 = y_{-1}$, $A_1 = y_{+1} - y_{-1}$ и тогда

$$y = A_0 + A_1 u = y_{-1} + (y_{+1} - y_{-1})\, u = (1 - u)\, y_{-1} + u y_{+1},$$

или

$$y = v y_{-1} + u y_{+1}, \text{ где } v = 1 - u.$$

§ 81. *Упражнение 1.* При $n = 2$ $y(x) = 0{,}5580413733 \approx 0{,}55804$;
при $n = 4$ $y(x) = 0{,}5580520200 \approx 0{,}558052020$.

Упражнение 2. $x = 2{,}545358$.

§ 83. *Упражнение 2.* $n = 3$, так как, составив таблицу разностей, находим, что

$$\Delta^2 y = -0{,}000100 = \text{const}.$$

Контрольные упражнения

1. $x_1 \approx 15{,}273$, $\varepsilon_1 = 0{,}0004$, $\delta_1 = \dfrac{0{,}0004 \cdot 100}{15{,}273} = 0{,}0026\%$;

$x_2 \approx 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}000433$, $\delta_2 = \dfrac{0{,}000433 \cdot 100}{0{,}001} = 43\%$.

3. $\sqrt{15} \approx 3{,}873$, $(3{,}873)^2 = 15{,}000129$; $\sqrt[3]{15} \approx 2{,}466$, $(2{,}466)^3 = 14{,}996131$.

10. $\cos 0{,}82 = 0{,}68222$; $\operatorname{tg} 0{,}80 = 1{,}02964$; $e^{0{,}81} = 2{,}247908$; $\operatorname{sh} 0{,}81 = 0{,}90152$; $\operatorname{ch} 0{,}77 = 1{,}31139$; $\operatorname{ch} 0{,}80 = 1{,}33743$; $\operatorname{ch} 0{,}82 = 1{,}35547$; $\operatorname{th} 0{,}80 = 0{,}66404$.

Глава VII

§ 85. *Упражнение 2.* $x = 1{,}5121$.

Упражнение 4. Исследуемое уравнение имеет пять корней:

$x_1 = -1{,}507257$; $x_2 = -1{,}127091$; $x_3 = 0{,}632307$; $x_4 = 2{,}029434$; $x_5 = 2{,}414284$.

Упражнение 5. $x = 1{,}010556$.

§ 88. *Упражнение 1.* $x \approx 0{,}652$; $y \approx 1{,}283$; $f_1(x, y) = -0{,}004$; $f_2(x, y) = 0{,}002$.

Упражнение 2. $x = 0{,}43903$; $y = 1{,}72428$.

Упражнение 5. $x = -0{,}649416$; $y = 0{,}798087$.

§ 90. *Упражнение 1.* $p = x^{(0)} = 0{,}632478$; $y^{(0)} = 8{,}336566$; $\delta(p) = -0{,}000001$.
Упражнение 3. $f_3(0{,}49184) = 0{,}002557$; $f_3(0{,}49177) = -0{,}000026$.

Контрольные упражнения

1. а) $x_1 = 1{,}34$; $x_2 = -4{,}76$; $x_3 = 2{,}58$; б) $x_1 = 0{,}3732$; $x_2 = 0{,}1415$; $x_3 = 0{,}4622$.
Так как в случае линейной системы невязка $\delta(p)$ есть линейная функция, то при решении такой системы по методу вариации параметров необходимо выполнить только две пробы в фиксированных точках, например в точках $p_1 = 0$ и $p_2 = 1$ или в точках $p_1 = -1$ и $p_2 = 1$.

2. а) $x_1 = -x_3 = 1{,}896$, $x_2 = 0$; б) $x_1 = 1{,}045$; $x_2 = -0{,}200$; $x_3 = -0{,}942$.

3. а) $x = 0{,}7872$; б) $x = 0{,}7245$; в) $x = 0{,}6724$; г) $x = 2{,}029$.

7. $\varepsilon = 877$ *м*; $\delta = \dfrac{877 \cdot 100}{111815} = 0{,}78\%$.

8. $x_1 = -\dfrac{4}{5}$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

13. Данное уравнение имеет только один действительный корень $x = 1$, но найденный корень кратный, поскольку

$$f(1) = f'(1) = 0, \quad \text{где } f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 8.$$

Воспользовавшись этими результатами, исследуемую функцию можно представить в виде

$$f(x) = (x-1)^2(x^2+4),$$

что упрощает построение ее графика.

Глава VIII

§ 96. *Упражнение 1.* $\dfrac{1}{1+z} \approx 0{,}83333$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}18232$.

§ 97. *Упражнение 1.* $\log 1{,}375 = 0{,}138303$.

§ 98. *Упражнение 1.* Представим остаток ряда (VIII.51) в следующем виде:

$$R_n(z) = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{z^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{z^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{z}{n+2} + \frac{z^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right].$$

Заменяя каждый из множителей $(n+2)$, $(n+3)$, ... меньшим множителем $(n+1)$, мы все дроби в квадратных скобках увеличим, так что

$$R_n(z) < \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\left[1 + \frac{z}{n+1} + \left(\frac{z}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{z}{n+1}\right)^3 + \cdots\right].$$

В квадратных скобках стоит геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \dfrac{z}{n+1}$ и $a = 1$, сумма которой

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1 - \dfrac{z}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1-z}.$$

Объединяя эти результаты, мы и получаем

$$R_n(z) < \frac{z^{n+1} \cdot (n+1)}{(n+1)!\,(n+1-z)} = \frac{z^{n+1}}{(n+1-z)\,n!}.$$

§ 99. *Упражнение 2.* Так как $\frac{1}{2}\sin 2z = \frac{1}{2}\left[2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots\right]$, то

$$c_{2\nu} = 0; \quad c_{2\nu-1} = (-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}$$

и, следовательно,

$$c_3 = -0{,}66666667; \quad c_5 = 0{,}13333333; \quad c_7 = -0{,}01269841; \quad c_9 = 0{,}00070547;$$
$$c_{11} = -0{,}00002565; \quad c_{13} = 0{,}00000066.$$

§ 100. *Упражнение 2.* $\operatorname{th} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 - \frac{17}{315}z^7 + \frac{62}{2835}z^9 - \cdots$.

Контрольные упражнения

1. а) $\frac{1}{n^2-1}$; б) $\frac{(-1)^n}{\ln(2+n)}$; в) $\frac{\sin n\alpha}{n^2}$; г) $\frac{n}{3^n}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Ряды а) и в) сходятся, ряд б) расходится.

3. Ряд а) сходится, ряд б) расходится.

4. Ряды а) и в) сходятся неабсолютно, ряды б) и г) сходятся абсолютно.

5. $R = 2$.

6. $\int\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \cdots\right)dz = C + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 2^2} + \frac{z^3}{3\cdot 2^3} + \frac{z^4}{4\cdot 2^4} + \cdots;$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} + \cdots\right)' = \frac{1}{2^2} + \frac{2z}{2^3} + \frac{3z^2}{2^4} + \frac{4z^3}{2^5} + \cdots.$$

Глава IX

§ 102. *Упражнение 1.* Дифференцируя функцию $y = C(1 + x^2) - 3$, находим

$$\frac{dy}{dx} = 2xC.$$

В таком случае

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = (1 + x^2)\cdot 2xC - 2x\left[C(1 + x^2) - 3\right] \equiv 6x.$$

Упражнение 2. $C = 4$.

Упражнение 3. Представив заданное уравнение в виде $y\,dy = \sin x\,dx$, находим общий интеграл искомого уравнения

$$\frac{1}{2}y^2 = C - \cos x.$$

§ 103. *Упражнение 2.* $C = 1$; $y = x\arcsin x$.

Упражнение 3. $x^2 + 2xy - y^2 = C$.

§ 104. *Упражнение 2.* $y = \frac{x^3}{5} + \frac{C}{x^2}$. При $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{5}$ произвольная постоянная $C = 0$.

§ 105. *Упражнение.* Полученное линейное уравнение имеет следующее общее решение: $z = Cx + \frac{x^3}{2}$. В таком случае $y = \sqrt{z} = \sqrt{Cx + \frac{x^3}{2}}$.

§ 107. *Упражнение 2.* а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $y = (C_1 + C_2x)e^x$; б) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$; в) $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -3$, $y = C_1e^{-\frac{x}{2}} + C_2e^{-3x}$.

Упражнение 3. $\lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_2 = -1 - 2i$, $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$.

§ 110. *Упражнение 1.* $y(1) = 0{,}7055$; $y'(1) = 0{,}3971$; $y(-1) = 0{,}4953$; $y'(-1) = -0{,}0502$.

Упражнение 3. $y_1(\pm 1) = 0{,}91814 \approx 0{,}918$, $y_1'(\pm 1) = \mp 0{,}32156 \approx \mp 0{,}322$; $y_0(\pm 1) = \pm 0{,}95069 \approx \pm 0{,}951$; $y_0'(\pm 1) = 0{,}75619 \approx 0{,}756$.

Упражнение 4. Продифференцировав дважды ряд (IX.139), имеем

$$y_1' = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 7} - \frac{x^{11}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11} + \frac{x^{15}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12\cdot 15} - \cdots,$$

$$y_1'' = -x^2 + \frac{x^6}{3\cdot 4} - \frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \cdots =$$

$$= -x^2\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \ldots\right) = -x^2 y_1.$$

В случае ряда (IX.140) контроль выполняется аналогично.

§ 112. *Упражнение 3.* $u(1{,}50) = -0{,}5313277$; $u'(1{,}50) = -0{,}8202010$; $y(1{,}50) = 1{,}543682$; $u(-1{,}50) = 1{,}7609899$; $u'(-1{,}50) = 1{,}0457466$; $y(-1{,}50) = -0{,}5938402$; $u(2{,}00) = 0{,}7167584$; $u'(2{,}00) = 0{,}2230964$; $u(-2{,}00) = 0{,}7255496$; $u'(-2{,}00) = 3{,}0161734$.

§ 115. *Упражнение 3.* $\lambda_1 = \lambda_1^{(2)} = 30{,}9333$ $(\lambda_1^{(0)} \approx 30$; $\lambda_1^{(1)} = 30{,}92)$.

§ 116. *Упражнение 1.* При дублировании табл. 108 прежде всего вычисляем по рекуррентной формуле

$$\gamma_{2\nu+1} = -\frac{\gamma_{2\nu-1}}{2\nu(2\nu+1)}; \quad \gamma_0 = 0; \ \gamma_1 = 1; \ \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

всю колонку коэффициентов γ_n. Затем, положив в формулах (IX.289) $\alpha^2 = 0$, $\beta = 1$; $n = 0$, по известным $\gamma_0 = b_0 = 0$; $a_1 = a_1 = 1$; $c_0 = 1$ находим

$$\ddot{a}_2 = 0; \ \dot{a}_2 = \frac{\ddot{a}_2}{1} = 0; \ a_2 = \frac{\dot{a}_2}{2} = 0; \ b_1 = [\dot{a}_1 c_0] = 1; \ c_1 = -[\dot{a}_1 b_0] = 0.$$

При $n = 1$ по известным $\gamma_1 = b_1 = a_1 = 1$; $\dot{a}_2 = 2a_2 = 0$; $c_1 = 0$ аналогичным путем получаем

$$\ddot{a}_3 = \beta\gamma_1 - \alpha^2 b_1 = \beta - \alpha^2 = \frac{1}{2}; \ \dot{a}_3 = \frac{\ddot{a}_3}{2} = \frac{1}{4}; \ a_3 = \frac{\dot{a}_3}{3} = \frac{1}{12};$$

$$b_2 = \frac{1}{2}[\dot{a}_2 c_1] = \frac{1}{2}(\dot{a}_2 c_0 + \dot{a}_1 c_1) = 0; \quad c_2 = -\frac{1}{2}[\dot{a}_2 b_1] =$$

$$= -\frac{1}{2}(\dot{a}_2 b_0 + \dot{a}_1 b_1) = -\frac{1}{2}.$$

Ход дальнейших вычислений ясен из табл. 108.

Контрольные упражнения

1. а) $y = Cx$; б) $y^2 = C(1 - x^2) - 1$; в) $y - 7 = Ce^{\frac{1}{x}}$; г) $\frac{x+y}{xy} + \ln\frac{y}{x} = C$.

2. а) $2x^3 + 3y^2 = 3$; б) $y^2 = \frac{6x^2}{6 + x^2}$; в) $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{4} = 0$; г) $s = 2t^2 - 3t$; д) $y = 2\cos x$.

3. Уравнение является однородным. Его общий интеграл будет $x^3 + 3x^2 y - y^3 = C$. Интегральная кривая проходит через точку (1; 2) при $C = -1$.

4. $s = t\ln\frac{C}{t}$ или $te^{\frac{s}{t}} = C$.

5. $(x + y - 1)^5 (x - y - 1)^2 = C$.

6. $y = \int (6x^2 - 5)\,dx = 2x^3 - 5x + C$.

7. $y = \int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + C$, где $C = -17$.

8. $y = kx^2 + C$.

9. Дифференциальное уравнение задачи $\frac{d\theta}{dt} = \gamma(\theta - 20)$. Интегрируя, находим: $\theta - 20 = Ce^{\gamma t}$; $\theta = 100$ при $t = 0$; $\theta = 60$ при $t = 20$; поэтому $C = 80$; $40 = Ce^{20\gamma}$; $e^{\gamma} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$, следовательно, $\theta = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$. Полагая $\theta = 30$, найдем $t = 60$ *мин.*

10. $h \approx 180$ *м.*

11. а) $2y = (x + 1)^4 + C(x + 1)^2$; б) $y = Cx^a + \frac{x}{1 - a} + \frac{1}{a}$; в) $y = Ce^{ax} + \frac{e^{bx}}{b - a}$; г) $s = \sin t + C\cos t$.

12. $y^2(x^2 + 1 + Ce^{x^2}) = 1$.

Глава X

§ 120. *Упражнение 2.* $z_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$; $z_3 = \frac{5\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; $z_4 = -5$.

§ 126. *Упражнение 1.* $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^3\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2\sin x$.

Упражнение 2. $f(z) = \sin(x + iy) = \sin x\cos iy + \cos x\sin iy = \sin x\,\mathrm{ch}\,y + i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$. Следовательно, $u = \sin x\,\mathrm{ch}\,y$; $v = \cos x\,\mathrm{sh}\,y$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\,\mathrm{ch}\,y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x\,\mathrm{sh}\,y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x\,\mathrm{sh}\,y$; $\frac{\partial v}{\partial y} = \cos x\,\mathrm{ch}\,y$, так что условия Коши—Римана выполняются всюду.

§ 131. *Упражнение.* $e^{\pm 0,5i} = 0,877583 \pm 0,479426i \approx 0,87758 + 0,47943i$; $e^{\pm 2i} = -0,416146 \pm 0,909298i \approx -0,41615 \pm 0,90930i$.

§ 133. *Упражнение.* $\cos 0,8 = 0,696707 \approx 0,69671$; $\sin 0,8 = 0,717356 \approx 0,71736$. Контроль: $\cos^2 0,8 + \sin^2 0,8 = 0,485401 + 0,514600 = 1,000001$.

§ 134. *Упражнение 1.* Формулы (X.125) проще всего получить, воспользовавшись последовательно формулами (X.123) и (X.124).

Упражнение 3. Приняв в качестве нулевого приближения $z_0^{(0)} = 0,8$, находим $f(0,8) = 0,0207$; $f'(0,8) = 1,4141$; $\varepsilon_0 = 0,0146$.

По этим данным вычисляем первое приближение:

$$z_1^{(0)} = z_0^{(0)} - \varepsilon_0 = 0,8 - 0,0146 = 0,7854,$$

для которого, соответственно,

$$f(z_1^{(0)}) = 0,0000025975;\ f'(z_1^{(0)}) = 1,4142135623;\ \varepsilon_1 = 0,0000018367,$$

так что

$$z_2^{(0)} = 0,7854 - \varepsilon_1 = 0,7853981633.$$

По найденному $z_2^{(0)} \approx \frac{\pi}{4}$ вычисляем с требуемой точностью

$$\pi = 4z_2^{(0)} = 3,141592653 \approx 3,1415927.$$

§ 135. *Упражнение 3.* $\sin 20° = 0{,}342020143326$; $\cos 20° = 0{,}939692620786$.

§ 136. *Упражнение 2.* $AC = b = a \operatorname{tg} 68° = 24{,}75 \approx 25$ *м*.

Упражнение 3. $a = b\sqrt{3} \approx 240$ *м*.

§ 142. *Упражнение 1.* Для функции $\operatorname{cn}(z, k)$ $\tau = 4K = 11{,}63$ и $\tau' = 2K + 2iK' = 5{,}817 + 3{,}182i$. Для функции $\operatorname{dn}(z, k)$ $\tau = 2K = 5{,}817$ и $\tau' = 4iK' = 6{,}364i$.

$\operatorname{cn}\dfrac{K}{2} = \sqrt{\dfrac{k'}{1+k'}} = 0{,}4275$; $\operatorname{dn}\dfrac{K}{2} = \sqrt{k'} = 0{,}4729$; $\operatorname{cn} K = 0$; $\operatorname{dn} K = k' = 0{,}2236$, так как $k'^2 = 1 - k^2 = 0{,}05$; $k' = \sqrt{0{,}05} = 0{,}2236068... \approx 0{,}2236$.

$\operatorname{cn} i\dfrac{K'}{2} = \sqrt{\dfrac{1+k}{k}} = 1{,}423$; $\operatorname{dn} i\dfrac{K'}{2} = \sqrt{1+k} = 1{,}405$.

§ 143. *Упражнение 3.* В данном случае аргумент $z = z_2 + 10K + 2iK'$, где $z_2 = 0{,}247351 + 0{,}153802i$.

Поэтому, отбросив два действительных периода $\tau = 4K$ и один комплексный период $\tau' = 2K + 2iK'$ функции $\operatorname{cn} z$, получаем

$$\operatorname{cn} z = \operatorname{cn}(z_2 + 10K + 2iK') = \operatorname{cn} z_2 = 0{,}980711 - 0{,}037325i.$$

Аналогичным путем, отбросив пять действительных периодов $\tau = 2K$ функции $\operatorname{dn} z$ и приняв во внимание соответствующую формулу (X.226), находим

$$\operatorname{dn} z = \operatorname{dn}(z_2 + 10K + 2iK') = \operatorname{dn}(z_2 + 2iK') = -\operatorname{dn} z_2 = \\ = -0{,}990223 + 0{,}018483i.$$

Значения $\operatorname{cn}(z_2, k)$ и $\operatorname{dn}(z_2, k)$ вычисляем, перемножив непосредственно в табл. 120, соответственно, колонки коэффициентов b_n или c_n на колонки $\operatorname{Re} z_2^n$ и $\operatorname{Im} z_2^n$ и просуммировав результаты (что выполняется в один прием, без записи промежуточных результатов).

Подставив в тождества (X.193) и (X.194) найденные значения $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$ и значение $\operatorname{sn} z$, взятое из примера 3, убеждаемся, что все вычисленные знаки верные:

$$\operatorname{cn}^2 z + \operatorname{sn}^2 z = (0{,}960401 - 0{,}073210i) + (0{,}039599 + 0{,}073210i) = 1{,}000000;$$

$$\operatorname{dn}^2 z + k^2 \operatorname{sn}^2 z = (0{,}980200 - 0{,}036605i) + (0{,}019800 + 0{,}036605i) = 1{,}000000.$$

Контрольные упражнения

1. а) $-7i = 7(\cos 270° + i \sin 270°)$; б) $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i \sin 45°)$.

2. а) $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1}{2}(1+i)^2 = i$; б) $\dfrac{2}{i} = -2i$; в) $(1 + i\sqrt{3})^3 = -8$; г) $\sqrt[3]{+1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i \sin\dfrac{2k\pi}{3}$, где $k = 0, 1, 2$.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x + 3y^2 + \sin(x+y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 6xy + \sin(x+y)$.

5. а) $w = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$.

Следовательно, $u = x^3 - 3xy^2$; $v = 3x^2y - y^3$ и тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

9. а) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi - i\ln(3\pm 2\sqrt{2})$; б) $2k\pi + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{2} - i\left[\ln(1+\sqrt[4]{2}) + \right.$
$\left. + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right]$, $(2k+1)\pi - \operatorname{arctg}\sqrt[4]{2} - i\left[\ln(\sqrt[4]{2}-1) + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right]$;
в) $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)i$ $(k=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$.

10. Воспользоваться значениями функций $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$, приведенными в табл. 118.

11. При $k^2 = 0{,}35$ имеем $K = 1{,}7443506$; $K' = 2{,}0075984$. Отсюда, ограничиваясь пятью десятичными знаками, находим искомые периоды:

$\tau = 4K = 6{,}97740$; $\tau' = 2iK' = 4{,}01520i$ для $\operatorname{sn}(z, k)$;
$\tau = 4K = 6{,}97740$; $\tau' = 2(K + iK') = 3{,}48870 + 4{,}01520i$ для $\operatorname{cn}(z, k)$;
$\tau = 2K = 3{,}48870$; $\tau' = 4iK' = 8{,}03039i$ для $\operatorname{dn}(z, k)$.

12. $\operatorname{sn}(z, k) = 0{,}81363 + 0{,}39821i$. При вычислении $\operatorname{sn}(z, k)$ можно воспользоваться коэффициентами a_n, найденными в табл. 120.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение состоит из латинского и греческого алфавитов и таблиц I—V.

Таблицы I и II составлены с таким шагом Δx, чтобы при помощи интерполяционной формулы (VI.25) можно было на интервале $0 < x < 1$ находить значения искомых функций без потери точности табличных данных. Подробнее этот вопрос изложен в § 80 гл. VI. Исключение составляет только функция $\operatorname{Arth} x$, для которой при $x > 0{,}99$ интерполирование проводить нельзя. В этом случае надо перейти к функции $\operatorname{th} x$, решив соответствующую обратную табличную задачу.

Значение интерполяционных коэффициентов для $n = 4$ и $n = 6$ приведено в табл. III.

Таблицы I и II позволяют также находить значения функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x и e^{-x} для любого действительного аргумента $-\infty < x < +\infty$. Для этого в случае тригонометрических функций надо предварительно при помощи формул приведения привести заданное значение аргумента к табличному интервалу, а в случае экспоненциальной функции воспользоваться теоремой сложения (X.73). Необходимые для этого более точные значения констант π и e приведены в табл. V.

Функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{th} x$ при $x > 1$ можно также вычислять при помощи теорем сложения, однако их значения проще найти по формулам (X.148) и (X.156) по известным e^x и e^{-x}.

В табл IV приведены с семью десятичными знаками полные эллиптические интегралы первого рода, которые играют важную роль в теории эллиптических функций Якоби Более подробно об этом сказано в **§ 141—143 гл. X.**

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ			ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ		
Печатные буквы		Название буквы	Печатные буквы		Название буквы
курсивные	прямые		строчные	прописные	
a A	a A	а	α	Α	а́льфа
b B	b B	бэ	β	Β	бэта
c C	c C	цэ	γ	Γ	га́мма
d D	d D	дэ	δ	Δ	де́льта
e E	e E	э	ε	Ε	эпсило́н
f F	f F	эф	ζ	Ζ	дзэта
g G	g G	ге (жє)	η	Η	эта
h H	h H	ха (аш)	ϑ	Θ	тэта
i I	i I	и	ι	Ι	ио́та
j J	j J	йот (жи)	κ	Κ	ка́ппа
k K	k K	ка	λ	Λ	ла́мбда
l L	l L	эль	μ	Μ	мю
m M	m M	эм	ν	Ν	ню
n N	n N	эн	ξ	Ξ	кси
o O	o O	о	ο	Ο	омикро́н
p P	p P	пэ	π	Π	пи
q Q	q Q	ку	ρ	Ρ	ро
r R	r R	эр	σ; ς*	Σ	сигма
s S	s S	эс	τ	Τ	та́у
t T	t T	тэ	υ	Υ	ипсило́н
u U	u U	у	φ	Φ	фи
v V	v V	вэ	χ	Χ	хи
w W	w W	дубль-вэ	ψ	Ψ	пси
x X	x X	икс	ω	Ω	оме́га
y Y	y Y	игрек			
z Z	z Z	зэт			

* Начертание ς употребляется только в конце слов. Например, Σωκράτης — Сократэс; μορφος — морфос (форма, вид).

Таблица I. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$
0,00	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000	1,570796	0,000000
01	010000	0,999950	010000	010000	560796	010000
02	019999	999800	020003	020001	550795	019997
03	029996	999550	030009	030005	540792	029991
04	039989	999200	040021	040011	530786	039979
05	049979	998750	050042	050021	520775	049958
06	059964	998201	060072	060036	510760	059928
07	069943	997551	070115	070057	500739	069886
08	079915	996802	080171	080086	490711	079830
09	089879	995953	090244	090122	480674	089758
0,10	0,099833	0,995004	0,100335	0,100167	1,470629	0,099669
11	109778	993956	110446	110223	460573	109560
12	119712	992809	120579	120290	450506	119429
13	129634	991562	130737	130369	440427	129275
14	139543	990216	140922	140461	430335	139096
15	149438	988771	151135	150568	420228	148890
16	159318	987227	161379	160691	410106	158655
17	169182	985585	171657	170830	399967	168390
18	179030	983844	181970	180986	389810	178093
19	188859	982004	192320	191162	379634	187762
0,20	0,198669	0,980067	0,202710	0,201358	1,369438	0,197396
21	208460	978031	213142	211575	359221	206992
22	218230	975897	223619	221814	348982	216550
23	227978	973666	234143	232078	338719	226068
24	237703	971338	244717	242366	328430	235545
25	247404	968912	255342	252680	318116	244979
26	257081	966390	266022	263022	307774	254368
27	266731	963771	276758	273393	297403	263712
28	276356	961055	287554	283794	287002	273009
29	285952	958244	298413	294227	276569	282257
0,30	0,295520	0,955336	0,309336	0,304693	1,266104	0,291457
31	305059	952334	320328	315193	255603	300606
32	314567	949235	331389	325729	245067	309703
33	324043	946042	342525	336304	234493	318748
34	333487	942755	353737	346917	223879	327739
35	342898	939373	365028	357571	213225	336675
36	352274	935897	376403	368268	202528	345556
37	361615	932327	387863	379009	191787	354380
38	370920	928665	399413	389796	181000	363147
39	380188	924909	411055	400632	170165	371856
0,40	0,389418	0,921061	0,422793	0,411517	1,159279	0,380506
41	398609	917121	434631	422454	148342	389097
42	407760	913089	446573	433445	137351	397628
43	416871	908966	458621	444493	126304	406098
44	425939	904752	470781	455599	115198	414507
45	434966	900447	483055	466765	104031	422854
46	443948	896052	495449	477995	092801	431139
47	452886	891568	507966	489291	081506	439361
48	461779	886995	520611	500655	070142	447520
49	470626	882333	533388	512090	058707	455616
0,50	0,479426	0,877583	0,546302	0,523599	1,047198	0,463648

Продолжение табл. I

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$
0,50	0,479426	0,877583	0,546302	0,523599	1,047198	0,463648
51	488177	872745	559359	535185	035612	471616
52	496880	867819	572562	546851	023945	479519
53	505533	862807	585917	558601	012196	487359
54	514136	857709	599430	570437	000359	495133
55	522687	852525	613105	582364	0,988432	502843
56	531186	847255	626950	594386	976411	510488
57	539632	841901	640969	606506	964290	518069
58	548024	836463	655168	618729	952068	525584
59	556361	830941	669556	631059	939737	533034
0,60	0,564642	0,825336	0,684137	0,643501	0,927295	0,540420
61	572867	819648	698919	656061	914736	547740
62	581035	813878	713909	668743	902054	554996
63	589145	808028	729115	681553	889243	562187
64	597195	802096	744544	694498	876298	569313
65	605186	796084	760204	707584	863212	576375
66	613117	789992	776105	720819	849978	583373
67	620986	783822	792254	734209	836588	590307
68	628793	777573	808661	747763	823034	597177
69	636537	771246	825336	761489	809307	603983
0,70	0,644218	0,764842	0,842288	0,775397	0,795399	0,610726
71	651834	758362	859529	789498	781298	617406
72	659385	751806	877068	803802	766994	624023
73	666870	745174	894918	818322	752474	630578
74	674288	738469	913090	833070	737726	637070
75	681639	731689	931596	848062	722734	643501
76	688921	724836	950451	863313	707483	649870
77	696135	717911	969668	878841	691955	656179
78	703279	710914	989262	894666	676131	662426
79	710353	703845	1,009246	910809	659987	668614
0,80	0,717356	0,696707	1,029639	0,927295	0,643501	0,674741
81	724287	689498	050455	944152	626644	680809
82	731146	682221	071714	961411	609385	686818
83	737931	674876	093433	979108	591689	692768
84	744643	667463	115632	997283	573513	698660
85	751280	659983	138333	1,015985	554811	704494
86	757843	652437	161556	035270	535527	710271
87	764329	644827	185325	055202	515594	715991
88	770739	637151	209664	075862	494934	721655
89	777072	629412	234599	097345	473451	727263
0,90	0,783327	0,621610	1,260158	1,119770	0,451027	0,732815
91	789504	613746	286369	143284	427512	738313
92	795602	605820	313264	168080	402716	743756
93	801620	597834	340874	194413	376383	749145
94	807558	589788	369234	222630	348166	754480
95	813416	581683	398383	253236	317560	759763
96	819192	573520	428357	287002	283794	764993
97	824886	565300	459201	325231	245566	770171
98	830497	557023	490958	370461	200335	775297
99	836026	548690	523677	429257	141539	780373
1,00	0,841471	0,540302	1,557408	1,570796	0,000000	0,785398

Таблица II. Показательная и гиперболические функции

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	Arth x
0,00	1,000000	1,000000	0,000000	1,000000	0,000000	0,000000
01	010050	0,990050	010000	000050	010000	010000
02	020201	980199	020001	000200	019997	020003
03	030455	970446	030005	000450	029991	030009
04	040811	960789	040011	000800	039979	040021
05	051271	951229	050021	001250	049958	050042
06	061837	941765	060036	001801	059928	060072
07	072508	932394	070057	002451	069886	070115
08	083287	923116	080085	003202	079830	080171
09	094174	913931	090122	004053	089758	090244
0,10	1,105171	0,904837	0,100167	1,005004	0,099668	0,100335
11	116278	895834	110222	006056	109558	110447
12	127497	886920	120288	007209	119427	120581
13	138828	878095	130366	008462	129273	130740
14	150274	869358	140458	009816	139092	140926
15	161834	860708	150563	011271	148885	151140
16	173511	852144	160684	012827	158649	161387
17	185305	843665	170820	014485	168381	171667
18	197217	835270	180974	016244	178081	181983
19	209250	826959	191145	018104	187746	192337
0,20	1,221403	0,818731	0,201336	1,020067	0,197375	0,202733
21	233678	810584	211547	022131	206966	213171
22	246077	802519	221779	024298	216518	223656
23	258600	794534	232033	026567	226028	234189
24	271249	786628	242311	028939	235496	244774
25	284025	778801	252612	031413	244919	255413
26	296930	771052	262939	033991	254296	266108
27	309964	763379	273292	036672	263625	276864
28	323130	755784	283673	039457	272905	287682
29	336427	748264	294082	042346	282135	298566
0,30	1,349859	0,740818	0,304520	1,045339	0,291313	0,309520
31	363425	733447	314989	048436	300437	320545
32	377128	726149	325489	051638	309507	331647
33	390968	718924	336022	054946	318521	342828
34	404948	711770	346589	058359	327477	354093
35	419068	704668	357190	061878	336376	365444
36	433329	697676	367827	065503	345214	376886
37	447735	690734	378500	069234	353992	388423
38	462285	683861	389212	073073	362707	400060
39	476981	677057	399962	077019	371360	411800
0,40	1,491825	0,670320	0,410752	1,081072	0,379949	0,423649
41	506818	663650	421584	085234	388473	435611
42	521962	657047	432457	089504	396930	447692
43	537258	650509	443374	093883	405321	459897
44	552707	644036	454335	098372	413644	472231
45	568312	637628	465342	102970	421899	484700
46	584074	631284	476395	107679	430084	497311
47	599994	625002	487496	112498	438199	510070
48	616074	618783	498646	117429	446244	522984
49	632316	612626	509845	122471	454216	536060
0,50	1,648721	0,606531	0,521095	1,127626	0,462117	0,549306

Продолжение табл. II

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	Arth x
0,50	1,648721	0,606531	0,521095	1,127626	0,462117	0,549306
51	665291	600496	532398	132893	469945	562730
52	682028	594521	543754	138274	477700	576340
53	698932	588605	555164	143769	485381	590145
54	716007	582748	566629	149378	492988	604156
55	733253	576950	578152	155101	500520	618381
56	750673	571209	589732	160941	507977	632833
57	768267	565525	601371	166896	515359	647523
58	786038	559898	613070	172968	522665	662463
59	803988	554327	624831	179158	529896	677666
0,60	1,822119	0,548812	0,636654	1,185465	0,537050	0,693147
61	840431	543351	648540	191891	544127	708921
62	858928	537944	660492	198436	551128	725005
63	877611	532592	672509	205101	558052	741416
64	896481	527292	684594	211887	564900	758174
65	915541	522046	696748	218793	571670	775299
66	934792	516851	708971	225822	578363	792814
67	954237	511709	721264	232973	584980	810743
68	973878	506617	733630	240247	591519	829114
69	993716	501576	746070	247646	597982	847956
0,70	2,013753	0,496585	0,758584	1,255169	0,604368	0,867301
71	033991	491644	771174	262818	610677	887184
72	054433	486752	783840	270593	616909	907645
73	075081	481909	796586	278495	623065	928727
74	095936	477114	809411	286525	629145	950479
75	117000	472367	822317	294683	635149	972955
76	138276	467666	835305	302971	641077	996215
77	159766	463013	848377	311390	646929	1,020328
78	181472	458406	861533	319939	652707	045371
79	203396	453845	874776	328621	658409	071432
0,80	2,225541	0,449329	0,888106	1,337435	0,664037	1,098612
81	247908	444858	901525	346383	669590	127029
82	270500	440432	915034	355466	675070	156817
83	293319	436049	928635	364684	680476	188136
84	316367	431711	942328	374039	685809	221174
85	339647	427415	956116	383531	691069	256153
86	363161	423162	969999	393161	696258	293345
87	386911	418952	983980	402931	701374	333080
88	410900	414783	998058	412841	706419	375768
89	435130	410656	1,012237	422893	711394	421926
0,90	2,459603	0,406570	1,026517	1,433086	0,716298	1,472219
91	484323	402524	040899	443423	721132	527524
92	509290	398519	055386	453905	725897	589027
93	534509	394554	069978	464531	730594	658390
94	559981	390628	084677	475305	735222	738049
95	585710	386741	099484	486225	739783	831781
96	611696	382893	114402	497295	744277	945910
97	637944	379083	129431	508514	748704	2,092296
98	664456	375311	144573	519884	753066	2,297560
99	691234	371577	159829	531406	757362	2,646652
1,00	2,718282	0,367879	1,175201	1,543081	0,761594	∞

Таблица III. Коэффициенты для непосредственного интерполирования по узловым точкам

	$n=4$		$n=6$			
u	$u_1^{(4)}$	$u_2^{(4)}$	$u_1^{(6)}$	$u_2^{(6)}$	$u_3^{(6)}$	—
0,00	0,0000000	0,0000000	0,0000000000000	0,0000000000000	0,0000000000000	1,00
01	0,0100495	—0,0016665	0,0100660816750	—0,0025038745875	0,0003332916675	99
02	0201960	0033320	0202619736000	0050143268000	0006663333600	98
03	0304365	0049955	0305841170250	0075295922625	0009988752025	97
04	0407680	0066560	0410289152000	0100478976000	0013306675200	96
0,05	0,0511875	—0,0083125	0,0515927343750	—0,0125674609375	0,0016614609375	0,95
06	0616920	0099640	0622719048000	0150864924000	0019910064800	94
07	0722785	0116095	0730627217250	0176031946125	0023190556725	93
08	0829440	0132480	0839614464000	0201157632000	0026453606400	92
09	0936855	0148785	0949643070750	0226223872875	0029696742075	91
0,10	0,1045000	—0,0165000	0,1060675000000	—0,0251212500000	0,0032917500000	0,90
11	1153845	0181115	1172671904250	0276105289625	0036113425425	89
12	1263360	0197120	1285595136000	0300883968000	0039282073600	88
13	1373515	0213005	1399405757750	0325530216375	0042421010775	87
14	1484280	0228760	1514064552000	0350025676000	0045527815200	86
0,15	0,1595625	—0,0244375	0,1629532031250	—0,0374351953125	0,0048600078125	0,85
16	1707520	0259840	1745768448000	0398490624000	0051635404800	84
17	1819935	0275145	1862733804750	0422423239875	0054631415475	83
18	1932840	0290280	1980387864000	0446131332000	0057585746400	82
19	2046205	0305235	2098690158250	0469596416625	0060496050825	81
0,20	0,2160000	—0,0320000	0,2217600000000	—0,0492800000000	0,0063360000000	0,80
21	2274195	0334565	2337076491750	0515723583375	0066175284175	79
22	2388760	0348920	2457078536000	0538348668000	0068939613600	78
23	2503665	0363055	2577564845250	0560656760125	0071650719525	77
24	2618880	0376960	2698493952000	0582629376000	0074306355200	76
0,25	0,2734375	—0,0390625	0,2819824218750	—0,0604248046875	0,0076904296875	0,75

—	$v_1^{(4)}$	$v_2^{(4)}$	$v_1^{(6)}$	$v_2^{(6)}$	$v_3^{(6)}$	v
0,25	0,2734375	—0,0390625	0,2819824218750	—0,0604248046875	0,0076904296875	0,75
26	2850120	0404040	2941513848000	0625494324000	0079442344800	74
27	2966085	0417195	3063520892250	0646349783625	0081918324225	73
28	3082240	0430080	3185803264000	0666796032000	0084330086400	72
29	3198555	0442685	3308318745750	0686814710375	0086675509575	71
0,30	0,3315000	—0,0455000	0,3431025000000	—0,0706387500000	0,0088952500000	0,70
31	3431545	0467015	3553879579250	0725496127125	0091158992925	69
32	3548160	0478720	3676839936000	0744122368000	0093292953600	68
33	3664815	0490105	3799863432750	0762248053875	0095352378275	67
34	3781480	0501160	3922907352000	0779855076000	0097335295200	66
0,35	0,3898125	—0,0511875	0,4045928906250	—0,0796925390625	0,0099239765625	0,65
36	4014720	0522240	4168885248000	0813441024000	0101063884800	64
37	4131235	0532245	4291733479750	0829384077375	0102805782975	63
38	4247640	0541880	4414430664000	0844736732000	0104463626400	62
39	4363905	0551135	4536933833250	0859481254125	0106035618325	61
0,40	0,4480000	—0,0560000	0,4659200000000	—0,0873600000000	0,0107520000000	0,60
41	4595895	0568465	4781186166750	0887075420875	0108915051675	59
42	4711560	0576520	4902849336000	0899890068000	0110219093600	58
43	4826965	0584155	5024146520250	0912026597625	0111430487025	57
44	4942080	0591360	5145034752000	0923467776000	0112547635200	56
0,45	0,5056875	—0,0598125	0,5265471093750	—0,0934196484375	0,0113568984375	0,55
46	5171320	0604440	5385412648000	0944195724000	0114493024800	54
47	5285385	0610295	5504816567250	0953448621125	0115318291725	53
48	5399040	0615680	5623640064000	0961938432000	0116043366400	52
49	5512255	0620585	5741840420750	0969648547875	0116666877075	51
0,50	0,5625000	—0,0625000	0,5859375000000	—0,0976562500000	—0,0117187500000	0,50

Продолжение табл. III

$n=4$			$n=6$			
u	$u_1^{(4)}$	$u_2^{(4)}$	$u_1^{(6)}$	$u_2^{(6)}$	$u_3^{(6)}$	—
0,50	0,5625000	—0,0625000	0,5859375000000	—0,0976562500000	0,0117187500000	0,50
51	5737245	0628915	5976201254250	0982663964625	0117603960425	49
52	5848960	0632320	6092276736000	0987936768000	0117915033600	48
53	5960115	0635205	6207559107750	00992364891375	0118119545775	47
54	6070680	0637560	6322006152000	0995932476000	0118216375200	46
0,55	0,6180625	—0,0639375	0,6435575781250	—0,0998623828115	0,0118204453125	0,45
56	6289920	0640640	6548226048000	1000423424000	0118082764800	44
57	6398535	0641345	6659915154750	1001315914875	0117850350475	43
58	6506440	0641480	6770601464000	1001286132000	0117506306400	42
59	6613605	0641035	6880243508250	1000319091625	0117049785825	41
0,60	0,6720000	—0,0640000	0,6988800000000	—0,0998400000000	0,0116480000000	0,40
61	6825595	0638365	7096229841750	0995514258375	0115796219175	39
62	6930360	0636120	7202492136000	0991647468000	0114997773600	38
63	7034265	0633255	7307546195250	0986785435125	0114084054525	37
64	7137280	0629760	7411351552000	0980914176000	0113054515200	36
0,65	0,7239375	—0,0625625	0,7513867968750	—0,0974019921875	0,0111908671875	0,35
66	7340520	0620840	7615055448000	0966089124000	0110646104800	34
67	7440685	0615395	7714874242250	0957108458625	0109266459225	33
68	7539840	0609280	7813284864000	0947064832000	0107769446400	32
69	7637955	0602485	7910248095750	0935945385375	0106154844575	31
0,70	0,7735000	—0,0595000	0,8005725000000	—0,0923737500000	0,0104422500000	0,30
71	7830945	0586815	8099676929250	0910428802125	0102572327925	29
72	7925760	0577920	8192065536000	0896007168000	0100604313600	28
73	8019415	0568305	8282852782750	0880460728875	0098518513275	27
74	8111880	0557960	8372000952000	0863777876000	0096315055200	26
0,75	0,8203125	—0,0546875	0,8459472656250	—0,0845947265625	0,0093994140625	0,25

0,75	0,8203125	—0,0546875	0,8459472656250	—0,0845947265625	0,0093994140625	0,25
76	8293120	0535040	8545230848000	0826957824000	0091556044800	24
77	8381835	0522445	8629238829750	0806798752375	0089001117975	23
78	8469240	0509080	8711460264000	0785459532000	0086329786400	22
79	8555305	0494935	8791859183250	0762929929125	0083542553325	21
0,80	0,8640000	—0,0480000	0,8870400000000	—0,0739200000000	0,0080640000000	0,20
81	8723295	0464265	8947047516750	0714260095875	0077622786675	19
82	8805160	0447720	9021766936000	0688100868000	0074491653600	18
83	8885565	0430355	9094523870250	0660713272625	0071247422025	17
84	8964480	0412160	9165284352000	0632088576000	0067890995200	16
0,85	0,9041875	—0,0393125	0,9234014843750	—0,0602218359375	0,0064423359375	0,15
86	9117720	0373240	9300682248000	0571094524000	0060845584800	14
87	9191985	0352495	9365253917250	0538709296125	0057158826725	13
88	9264640	0330880	9427697664000	0505055232000	0053364326400	12
89	9335655	0308385	9487981770750	0470125222875	0049463412075	11
0,90	0,9405000	—0,0285000	0,9546075000000	—0,0433912500000	0,0045457500000	0,10
91	9472645	0260715	9601946604250	0396410639625	0041348095425	09
92	9538560	0235520	9655566336000	0357613568000	0037136793600	08
93	9602715	0209405	9706904457750	0317515566375	0032825280775	07
94	9665080	0182360	9755931752000	0276111276000	0028415335200	06
0,95	0,9725625	—0,0154375	0,9802619531250	—0,0233395703125	0,0023908828125	0,05
96	9784320	0125440	9846939648000	0189364224000	0019307724800	04
97	9841135	0095545	9888864504750	0144012589875	0014614085475	03
98	9896040	0064680	9928367064000	0097336932000	0009830066400	02
99	9949005	0032835	9965420858250	0049333766625	0004957920825	01
1,00	1,0000000	0,0000000	1,0000000000000	0,0000000000000	0,0000000000000	0,00
—	$v_1^{(4)}$	$v_2^{(4)}$	$v_1^{(6)}$	$v_2^{(6)}$	$v_3^{(6)}$	v

Таблица IV. Полные эллиптические интегралы первого рода

k^2	k	$K(k^2)$	$K'(k^2)$	k^2	k	$K(k^2)$	$K'(k^2)$
0,00	0,0000000	1,5707963	∞	0,50	0,7071068	1,8540747	1,8540747
01	1000000	5747456	3,6956374	51	7141428	8626408	8456940
02	1414214	5787399	3541414	52	7211103	8714002	8374914
03	1732051	5827803	1558749	53	7280110	8803614	8294598
04	2000000	5868678	0161125	54	7348469	8895331	8215927
05	2236068	5910035	2,9083372	55	7416198	8989249	8138839
06	2449490	5951882	8207525	56	7483315	9085470	8063276
07	2645751	5994232	7470730	57	7549834	9184103	7989180
08	2828427	6037097	6835514	58	7615773	9285263	7916501
09	3000000	6080486	6277733	59	7681146	9389077	7845188
0,10	0,3162278	1,6124413	2,5780921	0,60	0,7745967	1,9495677	1,7775194
11	3316625	6168891	5333345	61	7810250	9605210	7706473
12	3464102	6213931	4926353	62	7874008	9717832	7638984
13	3605551	6259548	4553380	63	7937254	9833710	7572685
14	3741657	6305755	4209330	64	8000000	9953028	7507538
15	3872983	6352567	3890165	65	8062258	2,0075984	7443506
16	4000000	6399999	3592636	66	8124038	0202794	7380554
17	4123106	6448065	3314086	67	8185353	0333694	7318648
18	4242641	6496782	3052317	68	8246211	0468941	7257756
19	4358899	6546167	2805491	69	8306624	0608816	7197848
0,20	0,4472136	1,6596236	2,2572053	0,70	0,8366600	2,0753631	1,7138894
21	4582576	6647008	2350678	71	8426150	0903727	7080867
22	4690416	6698501	2140225	72	8485281	1059483	7023740
23	4795832	6750734	1939709	73	8544004	1221319	6967486
24	4898979	6803728	1748271	74	8602325	1389702	6912082
25	5000000	6857504	1565156	75	8660254	1565156	6857504
26	5099020	6912082	1389702	76	8717798	1748271	6803728
27	5196152	6967486	1221319	77	8774964	1939709	6750734
28	5291503	7023740	1059483	78	8831761	2140225	6698501
29	5385165	7080867	0903727	79	8888194	2350678	6647008
0,30	0,5477226	1,7138894	2,0753631	0,80	0,8944272	2,2572053	1,6596236
31	5567764	7197848	0608816	81	9000000	2805491	6546167
32	5656854	7257756	0468941	82	9055385	3052317	6496782
33	5744563	7318648	0333694	83	9110434	3314086	6448065
34	5830952	7380554	0202794	84	9165151	3592636	6399999
35	5916080	7443506	0075984	85	9219544	3890165	6352567
36	6000000	7507538	1,9953028	86	9273618	4209330	6305755
37	6082763	7572685	9833710	87	9327379	4553380	6259548
38	6164414	7638984	9717832	88	9380832	4926353	6213931
39	6244998	7706473	9605210	89	9433981	5333345	6168891
0,40	0,6324555	1,7775194	1,9495677	0,90	0,9486833	2,5780921	1,6124413
41	6403124	7845188	9389077	91	9539392	6277733	6080486
42	6480741	7916501	9285263	92	9591663	6835514	6037097
43	6557439	7989180	9184103	93	9643651	7470730	5994232
44	6633250	8063276	9085470	94	9695360	8207525	5951882
45	6708204	8138839	8989249	95	9746794	9083372	5910035
46	6782330	8215927	8895331	96	9797959	3,0161125	5868678
47	6855655	8294598	8803614	97	9848858	1558749	5827803
48	6928203	8374914	8714002	98	9899495	3541414	5787399
49	7000000	8456940	8626408	99	9949874	3,6956374	5747456
0,50	0,7071068	1,8540747	1,8540747	1,00	1,0000000	∞	1,5707963

Таблица V. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Постоянная	Приближенное значение	Постоянная	Приближенное значение
π	3,14159 26535 89793	$\frac{1}{\pi}$	0,31830 98861 83791
2π	6,28318 53071 79586		
$\frac{\pi}{2}$	1,57079 63267 94897	$\frac{1}{2\pi}$	0,15915 49430 91895
$\frac{\pi}{4}$	0,78539 81633 97448	$\frac{2}{\pi}$	0,63661 97723 67581
$\frac{4}{3}\pi$	4,18879 02047 86391	$\frac{4}{\pi}$	1,27323 95447 35163
π^2	9,86960 44010 89359	$\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$	0,62035 04908 99400
$\sqrt{\pi}$	1,77245 38509 05516		
$\sqrt{2\pi}$	2,50662 82746 31001	$\frac{1}{\pi^2}$	0,10132 11836 42338
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$	0,88622 69254 52758	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0,56418 95835 47756
$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	1,25331 41373 15500	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,39894 22804 01433
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459 18875 61523		
e	2,71828 18284 59045	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}$	1,12837 91670 95513
e^2	7,38905 60989 30650		
$\sqrt{e}$	1,64872 12707 00128	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	0,79788 45608 02865
e^{π}	23,14069 26327 79269		
$e^{\pi/2}$	4,81047 73809 65352	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,68278 40632 55296
$\sqrt{2}$	1,41421 35623 73095		
$\sqrt{3}$	1,73205 08075 68877	e^{-1}	0,36787 94411 71442
$\sqrt{10}$	3,16227 76601 68379	e^{-2}	0,13533 52832 36613
$M = \lg e$	0,43429 44819 03252	$e^{-1/2}$	0,60653 06597 12633
1 *рад*	57°, 29577 95131	$e^{-\pi}$	0,04321 39182 63772
1 *рад*	3437′, 74677 07849	$e^{-\pi/2}$	0,20787 95763 50762
1 *рад*	206264″, 80624 70964		
sin 1	0,84147 09848 07897	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	0,70710 67811 86548
cos 1	0,54030 23058 68140	$\sqrt[3]{10}$	2,15443 46900 31884
tg 1	1,55740 77246 54902	$\sqrt[3]{100}$	4,64158 88336 12779
sh 1	1,17520 11936 43801	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258 50929 94046
ch 1	1,54308 06348 15244	1°	0′,01745 32925 19943
		1′	0′,00029 08882 08666
th 1	0,76159 41559 55765	1″	0′,00000 48481 36811

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Науч.-техн. изд-во Украины, Харьков, 1939.
2. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 2. «Наука», М., 1970.
3. Бараненков Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под ред. Б. П. Демидовича. Изд. 5. «Наука». М., 1966.
4. Бари Н. К. Теория рядов. Учпедгиз, М., 1936.
5. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
6. Безикович Я. С. Приближенные вычисления. Изд. 6. Гостехиздат, М.—Л, 1949.
7. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, I, II. Физматгиз, М. 1959—1960.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Изд. 14. «Наука», М., 1965.
9. Бермант А. Ф. и Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. Изд. 4. «Наука», М., 1966.
10. Боголюбов Н. Н. Избранные труды в трех томах. «Наукова думка», К., 1969—1971.
11. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 2. Физматгиз, М., 1958.
12. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд. 11. «Наука», М., 1967.
13. Бут Э. Д. Численные методы. Физматгиз, М., 1959.
14. Вега Г. Таблицы семизначных логарифмов. Изд. 2. «Недра», М., 1966.
15. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. «Наука», М., 1971.
16. Выгодский М. Я. Краткий учебник высшей математики. Пособие для самообразования. Изд. 2. Гостехиздат, М. — Л., 1947.
17. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. Изд. 9. «Наука», М., 1969.
18. Выханду Л. Обобщение метода Ньютона для решения нелинейных систем уравнений. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1955, № 37, стр. 114—117.
19. Гаврилов Н. И. Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. «Высшая школа», М., 1962.
20. Глушков В. М. Теория алгоритмов. Изд-во КВИРТУ, К., 1961.
21. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, М., 1962.
22. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Изд-во АН УССР, К., 1964.
23. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 4. «Наука», М., 1965.
24. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат. М.— Л. 1946.
25. Гнеденко Б. В., Королюк В. С. и Ющенко Е. Л. Элементы программирования. Физматгиз, М., 1963.
26. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2. Гостехиздат, М.— Л., 1950
27. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. «Наука», М., 1966.

28. Гончаров В. Л. Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
29. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. «Наука», М.. 1963.
30. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. «Наука», М., 1968.
31. Гутер Р. С. и Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. Физматгиз, М., 1962.
32. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. «Наука», М., 1966.
33. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Изд. 6. «Наука», М., 1966.
34. Демидович Б. П. и Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 3. «Наука», М., 1966.
35. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Изд. 2. Физматгиз, М., 1963.
36. Евграфов М. А. Аналитические функции. «Наука», М., 1965.
37. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
38. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. «Наука и техника», Минск, 1970.
39. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. Изд. 8. «Наука», М., 1965.
40. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Физматгиз, М., 1960.
41. Зайцев И. Л. Элементы высшей математики для техникумов. Изд. 10. «Наука», М., 1968.
42. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. Изд. 4. «Наука», М., 1968.
43. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. «Наука», М., 1965.
44. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В трех томах. Под редакцией А. П. Юшкевича. «Наука», М., 1970—1972.
45. История отечественной математики. В четырех томах. Ответственный редактор академик АН УССР И. З. Штокало. «Наукова думка», К., 1966—1970.
46. Калнін Р. А. Алгебра і елементарні функції. «Вища школа», К., 1969.
47. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. «Наука», М., 1965.
48. Каратеодори К. Конформное отображение. Гостехиздат, М.—Л., 1934.
49. Карман Т. и Био М. Математические методы в инженерном деле. Изд. 2. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
50. Келдыш М. В. Функции комплексного переменного. — В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. II. Изд-во АН СССР, М., 1956.
51. Келдыш М. В., Седов Л. И. Приложение теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике. (Обзор некоторых работ московской школы). «Наука», М., 1964.
52. Китов А. И. и Криницкий Н. А. Электронные цифровые машины и программирование. Изд. 2. Физматгиз, М., 1961.
53. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. Изд. 8. «Наука», М., 1965.
54. Ковалев В. Ф. Практические занятия по математике для поступающих в вузы. Арифметика и алгебра. Изд-во Киевского ун-та, 1970.
55. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1953.
56. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Гостехиздат, М. -Л., 1936.
57. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей. — В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. II. Изд-во АН СССР, М., 1956
58. Колмогоров А. Н. Новые программы и некоторые основные вопросы

усовершенствования математики в средней школе. «Математика в школе», 1967, № 2; стр. 4—13.

59. Колмогоров А. Н. Что такое функция? II. Что такое график функции? «Квант», 1970, № 1, стр. 27—36; № 2, стр. 3—13.

60. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Изд. 6. Гостехиздат, М. -Л., 1954.

61. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. «Наука», М., 1966.

62. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Изд-во АН УССР, К., 1937.

63. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ, I, II. «Высшая школа», М., 1970.

64. Кузнецов Д. С. Специальные функции. Изд. 2, «Высшая школа», М., 1965.

65. Кунц К. С. Численный анализ. «Техніка», К., 1964.

66. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления, I (изд. 4), II (изд. 2). «Наука», М., 1967 и 1970.

67. Лаврентьев М. А. Sur une équation différentielle du premier ordre. Math. Zeitschrift, 1925, Bd.23, S. 197—209.

68. Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Гостехиздат, М.-Л., 1946.

69. Лаврентьев М. А. и Никольский С. М. Анализ. — В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. I. Изд-во АН СССР, М., 1956.

70. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3. «Наука», М., 1965.

71. Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. «Наукова думка», К., 1970.

72. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. ИЛ, М., 1962.

73. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.

74. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их применение. Изд. 2. Физматгиз, М., 1963.

75. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Физматгиз, М., 1958.

76. Лунц Г. Л. и Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

77. Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. Гостехиздат, М. — Л., 1951.

78. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, I, II. Изд. 2. «Наука», М., 1967—1968.

79. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения. Изд. 3. «Вышэйшая школа», Минск, 1968.

80. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 3. «Высшая школа», М., 1967.

81. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 4. «Вышэйшая школа», Минск, 1970.

82. Математика, ее содержание, методы и значение, I, II, III. Изд-во АН СССР, М., 1956.

83. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, М., 1962.

84. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. Гостехиздат, М., 1953.

85. Милн В. Э. Численный анализ. ИЛ, М., 1951.

86. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1955.

87. Милн-Томсон Л. Н. и Комри Э. Дж. Четырехзначные математические таблицы. Физматгиз, М., 1961.

88. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. Изд-во АН УССР, К., 1955.

89. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. «Наука», М., 1964.
90. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. «Наукова думка», К., 1971.
91. Михлин С. Г. и Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», М., 1965.
92. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. Изд. 3. «Наука», М., 1968.
93. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. Физматгиз, М., 1962.
94. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. Изд. 3. «Наука», М., 1969.
95. Неметти В. П. Приближенное решение системы обыкновенных уравнений. Науч. тр. Моск. инж.-экон. ин-та, 1957, вып. 7, стр. 85—93.
96. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1949.
97. Никольский С. М. Квадратурные формулы. Физматгиз, М., 1958.
98. Панов Д. Ю. Счетная линейка. Изд. 18. «Наука», М., 1966.
99. Петерс И. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. Изд. 3. Геодезиздат, М., 1944.
100. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 6. «Наука», М., 1970.
101. Петровский И. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение, т. II. Изд-во АН СССР, М., 1956.
102. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов, 1; 2. Изд. 9. «Наука», М., 1970.
103. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. Изд. 3.«Наука», М., 1968.
104. Погребысский И. Б., Фильчаков П. Ф. Математика, вып. I. Алгебра. Алгебраические действия. Логарифмы и логарифмические вычисления. Под общей редакцией академика М. А. Лаврентьева. Сер. «Университет на дому». «Радянська школа», Киев — Львов, 1947.
105. Погребысский И. Б., Фильчаков П. Ф. Математика, вып. II. Уравнения и кривые. Под общей редакцией академика М. А. Лаврентьева. Сер. «Университет на дому». «Радянська школа», Киев — Львов, 1949.
106. Погребиський Й. Б., Фільчаков П. Ф. Тригонометрія. Посібник для учителів. Вид. 2. «Радянська школа», К., 1954.
107. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. «Наука», М., 1970.
108. Положий Г. Н. и др. Математический практикум. Физматгиз, М., 1960.
109. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, М., 1961.
110. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. Изд. 23. Физматгиз, М., 1958.
111. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 11. «Наука», М., 1967.
112. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат, М. — Л., 1947.
113. Пухов Г. Е. Комплексное исчисление и его применение. Изд-во АН УССР, К., 1961.
114. Реньи А. Диалоги о математике. «Мир», М., 1969.
115. Реньи А. Письма о вероятности. «Мир», М., 1970.
116. Риман Б. Сочинения. Гостехиздат, М. — Л., 1948.
117. Салехов Г. С. Вычисление рядов. Гостехиздат, М. — Л., 1955.
118. Сальвадори М. Дж. Численные методы в технике. ИЛ, М., 1955.
119. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I, II. ИЛ, М., 1953—1954.
120. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Изд. 2. «Наука». М., 1970.

121. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Физматгиз, М., 1962.
122. Семендяев К. А. Счетная линейка. Краткое руководство. Изд. 8. Физматгиз, М., 1957.
123. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. Гостехиздат, М., 1936.
124. Скарборо Дж. Численные методы математического анализа. Гостехиздат, М. —Л., 1934.
125. Смирнов В. И. Курс высшей математики, I (изд. 22); II (изд. 20); III, ч. 1 (изд. 9). «Наука», М., 1967; III, ч. 2 (изд. 4). Гостехиздат, М. — Л., 1950; IV (изд. 5). Физматгиз, М., 1958; V (изд. 2). Физматгиз, М., 1959.
126. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. «Наука», М. — Л., 1964.
127. Смолянский М. Л. Таблицы неопределенных интегралов. Изд. 4 «Наука», М., 1967.
128. Современная математика дла инженеров. Под редакцией Э. Ф. Беккенбаха. ИЛ, М , 1958.
129. Сойер У. У. Прелюдия к математике. Рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. «Просвещение», М., 1965.
130. Соколов Ю. Д. Елементи теорії функцій комплексної змінної. «Радянська школа», К., 1954.
131. Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. «Наукова думка», К., 1967.
132. Справочник по элементарной математике. Геометрия, тригонометрия, векторная алгебра. Под редакцией П. Ф. Фильчакова. «Наукова думка», К., 1966.
133. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1953.
134. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. (Написан при сотрудничестве К. А. Казаку), 1, 2. ИЛ, М., 1962.
135. Таблицы Барлоу. Изд. 3. «Мир», М., 1964.
136. Таблицы e^x и e^{-x}. Изд-во АН СССР, М., 1955.
137. Таблицы логарифмов комплексных чисел и перехода от декартовых координат к полярным*. Изд-во АН СССР. М., 1952.
138. Тарасов Н. П. Курс высшей математики для техникумов. Изд. 14. «Наука», М., 1969.
139. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. Гостехиздат, М. — Л., 1948.
140. Толстов Г. П. Элементы математического анализа, 1, 2. «Наука», М., 1966.
141. Туманов С. И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. Изд. 3. «Просвещение», М., 1970.
142. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, I, II. Физматгиз, М., 1963.
143. Уиттекер Э. и Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. Гостехиздат, М. — Л., 1933.
144. Фадеев Д. К. и Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 2. «Наука», М., 1963.
145. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. «Наукова думка»., К., 1966.
146. Фільчаков П. Ф. Математичний практикум. Обчислення. «Радянська школа», К., 1958.
147. Фильчаков П. Ф. Приближенные методы конформных отображений. «Наукова думка», К., 1964.
148. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. «Наукова думка», К., 1970.
149. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, 1 (изд. 6); 2 (изд. 5), «Наука», М., 1968.

* На титульном листе: «Десятизначные таблицы логарифмов комплексных чисел».

150. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I (изд. 6); II (изд. 6); III (изд. 4). «Наука», М., 1966.
151. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. «Наука», М., 1968.
152. Фукс Б. А. и Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Изд. 3. «Наука», М., 1964.
153. Хапланов М. Г. Теория функций комплексного переменного. «Просвещение», М., 1965.
154. Хаусхольдер А. С. Основы численного анализа. ИЛ, М., 1956.
155. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. Гостехиздат. М.—Л. 1953.
156. Хренов Л. С. Шестизначные таблицы тригонометрических функций. Изд. 2. «Наука», М., 1964.
157. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. Изд. 2, Гостехиздат, М. — Л., 1938.
158. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. Изд. 29. «Наука», М., 1968.
159. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М. — Л., 1950.
160. Черников С. Н. Линейные неравенства. «Наука», М., 1968.
161. Швецов К. И., Бевз Г. П. Справочник по элементарной математике. Арифметика, алгебра. «Наукова думка», К., 1965.
162. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного; ч. 1 — 2. «Наука», М., 1969. ч. 3. «Наука», М., 1970.
163. Штаерман И. Я. Гиперболические функции. Гостехиздат, М. —Л. 1935.
164. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. Гостехиздат, М. — Л., 1949.
165. Штейнгауз Г. Сто задач. Физматгиз, М., 1959.
166. Штокало И. З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами (асимптотические методы и критерий устойчивости и неустойчивости решений). Изд-во АН УССР, К., 1960.
167. Штокало И. З. Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Изд-во АН УССР, К., 1961.
168. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Гостехиздат, М. — Л., 1949.
169. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Физматгиз, М., 1958.
170. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Изд. 2. «Наука», М., 1969.
171. Энциклопедия элементарной математики. Книга третья: Функции и пределы (основы анализа). Гостехиздат, М. — Л.,1952.
172. Юшкевич А. П. История математики в средние века. Физматгиз, М., 1961.
173. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. «Наука», М., 1968.
174. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Пер. с 6-го нем. изд. «Наука», М., 1964.
175. Cajori F.* A history of mathematics. New York, 1929.
176. Comrie L. J. Chambers's Six-Figure Mathematical Tables, v. I, Logarithmic Values; v. II, Natural Values. London, 1949. (Русский перевод: «Наука», М., 1964).
177. Dienes P. The Taylor Series. New York, 1957.
178. Duff G. F. D., Naylor D. Differential Equations of Applied Mathematics. New York, London, Sydney, 1966.
179. Hamming R. W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.
180. Hartree D. R. Numerical Analysis. Sec. Ed., Oxford University Press, 1958.
181. Kleine Enzyklopädie. Mathematik. Leipzig, 1968.

* Есть русский перевод И. Ю. Тимченко более ранней работы: Кеджори Ф. История элементарной математики с указаниями на методы преподавания. «Матезис», Одесса, 1910; изд. 2, 1917.

182. Kneschke A. Differentialgleichungen und Randwertprobleme. Berlin, 1957.
183. Knopp K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Fünfte Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York, 1964.
184. Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics. New York, London, 1962.
185. Mc. Lachlan N. W. Ordinary Non-linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences. Sec. Ed., Oxford University Press, 1958.
186. Meynart C. Les séries et leur application à la résolution de divers problèmes pratiques d'analyse mathématique, t. I et II. Bruxelles, 1961.
187. Nyström E. J. Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben bei gewönlichen Differentialgleichungen. Acta Mathematica, 1945, t. 76, S. 158—184.
188. Saaty Th. L., Bram J. Nonlinear Mathematics. New York, San Francisko, Toronto, London, 1964.
189. Struble R. A. Nonlinear Differential Equations. New York, Toronto, London, 1962.
190. Survey of Numerical Analysis. Edited bey J. Todd. New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

Абель Н. Г. 430, 431, 443, 681
Абеля теорема, первая 443, 444
— —, вторая 444, 445
Абсолютная величина (модуль) 12, 100, 436, 591, 592
— погрешность 159, 266, 274—278, 317—320, 322—326
— сходимость ряда 436—440, 442—447, 451
Абсцисса 7, 8, 10
Адамар Ж. С. 444, 681
Алгебра, основная теорема (теорема Гаусса) 367, 410, 424
Алгебраическая линия (кривая) 6, 36, 38
— форма комплексного числа 591, 592
— функция 431, 620, 621
Алгебраическое уравнение 158, 349, 364, 367—370 422, 424, 426, 431
Алгоритм 94, 97, 249, 330
Ал-Хорезми 330, 421, 422, 427, 647
Алфавит латинский и греческий 711
Амплитуда эллиптического интеграла 663
Анализ математический 93, 98, 109, 131, 248, 249, 302, 304
Аналитическая геометрия 5—7, 90
— функция 305, 367, 409, 412, 429, 452, 605, 612, 613
Аналитическое продолжение ряда 500, 509, 513, 534, 563, 566, 580
Аппроксимация 218, 221, 222, 335, 354, 357
Аргумент (независимая переменная) 13, 94, 95, 97—102
— комплексного числа 591, 592
Ареа-функции (обратные гиперболические функции) 166, 283—285, 658, 660, 661
Арксинус, арккосинус, арктангенс 96, 129, 152—154, 658—661
Архимед 161, 246, 247, 274, 300, 429, 581, 637
Архимедова спираль 247, 696
Асимптота 37, 58, 120, 121, 204—208, 210—214, 282, 284, 386, 392, 398, 484
—, способ разыскания 204—207
Асимптоты гиперболы 56, 58, 60, 61, 63, 65, 66

Бари Н. К. 437, 722
Барроу И. 247
Безу теорема 367
Бернулли Д. 214, 303
Бернулли И 131, 214, 215, 247, 262, 303, 304, 429, 528, 577, 681
Бернулли Я. 214, 215, 247, 302—304, 429, 577
Бернулли—Лопиталя правило 215—218, 418, 461, 516
Бернулли уравнение 483, 484, 586
Бернштейн С. Н. 681
Бесконечно большая величина 17, 109, 111—115
— малая величина 93, 109—115, 118, 120, 218, 301
Бесконечность 111, 204
Бесконечный разрыв (разрыв второго рода) 115—117, 120, 122, 123, 210, 497
— ряд 432
Биномиальный ряд 514, 516, 517
Боголюбов Н. Н. 248, 581, 722, 724
Больцано Б. 103, 125, 126, 158, 429, 430
Больцано — Вейерштрасса признак 103, 158
Больцано — Коши теорема, первая 125
— — —, вторая 126
Большая ось (полуось) эллипса 45—47, 51, 84
Бригг Г. 161
Бюрги И. 161

Валлиса формула 258—260, 272
Вариации параметров метод 384—407, 409—421
— произвольных постоянных метод 480—482, 495, 580
Вейерштрасс К. Т. В. 103, 140, 158, 429, 431, 438, 680, 681, 685, 686
Вейерштрасса—Больцано признак 103, 158
Вейерштрасса признак 440, 443
— функции 680
Векуа И. Н. 681
Величина абсолютная (модуль) 12, 100, 436, 591, 592
— бесконечно большая 17, 109, 111—115
— бесконечно малая 93, 109—115, 118, 120, 218, 301
— ограниченная 113, 120
— переменная 93, 94
— постоянная 98, 107, 111—113, 141, 152
Верные знаки (цифры) 169, 216, 267, 268, 314—316, 325, 326
Вероятности интеграл (функция Гаусса) 285, 286, 348
Вершина параболы 70, 72—75, 77—79, 87
Вершины гиперболы 60, 85, 87
— эллипса 45—48, 87
Весовые коэффициенты 273, 334, 336—343
Ветви гиперболы 59, 62, 63, 69, 81, 88
Вещественные (действительные) числа 367, 588—591, 596
Виета Ф. 423, 424, 428, 637
Виноградов И. М. 681, 688, 722
Возведение в степень комплексного числа 597, 598, 676
Возрастание функции 171—174, 183
Вторая производная 180—186, 189, 191, 192, 199, 200, 223
Второго порядка дифференциал 222, 223, 249
— — кривые 36, 74, 80, 82, 90, 198
Выделение особенностей 508—518, 678
Вынужденные колебания 560, 573, 575
Выпуклость и вогнутость кривой 180—186
Выражение подынтегральное 226, 231, 236, 238—240, 243
Высшего порядка производные 180, 181, 188, 223, 352
Вычисление π с любой наперед заданной точностью 634—637
— таблиц логарифмов 452—454
— — полиномов 350, 355—357
— — тригонометрических функций 640—642
Вычисления приближенные, правила 319—326, 328—330
Вычитание комплексных чисел 593, 594

Галилей Г. 581, 582
Галуа Э. 424, 426, 427, 431
Гармонический ряд 303, 429, 435, 446
Гаусс К. Ф. 185, 214, 273, 276, 367, 424—426, 429—431, 589, 681, 688
Гаусса теорема 367, 410, 424
— функция (интеграл) 285, 286, 348
Геодезическая съемка 646—651
Геоид 648
Геометрическая прогрессия 98, 157, 433, 438, 443, 447, 449, 458, 508, 509, 513, 517
— интерпретация определенного интеграла 227, 243, 245
— — производной 135—138, 182
Гипербола 38, 56—69, 77, 80—85, 87—90, 106
— равнобочная (равносторонняя) 37, 64—69, 112, 137, 280
—, уравнение в полярных координатах 88
—, — касательной и нормали 198
Гиперболические функции 166, 230, 231, 279—283, 294, 634, 651—653, 665
— —, дифференцирование 166, 167, 281, 282, 651
— —, интегрирование 230, 281, 282
— —, обратные 166, 283—285, 658, 660, 661
— —, разложение в ряд 459, 460
— —, связь с показательной и тригонометрическими функциями 651—653
Главные значения обратных тригонометрических функций 658, 659
Глушков В. М. 681, 722
Гнеденко Б. В. 681, 722
Граве Д. А. 307, 681, 688, 689
Граничная (предельная) погрешность абсолютная 317
— — — относительная 318
Граничное (краевое) условие 540, 541, 543, 544, 546, 548, 550, 552
График функции 13, 37, 97, 106, 115, 117, 119, 125, 127, 139, 168, 207—214
Графический метод отделения корней 364—366
Графическое дифференцирование 168, 169
— решение уравнений 68, 365, 384
Греческий алфавит 711

Даламбер Ж. Л. 247, 305, 306, 429, 612, 681
Даламбера признак сходимости 305, 436, 444, 445, 457, 459, 500
Данжуа А. 248
Двоякая периодичность эллиптических функций Якоби 665—672, 678, 680
Действительные (вещественные) числа 367, 581—591, 596
Действия над степенными рядами 429, 462—470
Декарт Р. 6, 194, 368, 588, 647
Декарта теорема 368
Декартовы координаты 9, 14, 36, 86, 87, 89
Деление комплексных чисел 596, 597
— степенных рядов 466—470
Дельта амплитуды 663
Десятичный логарифм 161, 162, 164
Диаметры гиперболы 82—84
— параболы 82
— эллипса 82—84
Директриса параболы 74—79, 84, 85, 87
Директрисы гиперболы 85, 87
— эллипса 84, 85, 87
Дирихле П. Г. Л. 437, 681
Дифференциал 94, 218—223, 225, 226, 231, 249,
— второго и высшего порядка 222, 223, 249
— дуги 293
— интеграла 231, 232
— независимой переменной 219
— произведения 238
Дифференциальное исчисление 93, 110, 131, 214, 225, 245, 247, 249, 429, 430
Дифференциальное уравнение 94, 249, 429, 472—586
— — Бернулли 483, 484, 586
— — в частных производных 472
— — высшего порядка 473, 487—495, 507
— — Дуффинга 560—569, 573, 586
— —, интегрирование при помощи рядов 498—581
— — линейное второго порядка 484—487, 505
— — — высшего порядка 486—495
— — — первого порядка 479—483
— —, общее решение 473—477, 481—486, 489, 491—494, 498, 505, 506, 561
— —, общий интеграл 473, 475, 476, 478, 479, 498
— — обыкновенное 472
— — однородное 478, 479
— —, особое решение 473, 484
— —, особый интеграл 473, 475
— —, порядок 472
— —, решение 473
— — Риккати 518—532, 578
— —, система дифференциальных уравнений 532—539, 672, 673
— — с разделяющимися переменными 474—479, 482, 511
— —, частное решение 473, 474, 480—487, 490—495, 497, 561
— —, частный интеграл 473
Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эллиптические функции Якоби 672—680
Дифференцирование
— гиперболических функций 166, 167, 281, 282, 651
— дроби 144, 145
— логарифмической функции 163—166
— неявной функции 195—198
— обратной функции 146, 147, 154
— обратных гиперболических функций 166, 167, 284
— — тригонометрических функций 152—154
—, основные правила 140—147
— показательной функции 163, 166
— произведения 142—144
— сложной функции 145, 146, 155
— степенного ряда 439, 440, 444—446
— степенной функции 147—152, 166
— тригонометрических функций 152—156
Дифференцируемая функция 138
Длина дуги 292—297
— — эллипса 295, 296
Дородницын А. А. 681
Дробно-линейная функция 66
Дробно-рациональная функция 230, 618

«*e*», основание натуральных логарифмов 156—162, 215, 457—459
Евклид 247, 307, 330, 421, 426
Единица мнимая 588
Еругин Н. П. 581, 723

Жуковский Н. Е. 313, 681, 687, 689

Зависимая переменная (функция) 13, 93—102, 249
Зависимость функциональная 13, 75, 94, 97
Задача Коши 498, 500, 503, 505, 511, 513, 539, 561, 566, 579, 586
— краевая 498, 539—545, 561
— Штурма — Лиувилля 546—548, 551, 555, 556
Замена переменных 233—238, 476, 477, 483
Замкнутый промежуток (сегмент) 95—97, 190

Знак двойной подстановки 244
— интеграла 226, 232, 243
— модуля 12, 100
— суммирования 261, 432
Знакочередующийся ряд 439, 441, 442, 448, 449, 451
Значащие цифры 105, 134, 159, 268, 314—316, 318, 323—326, 329
Значения собственные 544, 546—560

Извлечение корня из комплексного числа 598, 599
— — приближенное 328—330
Изоклина 496, 497
Индекс 10, 99, 100
— суммирования 261, 432
Интеграл 98, 110, 229, 249, 262
— вероятности (функция Гаусса) 285, 286, 348
—, геометрическая интерпретация 227, 243, 245
— дифференциала 229
— дифференциального уравнения 473
— — — общий 473, 475, 476, 478, 479, 498
— — — особый 473, 475
— — — частный 473
— неопределенный 225—234, 241, 244, 245, 249, 251, 252, 262, 475, 614, 615
— определенный 225, 241, 243—246, 248—252, 286, 297, 302, 614, 615
— —, как предел суммы 260—263
— эллиптический 285, 288—290, 296, 662, 664, 666, 668
— — полный 288, 290, 296, 666—668, 673, 676, 677, 710
Интегралов (простейших) таблица 229—231
Интегральная кривая 227—229, 473—476, 478, 483, 484, 491, 496—498, 503
Интегральное исчисление 93, 110, 131, 174, 222, 231, 245, 247, 248
— —, основная формула (см. формула Ньютона—Лейбница)
Интегральный косинус 288
— логарифм 288
— синус 287
Интегрирование 226, 233—241
— гиперболических функций 230, 281, 282
— дифференциального уравнения 473, 475
— — — при помощи рядов 498—581
—,общие правила 231—233, 249—252
Интегрирование подстановкой 233—238, 252—255
— по частям 238—241, 252, 255—257
— степенного ряда 439, 440, 444—446
— тригонометрических функций 230
— численное 264—273
Интервал 95, 97, 100, 190
Интерполяция 291, 332—347
— квадратичная 333, 335—338, 341, 357—359
— линейная 333, 334, 337, 338, 343, 349, 350, 357, 358
— полиномиальная 333—347, 357—359
Иррациональная функция 618—621
Иррациональные числа 98, 158, 587
Исключения метод 383, 384, 391, 393, 400
Исследование функций при помощи интеграла 279—285
Итераций метод 328, 379—383
Ишлинский А. Ю. 582, 681, 682

Кавальери Б. 247, 266
Каноническое уравнение 50
— — гиперболы 57, 61
— — параболы 75, 77
— — эллипса 50, 61
Кардано Дж. 422, 423
Кардано формула 423, 428
Касательная 6, 135—139, 147, 151, 162, 168, 169, 171, 176, 182, 183, 195—199, 218, 222, 227, 228
Касательных метод, или метод Ньютона 370—376, 378, 380, 412
Квадрант 7—10
Квадратичная интерполяция 333, 335—338, 341, 357—359
— функция 70—74
Квадратное уравнение 67—69, 78, 79
Квадратура 262, 475, 478, 480, 482, 487, 495, 518
Квадратурная формула 264, 273, 296
Келдыш М. В. 248, 681—683, 690, 723
Кеплер И. 247, 569, 581
Ковалевская С. В. 581—583
Колебания вынужденные 560, 573, 575
— свободные 560, 573, 575
Колмогоров А. Н. 248, 723, 724
Комплексная плоскость 589—592, 600
Комплексное число 367, 409—412, 423, 424, 587—592, 600, 676
— —, алгебраическая форма 591, 592
— —, показательная форма 628
— —, тригонометрическая форма 591, 592, 595, 597, 618, 628
Комплексного аргумента функция 305, 409, 603—606
Конечное уравнение 364
Конечный разрыв (разрыв первого рода) 115—118, 121, 438, 440
Конечные разности 350—357
Конические сечения 80, 85, 87—90
— —, полярное уравнение 87, 88
Конформное отображение 605, 682, 686
Координатный метод 6, 7, 9, 13
Координаты декартовы 9, 14, 36, 86, 87, 89
— —, преобразования 64, 65
— полярные 80, 86, 87, 89, 591
— текущие 16, 19, 22, 36, 56
Коперник Н. 581, 582
Корень (или нуль) уравнения 364—368, 396, 397
— кратный 364, 373
— простой 365, 372, 377
Корня извлечение (приближенное) 328—330
Корректировка таблиц 357, 359—363
Косинус 279, 280
— гиперболический 280, 294
— интегральный 288
— эллиптический 663
Котангенс 111, 280
— гиперболический 282
Кочина П. Я. 583, 681
Коши О. Л. 98, 103, 125, 126, 248, 352, 426 429—431, 461, 578—581, 681, 685
Коши—Больцано теорема, первая 125
— — —, вторая 126
Коши задача 498, 500, 503, 505, 511, 513, 539, 561, 566, 579, 586
— признак существования предела 103
— — сходимости ряда 436
— теорема 436, 437, 462
— формула 437, 462, 466, 499, 578
Коши — Римана условия 612
Коэффициент угловой касательной 136—138, 151, 152, 175, 195, 218, 496, 497
Коэффициент угловой прямой 17, 21, 25, 28, 40, 136, 137, 152
Коэффициенты весовые 273, 334, 336—343
Краевая задача 498, 539—545, 561
Краевое (граничное) условие 540, 541, 543, 544, 546, 548, 550, 552
Кратный корень уравнения 364, 373
Кривая алгебраическая 6, 36, 38
— вогнутая 182
— второго порядка 36, 74, 80, 82, 90, 198
— выпуклая 182

Кривая интегральная 227—229, 473—476, 478, 483, 484, 491, 496—498, 503
— спрямляемая 296
— трансцендентная 6, 38
Кривизна кривой 199—201, 204
Кривизны круг 199
— радиус 200—204
Криволинейная трапеция, площадь 241—244, 251, 254, 260—264, 278, 290, 298
Критическая точка 176, 178—180, 187, 190, 191
Круг сходимости 444—446, 452, 509
Круговой конус 298, 301
Круговые функции 279, 280, 652
Крылов А. Н. 313, 314, 316, 724
Крылов Н. М. 581, 724
Кубическая парабола 195, 203
Кубическое уравнение 422, 423
Кусочно-непрерывная функция 118

Лаврентьев М. А. 248, 579, 590, 681, 682, 724, 725
Лагранж Ж. Л. 131, 225, 226, 247, 305, 306, 429, 430, 480, 580, 612, 681, 688
Лаплас П. С. 583, 681, 683, 684
Латинский алфавит 711
Левосторонний предел функции 116
Левосторонняя производная 139
Лежандр А. М. 668
Лейбниц Г. В. 7, 93, 94, 131, 214, 215, 219, 247—249, 262, 304, 429, 577, 580, 589, 681,
Лейбница теорема 441, 442, 448, 449, 451
Лейбница—Ньютона формула 225, 241, 245, 248
Линейная интерполяция 333, 334, 337, 338, 343, 349, 350, 357, 358
— функция 14—16, 31, 70, 122, 141, 152, 221, 222, 267, 406
Линейное дифференциальное уравнение второго порядка 484—487, 505
— — — высшего порядка 486—495
— — —, метод вариации произвольных постоянных 480—482, 495, 580
— — — неоднородное (с правой частью) 480, 481, 484—486
— — — однородное (без правой части) 480—482, 484—487
— — — первого порядка 479—483
Линейной аппроксимации метод, или метод хорд 377—380, 387, 540, 544, 556
Линии второго порядка 36, 38, 82, 89, 90
Линия алгебраическая 6, 36, 38
— прямая 15—34, 67—69, 73, 74, 79, 184, 200, 201, 207, 221, 298, 334, 377
— трансцендентная 6, 38
— цепная 294, 302
Липшица условие 579, 580
Лиувилля—Штурма задача 546—548, 551, 555, 556
Лобачевский Н. И. 95, 370, 424—426, 584, 686
Логарифм десятичный 161, 162, 164
— интегральный 288
— натуральный 156—162, 164, 166, 654
— —, вычисление 452—454
Логарифмическая функция 160, 163, 231, 283, 654—658, 661
— —, дифференцирование 163—166
— —, интегрирование 229—231
— —, разложение в ряд 447—450
Лопиталь Г. Ф. 214, 215, 303, 304
Лопиталя—Бернулли правило 215—218, 418, 461, 516
Лузин Н. Н. 248, 681, 690
Ляпунов А. М. 307, 313, 581, 584, 585, 688

Магницкий Л. Ф. 161
Маклорен К. 188, 368, 429
Маклорена правило 188
— ряд 429, 456, 459, 465, 501, 504
Максимум, нахождение максимума и минимума 174—180, 184, 186—192
Малая ось (полуось) эллипса 45, 47, 51, 84
Математический анализ 93, 98, 109, 131, 248, 249, 302, 304
Математическое моделирование 273—279
Мероморфная функция 497, 532, 662
Метод вариации параметров 384—407, 409—421
— — произвольных постоянных 480—482, 495, 580
— графический отделения корней 364—366
— замены переменных при нахождении неопределенного интеграла 234, 235
— — — — — определенного интеграла 252—255
— исключения 383, 384, 391, 393, 400
— итераций 328, 379—383
— координат 6, 7, 9, 13
— линейной аппроксимации, или метод хорд 377—380, 387, 540, 544, 556
— неопределенных коэффициентов 456, 466, 470, 471, 493
— Ньютона, или метод касательных 370—376, 378, 380, 412
— подстановки 233—238, 252—255
— последовательных приближений 328
Механический смысл производной 182
Минимум, нахождение минимума и максимума 174—180, 184, 186—192
Митропольский Ю. А. 4, 581, 722, 724, 725
Мнемоническое «правило дождя» 184
Мнимая единица 588
— ось гиперболы 60, 65, 67, 84
— часть комплексного числа 589—591
Многозначная функция 95—97, 255, 604
Многочлен (см. полином)
Моделирование математическое 273—279
Модуль (абсолютная величина) 12, 100, 436
— комплексного числа 591, 592
— перехода от натуральных логарифмов к десятичным 162, 164, 450
— эллиптических функций 662—672, 676, 678
Монотонная функция 263, 352, 497
Муавра формула 597
Мусхелишвили Н. И. 248, 681, 725

Наибольшее значение функции 175, 242
Наименьшее значение функции 175, 242
Наклон касательной 137, 496, 497
Натуральные логарифмы 156—162, 164, 166, 654
— числа 99, 587
Начало координат 7, 8
Начальная координата 575, 577
— ордината 19, 21, 32, 561
— скорость 575, 577
Начальные условия 474, 482, 483, 491, 492, 497, 500, 501, 503, 506, 513
Невязка 385—388, 390—392, 394, 397, 398, 401—406, 410, 413, 418
Независимая переменная (аргумент) 13, 94, 95, 97—102
Нелинейные дифференциальные уравнения 498—581
Неоднородное дифференциальное уравнение 480, 481, 484—486
Неопределенности раскрытие 109, 115, 125, 214—218
Неопределенный интеграл 225—234, 241, 244, 245, 249, 251, 252, 262, 475, 614, 615
— —, свойства 231—233
— —, таблица 230

Неопределенных коэффициентов метод 456, 466, 470, 471, 493
Непер Дж. 161, 681, 683, 684
Неперовы (натуральные) логарифмы 161
Неполные эллиптические интегралы 288—290, 296, 662, 664, 666, 668
Непрерывность суммы ряда 440
— функции 115—130, 138—140
— — в промежутке 117, 125, 126
— — в точке 116, 118, 119, 122
Неравномерная сходимость ряда 438, 439
Нечетная функция 98, 170
Неявная функция 97, 195—198
Нормаль к плоской кривой 6, 136, 169, 195—199
Нули функции 364—368, 616—618, 634, 635, 638, 644, 653, 669, 678
Ньютон И. 7, 93, 98, 131, 156, 215, 247—249 304, 429, 430, 569, 570, 574, 576, 577, 580, 588, 637
Ньютона метод, или метод касательных 370—376, 378, 380, 412
— формула 328, 329
Ньютона—Котеса формула 273
Ньютона—Лейбница формула 225, 241, 245, 248

Область 601
— замкнутая 602
— изменения аргумента 95
— — функции 96
— односвязная 602
— определения (или существования) функции 96, 122, 127
Обратная величина 146, 164, 200
— пропорциональность 66, 200
— функция 96, 127—129, 146—148, 154, 167, 188, 606, 613
— —, производная 146, 147, 154
Обратное интерполирование 348
Обратные гиперболические функции 166, 283—285, 658, 660, 661
— — —, дифференцирование 166, 167, 284
— тригонометрические функции 96, 129, 152—154, 658—661
— — —, дифференцирование 152—154
— — —, разложение в ряд 450—452
Обращение интеграла 662
Общее решение дифференциального уравнения 473—477, 481—486, 489, 491—494, 498, 505, 506, 561
— уравнение линии второго порядка 38, 89, 90
— — прямой 19—21
Общая показательная функция 657, 658
— степенная функция 657, 658
Общий интеграл дифференциального уравнения 473, 475, 476, 478, 479, 498
— член ряда 432, 433, 436
Объем 297—301
— кругового конуса 298, 301
— тела вращения 298, 300
— шара 299, 301
— эллипсоида 299, 301
Обыкновенное дифференциальное уравнение 472
Ограниченная величина 113, 120
Однозначная функция 95—97, 284, 604
Однородная функция 479
Однородное дифференциальное уравнение 478, 479
— — — линейное 480—482, 484—487
Односвязная область 602
Округление 159, 315, 316, 320, 323, 325, 332
Окружность, длина 98
—, уравнение 38—45, 51, 89, 199
Определенный интеграл 225, 241, 243—246, 248—252, 286, 297, 302, 614, 615
Определенный интеграл, вычисление с помощью неопределенного интеграла 225, 241, 245, 248
— —, интегрирование по частям 252—255
— —, — способом подстановки 252, 255—257
— —, геометрическая интерпретация 241—245
— —, как предел суммы 260—263
— —, основные свойства 249—252
— —, формулы численных квадратур 264, 273
Оптическое свойство параболы 78
Ордината 7, 8, 10
— начальная 19, 21, 32, 561
Оси гиперболы 60, 61, 63, 84
— координат 7
— эллипса 45—47, 51, 84
Основная теорема алгебры (теорема Гаусса) 367, 410, 424
Основные правила дифференцирования 140—147
Особая точка 362, 452, 497—500, 509, 613, 618, 620, 634, 659—662, 673, 674
Особенностей выделение 508—518, 678
Особое решение дифференциального уравнения 473, 484
Особый интеграл 473, 475
Остаток ряда 430, 438—442, 457, 458, 461
Остроградский М. В. 248, 306, 307
Ось абсцисс 7, 20, 39
— действительная 590
— мнимая 590
— ординат 7, 19, 39
— параболы 70, 72, 73, 75, 77, 79
— полярная 86, 87
— числовая 7, 113, 316, 588, 589
Отделение корней 365—370
Открытый промежуток 95
Относительная погрешность 274, 277, 278, 317—319, 321—326
Отображение конформное 605, 682, 686
Отрезок, длина 10
—, уравнение прямой в отрезках 21, 22

Падение свободное 182, 575
Парабол формула (Симпсона) 264—273, 279, 286, 288—290, 296
Парабола (квадратичная) 38, 70—82, 85, 88, 96, 136, 172, 184, 207, 243, 265, 300, 301, 333, 335
—, диаметры 82
—, директриса 74—79, 84, 85, 87
— кубическая 195, 203
—, уравнение касательной и нормали 198
—, эксцентриситет 86, 87
Параболоид вращения 78, 300
Параллельные прямые 26, 28, 29
— —, условие параллельности прямых 26—28
Параллельный перенос осей координат 16, 18, 39, 64, 67, 71
Параметр 19, 22, 36, 401, 403, 404
— пучка прямых 23
— фокальный конического сечения 87
Параметрическое уравнение линии 201
— — эллипса 54
Паскаль Б. 247, 249
Пеано Дж. 579, 580
Первая производная 180, 192, 203
Первого порядка дифференциальное уравнение 479—483
Первообразная функция 131, 225—229, 231, 232, 237, 242—245, 262, 285—288
Перегиба точка 177, 180—188, 200, 202, 204
Переменная величина 93, 94
— зависимая, или функция 13, 93—102, 249

Переменная интегрирования 226, 243, 250
— независимая (аргумент) 13, 94, 95, 97—102
Переменных замена 233—238, 476, 477, 483
Перенос начала координат 18, 39, 64, 67, 71
Период 626, 662, 667—669
Периодическая функция 497, 655, 657, 662, 666, 668, 678, 680
Перпендикулярность прямых 26
— —, условие перпендикулярности 26—28, 40, 41, 196
Петровский И. Г. 248, 577, 579, 581, 725
π «пи» 247, 258, 259, 271—277, 319, 424, 428, 450
—, вычисление с любой наперед заданной точностью 634—637
Пикар Э. 579, 681
Плоскость комплексная 589—592, 600
Площадь криволинейной трапеции 241—244, 251, 254, 260, 261, 263, 264, 278, 290, 298
— плоской фигуры 225, 262, 264, 273, 290—292
— эллипса 273, 274, 292
Поворот осей кординат 64, 65
Погорелов Л. В. 5, 89, 90, 725
Погрешность абсолютная 159, 266, 274—278, 317—320, 322—326
— относительная 274, 277, 278, 317—319, 321—326
Подстановки метод 234—238, 252—255
Подынтегральная функция 226, 227, 229, 231, 239, 242, 243, 245
Подынтегральное выражение 226, 231, 236, 238—240, 243
Показательная форма комплексного числа 628
Показательная функция 163, 221, 621—626, 653, 654
— —, дифференцирование 163, 166
— —, разложение в ряд 456—459
Полином 122. 152, 181, 241, 267, 270, 273, 333, 340, 352—357, 362, 364, 367, 432, 493, 494, 616—618, 621
—, вычисление его значений 350, 355—357
Полиномиальная интерполяция 333—347, 357—359
Полные эллиптические интегралы 288—290, 296, 666—668, 673, 676, 677, 710
Полюс (в полярной системе координат) 86, 87
Полюс (особая точка) 418, 419, 497, 500, 509, 510, 513, 524, 618, 620, 634, 644, 662, 668, 673, 678, 680
Полярная ось 86, 87
Полярное уравнение конического сечения 87, 88
Полярные координаты 80, 86, 87, 89, 591
Порядок алгебраической кривой 38
— бесконечно малых 113, 114, 151, 170, 218
— дифференциального уравнения 472
— производной 180, 181
— разности 350, 351
Последовательность 156
Постоянная величина 98, 107, 111—113, 141, 152
— произвольная 225—234, 240, 242—244, 473, 476—489, 491, 495, 498
Построение гиперболы 59, 60
— графика функции 168, 173, 207—214
— параболы 75, 76
— эллипса 52—55
Потеря точности 134, 320, 321, 357—359, 362, 382, 383, 420, 639, 710
Правило Лопиталя—Бернулли 215—218, 418, 461, 516
— Маклорена 188
— разыскания точек перегиба 183—186
— — экстремума 175—180, 186—189
Правосторонний предел функции 116
Правосторонняя производная 139
Предел 98—110, 156, 602, 603
— произведения 107
— суммы 107, 109
— функции 104—109
— — односторонний 116
— частного (дроби) 107—109
Предельная граничная погрешность абсолютная 317
— — — относительная 318
Пределы интеграла 243, 244, 250—254, 270
Преобразование координат 64, 65
Приближенные вычисления 160
— —, правила 319—326, 328—330
— —, числа 313—316
Признак Больцано—Вейерштрасса 103, 158
— Вейерштрасса 440, 443
— Коши 103
Привалов И. И. 5, 90, 681, 725
Признаки возрастания и убывания функций 171
— сходимости ряда:
Вейерштрасса 440, 443
Даламбера 305, 436, 444, 445, 457, 459, 500
Коши 436
Приращение 118—121, 131—134, 150, 151, 218—223
Проверка и корректировка таблиц 357, 359—363
Прогрессия геометрическая 98, 157, 433, 438, 443, 447, 449, 458, 508, 509, 513, 517
Продолжение решения дифференциального уравнения 500, 509, 513, 534, 563. 566, 580
Производная 98, 110, 130—170, 180, 195, 219, 225, 226, 231, 241, 249, 325, 607—612
— вторая 180—186, 189, 191, 192, 199, 200, 223
— высшего порядка 180, 181, 188, 223, 352
—, геометрический смысл 135—138, 182
— левосторонняя 139
—, механический смысл 182
— неявной функции 195—198
— обратной функции 146, 147
—, основные формулы и правила дифференцирования 140—147, 166—168
— правосторонняя 139
— сложной функции 145, 146
—, таблица основных формул и правил дифференцирования 166—168
— функции комплексного аргумента 607
— частная 518, 579, 609—612
Произвольная постоянная 225—234, 240, 242—244, 473, 476—489, 491, 495, 498
— —, вычисление по начальным данным 228
Промежуток 95, 117, 171, 172
Простой корень 365, 372, 377
Прямая линия 15—34, 67—69, 73, 74, 79, 184, 200, 201, 207, 221, 298, 334, 377
— —, задачи, связанные с прямой 31—34
Прямая и обратная табличные задачи 347—350, 358
Прямые параллельные 26, 28, 29
Прямые перпендикулярные 26, 28
Прямоугольные декартовы координаты 9, 36, 64
Пуанкаре А. 431, 581, 583, 584, 681, 725
Путь, вычисление 301, 302
Пучок прямых 17, 19, 23, 25, 27, 41, 137

Равнобочная (равносторонняя) гипербола 37, 64—69, 112, 137, 280
Равномерная сходимость ряда 438—441, 443, 446
Равносильные (эквивалентные) бесконечно малые 114

Радиан 133, 216, 221
Радиус кривизны 200—204
— сходимости ряда 443—446, 452, 500, 501, 505, 506, 509, 511, 513, 634, 674
Разность конечная 350—357
Разрыв функции 115, 116, 139, 203, 438
— — бесконечный (второго рода) 115—117, 120, 122, 123, 125, 210, 497
— — конечный (первого рода) 115—118, 121, 438, 440
— — устранимый 115—117, 122, 125
Раскрытие неопределенности 109, 115, 125, 214—218
Расстояние между двумя точками 10
Расходящийся ряд 433, 435, 439, 443, 445, 446
Рациональная функция 122, 123, 616—618, 621
Рациональные числа 587
Рекуррентная формула 257, 351, 462, 465, 499—501, 506, 510, 513—517, 524, 534, 640, 641, 651, 672, 676, 678
Решение дифференциального уравнения 473
— — — общее 473—477, 481—486, 489, 491—494, 498, 505, 506, 561
— — — особое 473, 484
— — — частное 473, 474, 480—487, 490—495, 497, 561
Решение конечных уравнений 364—408
— — — в комплексной области 409—421
— — — графическое 365, 384
Решение конечных уравнений, метод итераций 379—383
— — —, — линейной аппроксимации, или метод хорд 377—380, 387
— — —, — Ньютона, или метод касательных 370—376; 378, 380
— систем конечных уравнений 383—407, 409—421
Риккати уравнение 518—532, 578
Риман Г. Ф. Б. 140, 248, 264, 429, 431, 437, 620, 681, 686, 687, 725
Римана—Коши условия 612
Ряд 432
— абсолютно сходящийся 436—440, 442—447, 451
— биномиальный 514, 516, 517
— гармонический 303, 429, 435, 446
— знакочередующийся 439, 441, 442, 448, 449, 451
— колеблющийся 433
— Маклорена 429, 456, 459, 465, 501, 504
—, признаки сходимости 305, 436, 440, 443—445, 457, 459, 500
— равномерно сходящийся 438—441, 443, 446
— расходящийся 433, 435, 439, 443, 445, 446
— степенной 369, 429, 442—452, 454—471, 498, 506, 672—674, 680
— сходящийся 432, 434—436, 438, 440—445
— Тейлора 182, 215, 325, 373, 429, 430, 454—461
— — для гиперболических функций 459, 460
— — — логарифмической функции 447—450
— — — показательной функции 456—459
— — — тригонометрических функций 450—452, 459, 460
— — — эллиптических функций 672—680
— функциональный 432, 438
— числовой 432—438
Ряды, деление степенных рядов 466—470
—, применение к решению дифференциальных уравнений 498—581
—, почленное дифференцирование 439, 440, 444—446
—, — интегрирование 439, 440, 444—446
—, почленное сложение и вычитание 435, 462
— умножение рядов 437, 438, 462—465

Савин Г. Н. 681
Свободное падение 182, 575
Свободные колебания 560, 573, 575
Сегмент 95—97, 190
Седов Л. И. 681, 683, 690, 723
Сечения конические 80, 85, 87—90
Симпсона формула, или формула парабол 264—273, 279, 286, 288—290, 296
Синус 279, 280
— гиперболический 280, 281, 294
— интегральный 287
— эллиптический 663, 680
Система двух уравнений с двумя неизвестными 383—395
— дифференциальных уравнений 532—539, 672, 673
— конечных уравнений с тремя неизвестными 396—403, 406, 407
— — — со многими неизвестными 403—406
— координат декартова 9, 14, 36, 64, 86, 87, 89
— — полярная 80, 86, 87, 89
Скорость 97, 130, 131, 170, 172, 182, 192, 193, 203
— начальная 575, 577
Сложная функция 127, 130, 145, 146, 149, 150, 155, 197, 235, 608
— —, производная 145, 146, 155
Сложение комплексных чисел 592, 593
Смирнов В. И. 248, 571, 581, 590, 681, 726
Соболев С. Л. 581, 681
Собственные значения 544, 546—560
— функции 546, 548, 556, 558, 559
Соколов Ю. Д. 440, 590, 659, 681, 683, 726
Сомнительные цифры 314—316, 323, 331
Соприкасающаяся окружность 199, 202
Сопряженные диаметры гиперболы 83
— — эллипса 83
— комплексные числа 367, 410, 423, 490, 595, 596
Спираль Архимеда 247, 696
Спрямляемая кривая 296
Стационарная точка 172—178, 180, 186, 188, 193
Степенная функция 147—152, 166, 231
— —, дифференцирование 147—152, 166
— —, интегрирование 229—231
— —, общая 657, 658
Степенной ряд 369, 429, 442—452, 454—471, 498, 506, 672—674, 680
— —, круг сходимости 444—446, 452, 509
— —, радиус сходимости 443—446, 452, 500, 501, 505, 506, 509, 511, 513, 634, 674
Субтабулирование 338, 343—347, 452—454, 640
Сумма ряда 98, 430, 432, 434, 435, 438, 440, 446
Стеклов В. А. 307, 681, 688
Струве В. Я. 647, 648
Сходимость ряда абсолютная 436—440, 442—447, 451
— — условная 437
Сходящийся ряд 432, 434—436, 438, 440—445
— —, неравномерно 438, 439
Сходящийся ряд, равномерно 438—441, 443, 446
— —, признаки сходимости 305, 436, 443—445, 457, 459, 500

Таблица значений коэффициентов для непосредственного интерполирования по узловым точкам 716—719
— — некоторых постоянных 721
— — показательной и гиперболических функций 714, 715
— — полинома, вычисление 350, 355—357
— — полных эллиптических интегралов первого рода 720

Таблица значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций 712, 713
— — — функций, вычисление 640—642
— логарифмов, вычисление 452—454
— основных формул и правил дифференцирования 166, 167
— простейших интегралов 229—231
Таблиц проверка и корректировка 357, 359—363
— уплотнение 338, 343—347
Табличная задача прямая и обратная 347—350, 358
Табличный способ вычисления 330, 336
— — задания функции 97
Табулирование 332
Тангенс 280
— гиперболический 282, 421
Тейлор Б. 429, 430
Тейлора ряд 182, 215, 325, 373, 429, 430 454—461
— формула 373, 577, 578
Текущие координаты 16, 19, 22, 36, 56
Теорема Абеля, первая 443, 444
— —, вторая 444, 445
— алгебры основная (теорема Гаусса) 367, 410, 424
— Безу 367
— Больцано—Коши, первая 125
— — —, вторая 126
— Гаусса 367, 410, 424
— Декарта 368
— Коши 436, 437, 462
— Лейбница 441, 442, 448, 449, 451
— об интегрировании рядов 440
— о дифференцировании рядов 440
— сложения 662, 640, 652—654, 665, 710
Теоремы о пределах основные 107—109
Тихонов А. Н. 248, 581, 682, 725
Точка возврата 600
— критическая 176, 178—180, 187, 190, 191
— особая 362, 452, 497—500, 509, 613, 618, 620, 634, 659—662, 673, 674
— перегиба 177, 180—188, 200, 202, 204
— —, правило разыскания 183, 184
— разветвления 390, 394, 410, 620, 656—659
— разрыва 116, 139, 440
— стационарная 172—178, 180, 186, 188, 193
— узловая 221, 333—341, 357
— экстремальная 174—180, 183, 185—189
— —, правило разыскания 177—180, 186—189
Точности потеря 134, 320, 321, 357—359, 362, 382, 383, 420, 639, 710
Трансцендентная кривая 6, 38
— функция 231, 285, 621
— — целая 623, 627
Трансцендентное уравнение 364, 367, 369, 370
— число 158
Трапеций формула 264—266, 271—273
Трапеция криволинейная 241—244, 251, 254, 260—264, 278, 290
Триангуляция 646—648
Тригонометрическая форма комплексного числа 591, 592, 595, 597, 618, 628
Тригонометрические функции 129, 152, 153, 181, 279, 280, 342, 420, 626—646, 652, 653, 662, 665, 672, 678, 680
— — обратные 96, 129, 152—154, 658—661
— —, вычисление таблиц 640—642
— —, разложение в ряд 450—452, 459, 460
— —, связь с гиперболическими и показательной функциями 651—653

Убывание функции 171—174, 183
Угловой коэффициент 17, 21, 25, 28, 40, 136, 137, 152
Угловой коэффициент касательной 136—138, 151, 152, 175, 195, 218,496, 497
Угол между прямыми 25, 26
Узловая точка 221, 333—341, 357
Уклон 17—21, 168, 172, 173, 184, 228
Умножение комплексных чисел 594—596
— рядов 437, 438, 462—465
Уплотнение таблиц 338, 343—347
Уравнение алгебраическое 158, 349, 364, 367—370, 422, 424, 426, 431
— Бернулли 483, 484, 586
— в частных производных 472
— дифференциальное (см. дифференциальное уравнение)
— Дуффинга 560—569, 573, 586
— касательной 137, 138, 195—198, 371
— каноническое 50
— — гиперболы 57, 61
— — эллипса 50, 61
— квадратное 67, 69, 78, 79
— конечное 364
— кубическое 422, 423
— параболы 70—79
— конического сечения полярное 87, 88
— линии второго порядка 38, 89
— — параметрическое 201
— нормали 195—198
— окружности 38—45, 51, 89, 199
— прямой 15, 16, 21, 31, 38, 195, 196
— пучка прямых 17, 19, 23, 25, 27, 41
— Риккати 518—532, 578
— трансцендентное 364, 367, 369, 370
— характеристическое 487—494
— эллипса параметрическое 54
Ускорение 182
Условие вогнутости кривой 182—184
— возрастания функции 171
— выпуклости кривой 182—184
— граничное (краевое) 540, 541, 543, 544, 546, 548, 550, 552
— Липшица 579, 580
— максимума и минимума достаточное 175
— — — — необходимое 175
— параллельности прямых 26—28
— перпендикулярности прямых 26—28, 40, 41, 196
— существования точки перегиба 183, 184
— убывания функции 171
Условия дифференцируемости функции комплексного аргумента 607—612
— Коши—Римана 612
— начальные 474, 482, 483, 491, 492, 497, 500, 501, 503, 506, 513
Условно сходящийся ряд 437
Устранимый разрыв 115—117, 122, 125
Уточнение корня 365, 370—383

Факториал 156, 456
Ферма П. 6, 247
Фокальный параметр конического сечения 87
Фокус параболы 75—77, 85, 87
Фокусы гиперболы 56, 59—63, 85, 87
— эллипса 45, 46, 85, 87
Формула Валлиса 258—260, 272
— для вычисления радиуса кривизны 200, 201
— интегрирования по частям 238, 256
— интерполяционная 333, 335—338, 340—343
— Кардано 423, 428
— квадратурная 264, 273, 296
— Коши 437, 462, 466, 499, 578
— Муавра 597
— Ньютона 328, 329
— Ньютона—Котеса 273
Формула Ньютона—Лейбница 225, 241, 245, 248

Формула рекуррентная 257, 351, 462, 465, 499—501, 506, 510, 513—517, 524, 534, 640, 641, 651, 672, 676, 678
— Симпсона, или формула парабол 264—273, 279, 286, 288—290, 296
— Тейлора 373, 577, 578
— трапеций 264—266, 271—273
Формулы дифференцирования 166, 167
— интегрирования 229, 230, 238
— параллельного переноса координат 16, 18, 39
— поворота осей 64, 65
— преобразования координат 18, 64, 65
— приведения 634, 637—640, 672, 677, 678
— численных квадратур (приближенного интегрирования) 264, 273, 296
— Эйлера 490, 628, 629, 652
Функции Вейерштрасса 680
— гиперболические 166, 230, 231, 279—283, 294, 634, 651—653, 665
— круговые 279, 280, 652
— обратные гиперболические, или ареа-функции 166, 283—285, 658, 660, 661
— — тригонометрические 96, 129, 152—154, 658—661
— собственные 546, 548, 556, 558, 559
— тригонометрические 129, 152, 153, 181, 279, 280, 342, 420, 626—646, 652, 653, 662, 665, 672, 678, 680
— эллиптические 431, 567, 662, 668
— — Якоби 662—680, 710
Функциональная зависимость 13, 75, 94, 97
Функциональный ряд 432, 438
Функция, или зависимая переменная 13, 93—102, 249
— алгебраическая 431, 620, 621
— аналитическая 305, 367, 409, 412, 429, 452, 605, 612, 613
— возрастающая 171—174, 183
— Гаусса (интеграл вероятности) 285, 286, 348
— дифференцируемая 138
— дробно-линейная 66
— дробно-рациональная 230, 618
— иррациональная 618—621
— квадратичная 70—74
— комплексного аргумента 305, 409, 603—606
— кусочно-непрерывная 118
— линейная 14—16, 31, 70, 122, 141, 152, 221, 222, 267, 406
— логарифмическая 160, 163, 231, 283, 654—658, 661
— мероморфная 497, 532, 662
— многозначная 95—97, 255, 604
— монотонная 263, 352, 497
— непрерывная 115—130, 138—140
— нечетная 98, 170
— неявная 97, 195—198
— обратная 96, 127—129, 146—148, 154, 167, 188, 606, 613
— общая показательная 657, 658
— — степенная 657, 658
— однозначная 95—97, 284, 604
— однородная 479
— первообразная 131, 225—229, 231, 232, 237, 242—245, 262, 285—288
— периодическая 497, 655, 657, 662, 666, 668, 678, 680
— подынтегральная 226, 227, 229, 231, 239, 242, 243, 245
— показательная 163, 221, 621—626, 653, 654
— разрывная 116, 438
— рациональная 122, 123, 616—618, 621
— — дробная 230, 618
— — целая (см. полином)
— сложная 127, 130, 145, 146, 149, 150, 155, 197, 235, 608
— степенная 147—152, 166, 231
Функция трансцендентная 231, 285, 621
— — целая 623, 627
— убывающая 171—174, 183
— целочисленная 95, 111
— четная 98, 105, 170, 189
— элементарная 129, 130, 141, 166, 168, 285
— явная 97, 196
Фурье Ж. Б. Ж. 262, 426, 430, 431
Фурье ряд 431

Характеристическое уравнение 487—494
Хорд метод, или метод линейной аппроксимации 377—380, 387, 540, 544, 556

Целая трансцендентная функция 623, 627
Целочисленная функция 95, 111
Центр гиперболы 60, 82
— кривизны 200—203
— окружности 38—43
— ряда 422—444, 451, 454, 462, 672, 674
— эллипса 51, 82
Цепная линия 294, 302
Цифры верные 314—316, 325, 326
— значащие 105, 134, 159, 268, 314—316, 318, 323—326, 329
— сомнительные 314—316, 323, 331

Чаплыгин С. А. 681, 682, 689, 690, 727
Частичная сумма ряда 432, 434
Частная производная 578, 579, 609—612
Частное решение дифференциального уравнения 473, 474, 480—487, 490—495, 497, 561
Частный интеграл 473
Чебышев П. Л. 248, 273, 307, 308, 313, 583, 584, 688
Четверть (квадрант) 7—10
Четная функция 98, 105, 170, 189
Числа вещественные (действительные) 367, 588—591, 596
— иррациональные 98, 158, 587
— комплексные 367, 409—412, 423, 424, 587—592, 600, 676
— — сопряженные 367, 410, 423, 490, 595, 596
— мнимые 588—590
— натуральные 99, 587
— приближенные 313—316
— —, действия над ними 319—326, 328—330
— рациональные 587
— трансцендентные 158, 258
Численное интегрирование 264—273
— решение уравнений с одним неизвестным 364—383
— — систем конечных уравнений 384—407, 409—421
Число *e* 156—162, 215, 457—459
Число π 247, 258, 259, 271—277, 319, 424, 428, 450
— —, вычисление его с любой наперед заданной точностью 634—637
Числовая ось 7, 113, 316, 588, 589
Числовой ряд 432—438

Шаг таблицы 332, 334, 338, 343, 347, 357
Шар 299, 301
Штокало И. З. 581, 723, 727
Штурма—Лиувилля задача 546—548, 551, 555, 556

Эволюта 201—203
— параболы 202, 203
Эйлер Л. 7, 96, 98, 158, 247, 262, 304—306 429, 487, 518, 577, 578, 580, 597, 612, 637, 654, 681, 688, 727
Эйлера формулы 490, 628, 629, 652

Эквивалентные (равносильные) бесконечно малые 114
Экспоненциальная функция 163, 221
— —, разложение в ряд 456—459
Экстраполяция 333, 378, 379
Экстремум функции 174—180, 183, 185—190, 193
— —, достаточное условие 175
— —, необходимое условие 175, 186
— —, правила разыскания 175—180, 186—189
Эксцентриситет гиперболы 59—61, 63, 67, 85—87
— параболы 86, 87
— эллипса 45, 47, 48, 51, 61, 84, 85, 87, 295, 296
Элементарные функции 129, 130, 141, 166, 168, 285
Эллипс 38, 45—56, 80—85, 87—90, 196—198
—, вершины, оси, фокусы 45—48, 54, 61, 87, 203
—, диаметры 82—84
—, директрисы 84, 85
—, длина дуги 295, 296
—, каноническое уравнение 50, 61
—, параметрическое уравнение 54
—, площадь 273, 274, 292
—, построение 52—55
—, уравнение касательной и нормали 198
—, уравнение в полярных координатах 88
Эллипс, центр 51, 85
—, эксцентриситет 45, 47, 48, 51, 61, 84, 85, 87, 295, 296
Эллипсограф 54, 55
Эллипсоид 299, 301
— Красовского 648
Эллиптические колеса (шестерни) 55, 56
— функции 431, 567, 662, 680
— — Вейерштрасса 680
— — Якоби 434, 662—680, 710
— — —, дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют 672—680
— — —, их двоякопериодичность 665—672, 678, 680
Эллиптический интеграл первого рода 288, 289, 662, 664, 666, 668
— — — — полный 288, 666—668, 673, 676, 677, 710
— — второго рода 289, 290, 296
— — — — полный 290, 296
— — третьего рода 289, 290
— косинус 663
— параболоид вращения 300
— синус 663, 680
Энгельс Ф. 93

Явная функция 97, 196
Якоби К. Г. Я. 431, 663, 686

Фильчаков Павел Феодосьевич

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор *Е. А. Воронько*
Художественный редактор *В. М. Тепляков*
Оформление художника *М. Н. Усова*
Технический редактор *Н. П. Рахлина*
Корректор *Я. Н. Вишневская*

Сдано в набор 27/X 1971 г. Подписано к печати 22/VIII 1972 г. БФ 01694. Зак. № 4-368. Изд. № 367. Тираж 300 000 (III—100 000). Бумага № 3, $60\times90^{1}/_{16}$. Условн. печ. листов 46,5. Учетно-изд. листов 56,54. Цена в переплете № 5 2 руб. 95 коп., в переплете № 7 3 руб. 7 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.